

Ю.І. КАЛЮХ

ДП «Державний науково-дослідний інститут будівельних конструкцій»; Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ, Україна, e-mail: *kalyukh2002@gmail.com*.

О.Г. ЛЕБІДЬ

Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ, Україна, e-mail: *o.g.lebid@gmail.com*.

ЗАСТОСУВАННЯ АСИМПТОТИЧНИХ І ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ МЕЖ СТІЙКОСТІ РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМ У ПОТОЦІ

Анотація. На основі асимптотичних та чисельних методів досліджено причини та сукупність параметрів, що спричиняють аеропружні коливання за флатерним типом у розподілених системах (РС). Нестійкість зумовлена спільним впливом трьох чинників: знесенням збурень вздовж РС по потоку, згинальною жорсткістю і впливом інерційної сили, що є розподіленим рухомим вздовж РС навантаженням. Збільшення сили натягу і згинальної жорсткості РС зрушує зону нестійкості у більш високочастотний діапазон коливань. Збільшення відносної щільності потоку і відносної довжини РС розширює область нестійкості. Наявність кута нахилу РС до потоку додає особливостей у баланс сил, що діють на РС, і в формування межі областей стійкості і нестійкості. Однак коректне оцінювання його впливу у розглядуваній моделі неможливе і вимагає більш детального подальшого розгляду. Конфігурація РС у нестійкій області вказує на концентрацію напружень поблизу верхнього її кінця. Отримані результати для малих кутів нахилу РС до потоку узгоджуються з відомими результатами, одержаними іншими авторами.

Ключові слова: хвилі, аеропружність, асимптотичні методи, флатер, безлопатевий вітрогенератор.

ВСТУП

Розподілені системи (РС) є важливим інструментом для досліджень цілої низки систем наукового, прикладного та військового характеру в космічному, повітряному та водному середовищах [1–3]. У процесі експлуатації такі системи чутливі до впливу набігаючого потоку, що діє на них співвісно або під деяким кутом. Найчастіше РС унаслідок взаємодії з потоком втрачає стійкість і починає здійснювати поперечні коливання малої або великої амплітуди [4, 5]. Відомі результати вітчизняних вчених Ю.Г. Кривоноса та І.Т. Селезова з дослідження аеро-, гідро- та магнітопружних хвиль у потоці рідини, газу та плазми [6]. Досліджували хвильові процеси у різних середовищах відомі українські вчені А.В. Гладкий, І.В. Сергієнко, В.В. Скопечкий [7, 8], В.Ф. Губарев [9], О.М. Трофимчук [10] та ін.

З одного боку, «шкідливі» аеропружні коливання спричиняють руйнування мостів, крил літаків тощо [11–13]. З іншого боку, це явище як «позитивне» вперше було використане в безлопатевому вітрогенераторі іспанською компанією Vortex Bladeless у 2011 р. [14–16]. Вертикальний безлопатевий вітрогенератор має вигляд величезної бейсбольної бити, що закріплена на ручці та розгойдується на вітрі (рис. 1). Розгойдування відбувається під дією коливного набігаючого потоку; він виникає, коли суцільне середовище обтікає циліндричний корпус.

© Ю.І. Калюх, О.Г. Лебідь, 2022

Незважаючи на багаторічні дослідження аеро- та гідропружних коливань РС, вивчення проблеми їхньої стійкості (нестійкості) залишається актуальним і на цей час [11, 12, 17].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай РС діаметром d і довжиною L має малу стрілу прогину [18]. Припустимо, що РС обтікає потік зі швидкістю V_0 . Осьове зусилля T розподіленої системи вважатимемо сталим. Для опису динамічної поведінки РС в похилому потоці використовуємо лінеаризовану модель динаміки РС в потоці, побудовану для декартової системи координат. Обчислимо оцінку стійкості для поперечних коливань РС, перпендикулярних площині OXY , в якій лежить вектор швидкості течії V_0 . Це зумовлено тим, що, як і у випадку вимушених коливань, саме коливання поперек потоку найбільше впливають на процес втрати стійкості РС в порівнянні з поперечними коливаннями в площині OXY , де сили демпфірування більші в межах розглядуваної математичної моделі. На кожній ділянці РС, стріла прогину яких мала, вектор швидкості V_0 складає кут ϕ_0 з віссю OX . Враховуючи наведені припущення, радіус-вектор i -ї ділянки РС $\bar{R}_0(S)$ запишемо у вигляді [18]

$$\bar{R}_0(S) = S \bar{e}_1 + \bar{r}_0(S); \left(\frac{d\bar{r}_0}{dS} \right)^2 \ll 1, \quad (1)$$

де S — поточна довжина РС; \bar{e}_1 — одиничний вектор, направлений вздовж РС; $\bar{r}_0(S)$ — вектор початкового відхилення РС у момент часу $t=0$.

