УДК 004.82.855'24

Є.В. ІВОХІН
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *ivohin@univ.kiev.ua.*

О.В. ОЛЕЦЬКИЙ
Національний університет «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна,
e-mail: *oletsky@ukr.net.*

РЕСТРУКТУРИЗАЦІЯ МОДЕЛІ «СТАН–ІМОВІРНІСТЬ ВИБОРУ» НА ОСНОВІ ВЛАСТИВОСТЕЙ ДОБУТКІВ ПРЯМОКУТНИХ СТОХАСТИЧНИХ МАТРИЦЬ

Анотація. Для аналізу індивідуальної та колективної поведінки агентів запропоновано модель «стан–імовірність вибору», що ґрунтується на розгляді ймовірностей вибору альтернатив та застосуванні марковського ланцюга зміни цих ймовірностей. Розглядається подальший розвиток напрямку, пов'язаного з моделюванням опису ситуації прийняття рішень, який полягає в явному заданні ймовірностей прийняття рішень на основі моделі «стан–імовірність вибору» за умови, що ці ймовірності можуть змінюватися з часом. Запропоновано структуризацію моделі, яка передбачає декомпозицію та формування кластерів станів, що можна змістовно інтерпретувати. Розглянуто дворівневу систему станів, в якій базові стани відповідають конкретним імовірностям прийняття рішень, а стани другого рівня — групам станів. Показано, що декомпозиція суттєво послаблює фактор довільності вибору базових станів. Наведено приклад, де виділено декілька груп станів, серед яких особливу увагу приділено поведінці переконаних прихильників певних альтернатив, а також агентам, що вагаються.

Ключові слова: модель «стан–імовірність вибору», ситуація прийняття рішень, прямокутні стохастичні матриці, динамічна рівновага альтернатив.

ВСТУП

Поняття прямокутної стохастичної матриці уведено в [1–3]. За аналогією до звичайних (квадратних) стохастичних матриць всі елементи таких матриць невід'ємні і сума елементів кожного рядка дорівнює одиниці.

Доцільність розгляду прямокутних стохастичних матриць зумовлена потребою моделювання поведінки агентів, які голосують за ту чи іншу альтернативу з певними ймовірностями, і ці ймовірності можуть змінюватися з часом. Дослідження індивідуальної та колективної поведінки має достатньо довгу історію, але проблема не втрачає актуальності. Тут звернемо увагу на підходи, які залучають до розгляду порівняно прості моделі агентів, що можуть змінювати стани, зокрема в рамках формалізмів на основі теорії автоматів та алгебричних моделей взаємодії агентів з навколишнім середовищем [4]. Ці підходи можна органічно поєднати як з евристичними моделями навчання з підкріпленням [5, 6], так і з математичними методами прийняття рішень на основі нечітких оптимізаційних задач, в яких враховується невизначеність оцінки вибору альтернатив у процесі формалізації обмежень [7].

Дослідження ситуацій, пов'язаних з прийняттям рішень та зміною ймовірностей вибору, потребує побудови більш формалізованих математичних моделей, що може дати низку переваг, зокрема:

- дослідження моделей, які спонукають агента до зміни ймовірностей вибору і відповідно до переходів між станами (особливо це стосується теоретико-ігрового підходу та алгоритмічної теорії ігор; такий напрям відомий під назвою «дизайн механізмів» [8, 9]);

© Є.В. Івохін, О.В. Олецький, 2022

• побудова більш гнучких систем станів і правил переходів між ними, ніж у класичних моделях навчання з підкріпленням [5, 6].

Одна з таких формалізацій, а саме модель «стан–імовірність вибору», в якій елементи прямокутних стохастичних матриць пов'язуються з імовірностями голосувань за окремі альтернативи, запропонована в [1–3]. Для моделювання змін імовірностей вибору введено певну систему станів і розглянуто марковський ланцюг переходів між станами. У цій роботі здійснюється подальша реструктуризація моделі на основі певних властивостей добутків прямокутних стохастичних матриць, що дає змогу чітко виокремити групи станів.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Сформулюємо необхідні визначення, важливі для постановки задачі і відповідно мети дослідження.

Оскільки результати дослідження формулюються на основі елементів прямокутних стохастичних матриць, за допомогою яких обчислюються ймовірності вибору альтернатив, розглядатимемо лише невід'ємні матриці, всі елементи яких не менші за 0 і не більші за 1.