Осьове зусилля T на i -й ділянці передбачається сталим і дорівнює напівсумі осьових зусиль на кінцях i -ї та $(i+1)$ -ї ділянок. Розглянемо незначні коливання РС біля положення статичної рівноваги на окремій її ділянці з малою стрілою прогину [18, 19]:

$$\bar{R}_0(S, t) = \bar{R}_0(S) + \bar{r}(S, t), \quad (2)$$

де

$$\bar{r}(S, t) = (0, z, y); \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial S} \right)^2 \ll 1; \left(\frac{\partial \bar{r}}{V_0 \sin \phi_0 \partial t} \right)^2 \ll 1; \left| \frac{\pi k_f d \rho V_0^2 L \cos \phi_0}{2T_0} \right| \ll 1, \quad (3)$$

$\bar{r}(S, t)$ — вектор поперечних коливань РС, y — амплітуда поперечних коливань РС вздовж осі OY , z — амплітуда поперечних коливань РС вздовж осі OZ , k_f — гідродинамічний коефіцієнт опору тертя, ρ — щільність потоку.

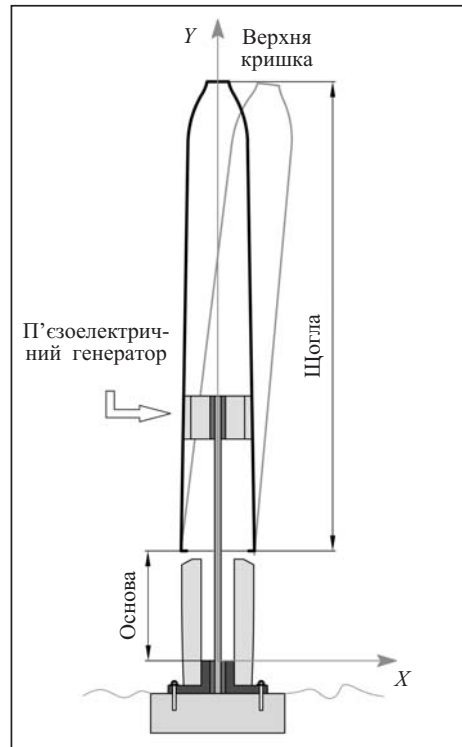


Рис. 1. Принципова схема безлопатевого вітрогенератора

Під час дослідження вимушених коливань РС передбачається також, що унаслідок малої дисипації енергії коливань у матеріалі РС (в порівнянні із загасанням енергії коливань під дією сил демпфірування різної природи) внутрішнім тертям матеріалу РС можна знехтувати.

Рівняння нелінійної динаміки РС [20] з урахуванням наведених припущень можна лінеаризувати, увівши додатково в розгляд згинальну жорсткість РС:

$$\begin{aligned} (m + M) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2MV_\tau \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial S} + MV_\tau \frac{\partial^2 y}{\partial S^2} + \frac{2q_n \sin \phi_0}{V} \left(\frac{\partial y}{\partial t} + V_\tau \frac{\partial y}{\partial S} \right) - \\ - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial S^2} + \frac{q_f}{V} (1 + \sin^2 \phi_0) \frac{\partial y}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial S^4} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$q_n = \frac{k_n \rho d V_0^2}{2}; \quad q_f = \frac{\pi k_f \rho d V_0^2}{2}; \quad V_\tau = V_0 \cos \phi_0,$$

де ϕ_0 — кут нахилу потоку; m , M — маса і приєднана маса одиниці довжини РС; k_n — гідродинамічний коефіцієнт опору форми; T_0 — ефективний натяг РС; V_0 — швидкість потоку; t — час; E — модуль Юнга РС; I — модуль інерції РС. Для поперечних коливань в напрямку z можна отримати подібне рівняння.

Для знерозмірення рівняння (4) уведемо такі змінні:

$$\sigma = \frac{S}{L}; \quad \tau = \sqrt{\frac{(T_0)^2 t}{mEI}}; \quad \bar{x} = \frac{y}{d}; \quad \varepsilon^2 = \frac{EI}{T_0 L^2}; \quad q = \frac{m}{M + m}, \quad (5)$$

де σ — знерозмірена довжина РС, τ — знерозмірений час, \bar{x} — знерозмірена амплітуда поперечних коливань РС вздовж осі OY , ε^2 — знерозмірена згинальна жорсткість, q — знерозмірена маса одиниці довжини РС.

Підставимо (5) в (4) і після нескладних тотожних перетворень отримаємо

$$q\varepsilon^4 \frac{\partial^4 \bar{x}}{\partial \sigma^4} - \varepsilon^2 (1 - \alpha) q \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial \sigma^2} + 2\varepsilon \sqrt{\alpha(1 - q)q} \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial \sigma \partial \tau} + \gamma \frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau} + \varepsilon \delta \frac{\partial \bar{x}}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial \tau^2} = 0, \quad (6)$$

де

$$\alpha = \frac{1}{T_0} M V_0 \cos^2 \phi_0; \quad \delta = \sqrt{\frac{EI}{T_0}} \frac{m}{T_0} \frac{\rho d V_0}{4} k_n \sin 2\phi_0 \frac{V_0}{m + M}; \quad (7)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{EI}{T_0}} \sqrt{\frac{m}{T_0}} \frac{\rho d V_0}{2} \frac{k_n \sin \phi_0 + \pi k_f}{m + M}.$$

У виразі (7) величина ε характеризує відношення жорсткості РС на згин до жорсткості РС на розтягнення; α , δ та γ — коефіцієнти, що характеризують сили демпфірування та приєднаної маси; q — відношення погонної маси РС до її ефективної маси в потоці (маса + приєднана маса).

Обмежимося розглядом крайових умов жорсткого защемлення:

$$\bar{x}(0, \tau) = \bar{x}(1, \tau) = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \sigma}(0, \tau) = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \sigma}(1, \tau) = 0. \quad (8)$$

АСИМПТОТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Для РС параметр ε зазвичай є малим, $\varepsilon \in [0.001-0.3]$ [17, 20, 21]. Унаслідок цього рівняння (6) з крайовими умовами (8) є сингулярно збуреним (малий коефіцієнт для старшої похідної). Для його розв'язання потрібно використувати асимптотичні методи, наприклад метод зрощування асимптотичних розвинень за параметром ε [17]:

$$x(\sigma, \tau) = g(\sigma, \varepsilon) \exp(z(\sigma - 1) / \varepsilon + k\tau). \quad (9)$$

Для $g(\sigma, \varepsilon)$ маємо [18]

$$g(\sigma, \varepsilon) = g_0(\sigma) + \varepsilon g_1(\sigma) + \varepsilon^2 g_2(\sigma) + \varepsilon^3 g_3(\sigma). \quad (10)$$

Поблизу країв системи будемо розв'язок типу приміжового шару з урахуванням (10)

$$\begin{aligned} g(\sigma, \varepsilon) &= \varepsilon \bar{g}_1 + \varepsilon^2 \bar{g}_2 + \varepsilon^3 \bar{g}_3 + \varepsilon^4 \bar{g}_4; \quad \bar{\sigma} \ll 1; \\ g(\sigma, \varepsilon) &= \varepsilon \bar{g}_1^* + \varepsilon^2 \bar{g}_2^* + \varepsilon^3 \bar{g}_3^* + \varepsilon^4 \bar{g}_4^*; \quad 1 - \bar{\sigma}^* \ll 1; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\bar{g}_i = g_i(\bar{\sigma}); \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\varepsilon}; \quad \bar{g}_i^* = \bar{g}_i^*(\bar{\sigma}^*); \quad \bar{\sigma}^* = \frac{1 - \sigma}{\varepsilon}.$$

Щоб отриманий розв'язок (9) містив згідно з [17] експоненційну залежність від часу, введемо перетворений масштаб часу k , який розвинемо в ряд за степенями малого параметра ε :

$$k = k_0 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \varepsilon^3 k_3 + \varepsilon^4 k_4 + \dots \quad (12)$$

Підставимо розвинення (9)–(12) в (6) і крайові умови (8):

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 &\Leftrightarrow \frac{1}{q} E_0 + \left(\frac{\gamma}{q} + 2 \sqrt{\alpha \left(\frac{1}{q} - 1 \right) z} \right) k_0 + W = 0; \\ \varepsilon^1 &\Leftrightarrow \left[\frac{1}{q} E_0 + W + \left(\frac{\gamma}{q} + 2 \sqrt{\alpha \left(\frac{1}{q} - 1 \right) z} \right) k_0 \right] g_1 = - \left[\frac{\gamma}{q} E_1 + \left(\frac{\gamma}{q} + 2 \sqrt{\alpha \left(\frac{1}{q} - 1 \right) z} \right) k_0 + W \right] g_0; \\ \varepsilon^2 &\Leftrightarrow \left[\frac{1}{q} E_0 - W + \left(\frac{\gamma}{q} + 2 \sqrt{\alpha \left(\frac{1}{q} - 1 \right) z} \right) k_0 \right] g_2 = - \left[\frac{1}{q} E_1 + \left(\frac{\gamma}{q} + 2 \sqrt{\alpha \left(\frac{1}{q} - 1 \right) z} \right) k_1 \right] g_1 - \\ &\quad - \left[\frac{1}{q} E_2 + \left(\frac{\gamma}{q} + 2 \sqrt{\alpha \left(\frac{1}{q} - 1 \right) z} \right) k_2 \right] g_0 - u \frac{d^2 g_0}{d\sigma^2}; \quad (13) \\ \varepsilon^3 &\Leftrightarrow \left[\frac{1}{q} E_0 + \left(\frac{\gamma}{q} + 2 \sqrt{\alpha \left(\frac{1}{q} - 1 \right) z} \right) k_0 + W \right] g_3 = - \left[\frac{1}{q} E_1 + \left(\frac{\gamma}{q} + 2 \sqrt{\alpha \left(\frac{1}{q} - 1 \right) z} \right) k_1 \right] g_2 - \\ &\quad - \left[\frac{1}{q} E_2 + \left(\frac{\gamma}{q} + 2 \sqrt{\alpha \left(\frac{1}{q} - 1 \right) z} \right) k_2 \right] g_1 - \\ &\quad - \left[\frac{1}{q} E_3 + \left(\frac{\gamma}{q} + 2 \sqrt{\alpha \left(\frac{1}{q} - 1 \right) z} \right) k_3 \right] g_0 - u \frac{d^2 g_1}{d\sigma^2} - 4z \frac{d^3 g_0}{d\sigma^3}; \end{aligned}$$

$$u = 6z^2 - 1 + \alpha;$$

$$W = z^4 - z^2(1 - \alpha) + z \frac{\delta}{q};$$

$$z^3 - \frac{z(1 - \alpha)}{2} + \frac{k}{2} \sqrt{\alpha \left(\frac{1}{q} - 1 \right)} + \frac{\delta}{q} = 0.$$

Вирази для E_0, E_1, E_2, E_3 ті ж самі, що й у роботі [17].
Для прилежового шару на лівій межі системи маємо

$$\varepsilon^1 \Leftrightarrow \frac{d^4 \bar{g}_1}{d\sigma^4} + 4z \frac{d^3 \bar{g}_1}{d\sigma^3} + u \frac{d^2 \bar{g}_1}{d\sigma^2} + \bar{g}_1 \left[E_0 + \left(\frac{\gamma}{q} + 2 \sqrt{\alpha \left(\frac{1}{q} - 1 \right)} z \right) k_0 + W \right] = 0;$$

$$\varepsilon^2 \Leftrightarrow \frac{d^4 \bar{g}_2}{d\sigma^4} + 4z \frac{d^3 \bar{g}_2}{d\sigma^3} + u \frac{d^2 \bar{g}_2}{d\sigma^2} + \bar{g}_2 \left[E_0 + \left(\frac{\gamma}{q} + 2 \sqrt{\alpha \left(\frac{1}{q} - 1 \right)} z \right) k_0 + W \right] = (14)$$

$$= - \left[E_1 + \left(\frac{\gamma}{q} + 2 \sqrt{\alpha \left(\frac{1}{q} - 1 \right)} z \right) k_1 \right] \bar{g}_1.$$

Для правої межі системи запишемо рівняння

$$\varepsilon^1 \Leftrightarrow \frac{d^4 \bar{g}_1^*}{d\sigma^4} + 4z \frac{d^3 \bar{g}_1^*}{d\sigma^3} + u \frac{d^2 \bar{g}_1^*}{d\sigma^2} + \bar{g}_1^* \left[E_0 + \left(\frac{\gamma}{q} + 2 \sqrt{\alpha \left(\frac{1}{q} - 1 \right)} z \right) k_0 + W \right] = 0;$$

$$\varepsilon^2 \Leftrightarrow \frac{d^4 \bar{g}_2^*}{d\sigma^4} + 4z \frac{d^3 \bar{g}_2^*}{d\sigma^3} + u \frac{d^2 \bar{g}_2^*}{d\sigma^2} + \bar{g}_2^* \left[E_0 + \left(\frac{\gamma}{q} + 2 \sqrt{\alpha \left(\frac{1}{q} - 1 \right)} z \right) k_0 + W \right] =$$

$$= - \left[E_1 + \left(\frac{\gamma}{q} + 2 \sqrt{\alpha \left(\frac{1}{q} - 1 \right)} z \right) k_1 \right] \bar{g}_1^*. \quad (15)$$

Граничні умови трансформуються в такий спосіб:

$$\bar{g}_1(0) = \bar{g}_2(0) = \bar{g}_3(0) = \dots = 0;$$

$$\bar{g}_1^*(0) = \bar{g}_2^*(0) = \bar{g}_3^*(0) = \dots = 0. \quad (16)$$

Для запису отриманих рівнянь (13) і граничних умов (14)–(16) використано розтягнення змінної σ :

— на лівій межі $\bar{\sigma} \rightarrow 0$:

$$g_0(\sigma) + \varepsilon g_1(\sigma) + \dots = \varepsilon \bar{g}_1(\bar{\sigma}) + \varepsilon^2 \bar{g}_2(\bar{\sigma}) + \dots;$$

— на правій межі $\bar{\sigma}^* \rightarrow 0$:

$$g_0(\sigma) + \varepsilon g_1(\sigma) + \dots = \varepsilon \bar{g}_1^*(\bar{\sigma}^*) + \varepsilon^2 \bar{g}_2^*(\bar{\sigma}^*) + \dots$$

Випускаючи проміжні тотожні перетворення, отримуємо розв'язки за степенями зменшення параметра ε :

$$k_0^2 + (\gamma + 2\sqrt{\alpha q(1 - q)}) k_0 + qW = 0,$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{4\pi^2}{\frac{k_0}{q} - \frac{W}{k_0}} u, \quad k_3 = 2k_2 \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2},$$

де r_1 і r_2 — корені квадратного рівняння:

$$r^2 + 4zr + u = 0. \quad (17)$$

Параметр перетворення z в рівнянні (17) визначався так саме, як і в роботі [17], щоб

$$\operatorname{Re}(r_1) < 0, \quad \operatorname{Re}(r_2) > 0.$$

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Межу області стійкості можна чисельно визначити з умови

$$\operatorname{Re}(k_0) + \varepsilon \operatorname{Re}(k_1) + \varepsilon^2 \operatorname{Re}(k_2) + \varepsilon^3 \operatorname{Re}(k_3) = 0. \quad (18)$$

Уведемо функцію $F(\varepsilon, q, \delta, \gamma, \phi_0, \alpha, k_f, k_n, \dots)$:

$$\begin{aligned} F(\varepsilon, q, \delta, \gamma, \phi_0, \alpha, k_f, k_n, \dots) = \\ = (\operatorname{Re}(k_0) + \varepsilon \operatorname{Re}(k_1) + \varepsilon^2 \operatorname{Re}(k_2) + \varepsilon^3 \operatorname{Re}(k_3) + \varepsilon^4 \operatorname{Re}(k_4) + \dots)^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Пошук точок нейтральної кривої здійснювався розв'язанням задачі нелінійного програмування [22] про пошук мінімуму функції $F(\varepsilon, q, \delta, \gamma, \phi_0, \alpha, k_f, k_n, \dots)$ за умов обмежень у вигляді рівностей

$$k_f = k_f^*; \quad k_n = k_n^*; \dots \quad (20)$$

і обмежень у вигляді нерівностей

$$\begin{aligned} \varepsilon^* \leq \varepsilon \leq \varepsilon^{**}; \quad q^* \leq q \leq q^{**}; \quad \delta^* \leq \delta \leq \delta^{**}; \quad \gamma^* \leq \gamma \leq \gamma^{**}; \\ \phi^* \leq \phi_0 \leq \phi^{**}; \quad \alpha^* \leq \alpha \leq \alpha^{**}. \end{aligned} \quad (21)$$

Покрокове виконання чисельного алгоритму відбувалося таким чином [22].

Крок 1. Фіксувалися значення $q, \delta, \gamma, \phi_0, \alpha, k_f, k_n, \dots$

Крок 2. Параметр ε визначався чисельним розв'язанням задачі пошуку мінімуму функції $F(\varepsilon, q, \delta, \gamma, \phi_0, \alpha, k_f, k_n, \dots)$ (19) для певного діапазону зміни безрозмірного параметра ε ($\varepsilon \in [0.01-0.3]$) таким чином, щоб забезпечити мінімум квадрата нев'язки.

Крок 3. Здійснювався перехід до наступного кроку розрахункової схеми (змінювались визначені величини $q, \delta, \gamma, \phi_0, \alpha, k_f, k_n, \dots$. Інші параметри не змінювали свого початкового значення).

Після цього перехід до кроку 2 алгоритму.

Як впливає з покрокового опису чисельного алгоритму, задачу про багатопараметричний пошук мінімуму функції $F(\varepsilon, q, \delta, \gamma, \phi_0, \alpha, k_f, k_n, \dots)$ (18) з обмеженнями у вигляді рівностей (20) і нерівностей (21) можна звести до послідовного розв'язання набору окремих задач нелінійного програмування [22].

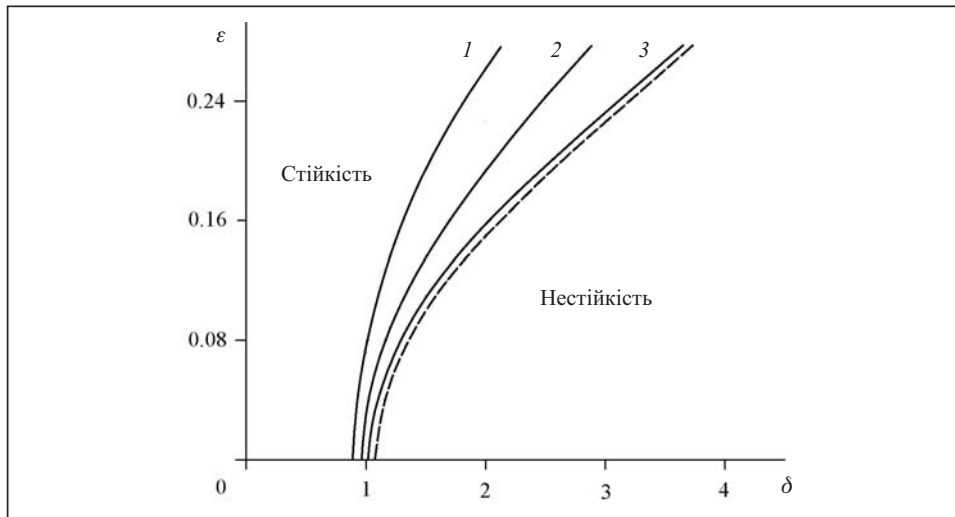


Рис. 2. Вплив приєднаної маси на стійкість РС: $q = 0.4$ (1); $q = 0.7$ (2); $q = 1.0$ (3) (штриховою лінією позначено дані з роботи [17] для $\alpha = 0.02$ та $\gamma = 0.3$)

Таким чином, для розв'язання загальної задачі нелінійного програмування (19)–(21) в просторі змінних $\varepsilon, q, \delta, \gamma, \phi_0, \alpha, k_f, k_n, \dots$ використаний насамперед принцип декомпозиції складної задачі на набір простих задач [21, 22]. Далі був проведений аналіз розв'язання кожної простої задачі. На кінцевому етапі був проведений синтез отриманих окремих результатів для відтворення усього процесу. Вплив приєднаної маси на втрату стійкості РС показано на рис. 2. Для порівняння наведено дані з [17] для $\alpha = 0.02$ та $\gamma = 0.3$ (позначені штриховою лінією).

Однак вплив інших факторів, що визначають втрату стійкості РС унаслідок одночасної залежності параметрів $\varepsilon, \delta, \gamma, \alpha$ від одних і тих самих фізичних змінних, оцінити важко. Зміна однієї фізичної величини, наприклад жорсткості РС, зумовлює одночасну зміну параметрів γ, δ та ε . Тому подальший аналіз проведемо з використанням нових незалежних змінних $\bar{\nu}$ та z^* :

$$\bar{\nu} = \frac{1}{V_0} \sqrt{\frac{T_0}{m + M}}, \quad z^* = \frac{2L}{\pi d} \frac{\rho_1}{\rho_n}, \quad (22)$$

де ρ_1, ρ_n — щільність потоку рідини і РС відповідно.

Величина $\bar{\nu}$ характеризує відносну швидкість поширення поперечних коливань в РС, а параметр z^* — безрозмірну довжину. З урахуванням змінних (22) можна відтворити більш повну картину впливу тих чи інших факторів на втрату стійкості РС. На підставі цього можна отримати рекомендації щодо вибору конструктивних параметрів для забезпечення стабільності РС в зоні нестійких аеропружних коливань (що важливо для безопаткового вітрогенератора [14–16]).

З урахуванням (22) коефіцієнти α, δ та γ запишемо в такий спосіб:

$$\alpha = \frac{1-q}{\bar{\nu}^2} \cos^2 \phi_0; \quad \delta = \frac{\varepsilon q^2 k_n z^*}{2\bar{\nu}^2} \sin 2\phi_0; \quad \gamma = \frac{\varepsilon q \sqrt{q} (k_n \sin \phi_0 + \pi k_f) z^*}{\bar{\nu}}.$$

Чисельний аналіз критерію стійкості (18) був проведений для значень $\phi_0 \in [5, 70]$; $\varepsilon \in [0.01, 0.3]$; $q \in [0.5, 1]$, $\bar{\nu} \in [0.2, 2]$ та $z^* \in [1, 10^3]$, що наведено на рис. 3, 4.

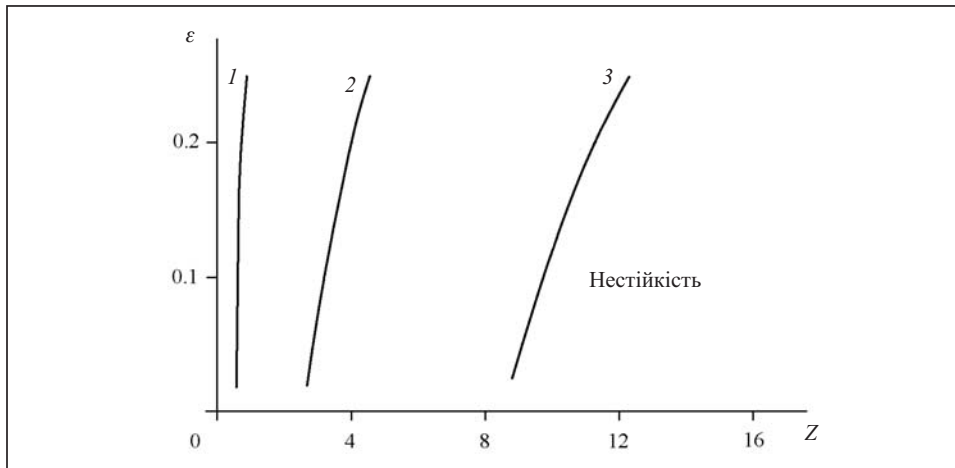


Рис. 3. Вплив відносної довжини РС і відносної швидкості її обтікання потоком на стійкість для малих значень відносної довжини Z : $\bar{v} = 0.2$ (1); $\bar{v} = 0.4$ (2); $\bar{v} = 0.6$ (3)

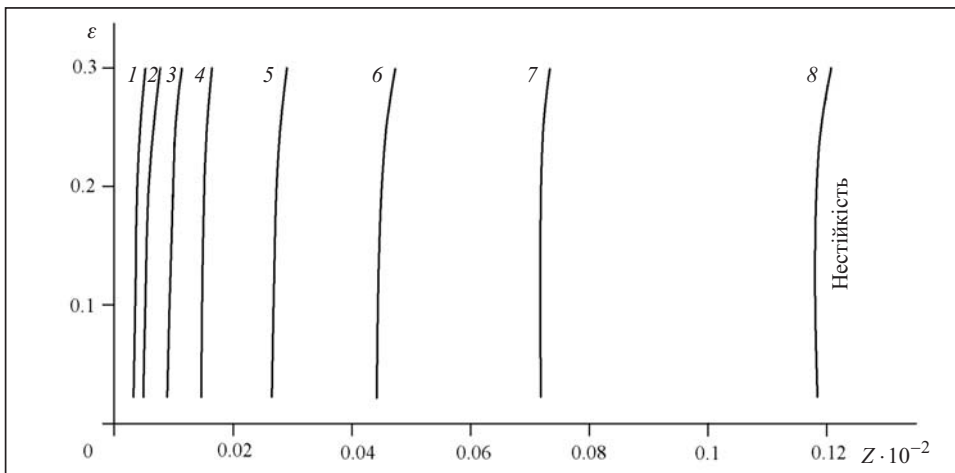


Рис. 4. Вплив відносної довжини РС і відносної швидкості її обтікання потоком на стійкість для великих значень відносної довжини Z : $\bar{v} = 0.4$ (1); $\bar{v} = 0.6$ (2); $\bar{v} = 0.8$ (3); $\bar{v} = 1.0$ (4); $\bar{v} = 1.2$ (5); $\bar{v} = 1.4$ (6); $\bar{v} = 1.6$ (7); $\bar{v} = 1.8$ (8)

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

1. Збільшення приєднаної маси розширює область нестійкості РС (рис. 2); збільшення згинальної жорсткості РС, сили демпфірування і осьового зусилля сприяє її стабілізації (рис. 3, 4).

2. Втрата стійкості РС і еволюція її коливань до флатерного типу зумовлені спільним впливом трьох чинників (відповідно до припущень і гіпотез, які використано для побудови апроксимаційної моделі): знесенням збурень коливань уздовж РС по набігаючому потоку; наявністю малої згинальної жорсткості РС; впливом інерційної сили — розподіленого рухомого навантаження, що діє неперервно вздовж РС (рис. 3, 4).

3. Геометрична конфігурація РС у нестійкій області свідчить про збільшення деформацій і напружень на вільному кінці РС. Це може бути одним з можливих пояснень явища «хлиста», що спостерігається в РС, причиною петлеутворення в РС і виходу їх з ладу. В результаті знакозмінних навантажень еволюція натягу має також хвилеподібний характер і, як наслідок, неперервно генерує попе-

речно-згинально-крутильні хвилі і відповідні їм деформації на краях РС [11, 12, 18].

4. Збільшення погонної маси і відносної довжини РС призводить до розширення області її нестійкості та збільшення ймовірності виникнення аеропружних флатерних коливань. Збільшення натягу в РС і ефективного модуля Юнга РС сприяють зміні області нестійкості і її зрушенню в більш високочастотний діапазон коливань (рис. 3, 4). Зона стійкості на рис. 3, 4 знаходиться ліворуч від наведених кривих, а зона нестійкості — праворуч.

5. Наявність кута нахилу РС до потоку додає особливостей в баланс сил, що діють на РС, і у формування межі областей стійкості і нестійкості. Однак коректно оцінити вплив кута нахилу в розглядуваній моделі неможливо. Це вимагає більш детального вивчення. Зазначимо, що отримані результати для малих кутів нахилу РС до потоку узгоджуються з відомими результатами, отриманими іншими авторами [18].

ВИСНОВКИ

За допомогою асимптотичного методу та чисельного методу нелінійного програмування визначено діапазон параметрів, що призводять до коливань РС за флатерним типом у потоці рідини.

Розглянутий підхід можна застосовувати для визначення конкретних параметрів безлопатевого вітрогенератора, які сприяють виникненню аеропружних коливань за флатерним типом та збільшенню його коефіцієнта корисної дії.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. AN/ALE-50 Towed Decoy System. URL: <https://www.raytheon.com/capabilities/products/ale50>.
2. Mechanical behavior of submarine cable under coupled tension, torsion and compressive loads. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0029801819304470>.
3. Электродинамические связи — «ЭДС». URL: <http://galspace.spb.ru/index116.html>.
4. Chen B., Su F., Huo C., Zhang R., Yao B., Lian L. Numerical investigation of the dynamics for low tension marine cables. *Journal of Shanghai Jiaotong University (Science)*. 2015. Vol. 20, Iss. 3. P. 257–264. <https://doi.org/10.1007/s12204-014-1559-6>.
5. Navrose, Mittal S. Vibrations of a cylinder in a uniform flow in the presence of a no-slip side-wall. *J. Fluid. Struct.* 2015. Vol. 57. P. 185–195. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2015.06.009>.
6. Selezov I.T., Kryvonos Yu.G., Gandzha I.S. Wave propagation and diffraction. *Mathematical methods and applications. Ser. Foundations of Engineering Mechanics*. Springer, 2018. 237 p. <https://doi.org/10.1007/978-981-10-4923-1>.
7. Гладкий А.В., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Численно-аналитические методы исследования волновых процессов. Киев: Наук. думка, 2001. 452 с.
8. Гладкий А.В., Скопецкий В.В. О численном моделировании и оптимизации однонаправленных волновых процессов в неоднородных средах. *Кибернетика и системный анализ*. 2010. № 5. С. 177–186.
9. Губарев В.Ф. Рациональная аппроксимация систем с распределенными параметрами. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. № 2. С. 99–115.
10. Трофимчук А.Н. Сейсмостойкость сооружений с учетом их взаимодействия с грунтовым основанием. Киев: УИИОСР, 2004. 72 с.

11. Païdoussis M.P. (Ed.). Slender structures and axial flow. Ser. Fluid-Structure Interactions, Vol. 1. Elsevier, 1988. 573 p.
12. Païdoussis M.P. (Ed.). Slender structures and axial flow. Ser. Fluid-Structure Interactions, Vol. 2. Elsevier, 2003. P. 573–1585.
13. Sharhaty A.I. Nonlinear and hysteretic twisting effects in ocean cable laying. *Trans. ASME: J. Energy Resource Hehnal.* 1983. Vol. 105, A 3. P. 341–345.
14. The future of wind: RAZOR. URL: https://www.youtube.com/watch?v=B_vg-EM3-18.
15. The Vortex Bladeless wind turbine. URL: <https://www.herox.com/blog/354-the-vortex-bladeless-wind-turbine>.
16. Good vibes: Bladeless turbines could bring wind power into your home: renewable energy. URL: <https://digismak.com/good-vibes-bladeless-turbines-could-bring-wind-power-into-your-home-renewable-energy/>.
17. Спрингс Д., Месситер А., Андерсон В. Парадокс в задаче о флаттере мембраны, — объяснения при помощи методов сингулярных возмущений. *Ракетная техника и космонавтика.* 1969. Т. 7, № 9. С. 52–59.
18. Качурин В.К. Гибкие нити с малыми стрелками. Москва: Гостехиздат, 1956. 224 с.
19. Kaliukh Y.I. Specific features of using the linearization method for the analysis of low-frequency oscillations of a towed system. *International Applied Mechanics.* 2021. Vol. 57, N 1. P. 103–110.
20. Салтанов Н.В. Гибкие нити в потоках. Киев: Наук. думка, 1974. 140 с.
21. Калюх Ю.І., Лебідь О.Г. Щодо побудови адаптивних алгоритмів розрахунку багатохвильових задач. *Кібернетика та системний аналіз.* 2021. Т. 57, № 6. С. 106–117.
22. Kaliukh I., Trofymchuk O., Lebid O. Numerical solution of two-point static problems for distributed extended systems by means of the Nelder–Mead method. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2019. Vol. 55, N 4. P. 616–624. <https://doi.org/10.1007/s10559-019-00170-3>.

I. Kaliukh, O. Lebid

APPLICATION OF ASYMPTOTIC AND NUMERICAL METHODS FOR DETERMINING THE STABILITY BOUNDARIES OF DISTRIBUTED SYSTEMS IN A FLOW

Abstract. The reasons and the set of parameters leading to aeroelastic flutter oscillations in distributed systems (DS) are investigated on the basis of asymptotic and numerical methods. The instability is caused by the combined influence of three factors: the drift of disturbances along the DS along the flow, bending stiffness, and the influence of the inertial force, which is a distributed load moving along the DS. An increase in the tensile force and bending stiffness of the DS shifts the instability to a higher frequency range of vibrations. An increase in the relative flux density and the relative length of the DS expands the region of instability. The presence of the angle of inclination of the DS to the flow introduces peculiarities in the balance of forces acting on the DS, and in the formation of the boundary of the regions of stability and instability. However, it is not possible to correctly assess its influence within the framework of the considered model and requires more detailed further consideration. The configuration of the DS in the unstable region indicates the concentration of stresses near its upper end. The results obtained for small angles of inclination of the DS to the flow agree with the known results of other authors.

Keywords: waves, aeroelasticity, asymptotic methods, flutter, bladeless wind turbine.

Надійшла до редакції 20.09.2021