Означення 1. Прямокутною стохастичною матрицею розміром $m \times n$ (коротко — $(m \times n)$-матрицею) називається матриця $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, елементи якої задовольняють такі співвідношення:

$$a_{ij} \geq 0, \ i = \overline{1, m}, \ \ j = \overline{1, n},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1, \ i = \overline{1, m}.$$

Означення 2. Довільна невід'ємна прямокутна матриця $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, називається збалансованою, якщо усі її елементи $a_{ij} \in [0, 1]$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, і суми елементів усіх стовпців рівні між собою.

Означення 3. Прямокутна стохастична $(m \times n)$-матриця $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, називається збалансованою стохастичною матрицею, якщо суми елементів усіх її стовпців рівні між собою.

У роботі [2] доведено твердження, важливе для подальшого викладення.

Твердження 1. Сума елементів кожного стовпчика збалансованої прямокутної стохастичної $(m \times n)$-матриці $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, дорівнює $\frac{m}{n}$ (інакше кажучи, якщо A — збалансована прямокутна стохастична $(m \times n)$-матриця, то $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = \frac{m}{n}$, $j = \overline{1, n}$).

Дійсно, через те що матриця є прямокутною стохастичною, сума елементів кожного рядка дорівнює 1 і відповідно сума всіх елементів матриці дорівнює m. Оскільки для збалансованої матриці суми елементів усіх стовпчиків рівні між собою, сума елементів кожного стовпчика дорівнює $\frac{m}{n}$.

Важливим підкласом збалансованих стохастичних прямокутних матриць, який має місце для $m = n$, є бістохастичні матриці [10], тобто квадратні стохастичні матриці розміром $n \times n$, сума елементів кожного стовпчика яких дорівнює $1 = n / n$.

Опишемо власне модель «стан–імовірність вибору» аналогічно до [3].

Припустимо, що задано n альтернатив a_j, $j = \overline{1, n}$, які визначають варіанти вибору рішення у деякій ситуації. У початковому варіанті моделі «стан–імовірність вибору» постулюється наявність певної кількості базових станів $S = (s_1, \ldots, s_m)$, кожний з яких задає деякий розподіл імовірностей голосування за ту чи іншу альтернативу. Вибір альтернатив здійснюється експертом (агентом) на основі визначення стану моделі, який найкраще відповідає суб'єктивній оцінці агента поточної ситуації.

Модель математично описана в [3] як пара $\langle Z, \Pi \rangle$, де позначено:

- $Z = (z_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, — матриця, що визначає модель «стан–ймовірність вибору», рядки якої відповідають станам (кожний стан задає деякий розподіл імовірностей вибору), а стовпчики — альтернативам; ця матриця вводиться для формалізованого задання ймовірностей вибору альтернатив агентом, що приймає рішення; тут z_{ij} — умовна ймовірність того, що у разі відповідності оцінки ситуації стану s_i агент проголосує за альтернативу a_j, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$;
- $\Pi = (p_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m}$, — матриця перехідних імовірностей для марковського ланцюга переходів між станами; змістовно такі переходи означають зміну міри впевненості агента і відповідно — ймовірностей його індивідуального вибору.

З теорії марковських ланцюгів відомо, що за певних умов існує стаціонарний вектор $p = (p_1, \ldots, p_m)$, де p_i — стаціонарна ймовірність того, що агент у деякий момент часу оцінює стан поточної ситуації як s_i, $i = \overline{1, m}$. Якщо вважати, що вектор p є заданим, замість моделі $\langle Z, \Pi \rangle$ можна розглядати модель $\langle Z, p \rangle$. Тоді повна ймовірність υ_j, $j = \overline{1, n}$, того, що агент проголосує за j-ту альтернативу, дорівнює

$$\upsilon_j = \sum_{i=1}^{m} p_i z_{ij}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{1}$$

або в матричному вигляді

$$\upsilon = pZ.$$

Зауважимо, що для достатньо великої кількості агентів величини υ_j приблизно дорівнюють відношенням кількості агентів, які голосують за j-ту альтернативу, до загальної кількості агентів (проілюстровано в [3] на прикладі). Отже, ймовірності індивідуального вибору та динаміка зміни уподобань агентів, яка моделюється на основі матриці перехідних імовірностей Π, пов'язані з механізмом колективного прийняття рішень більшістю голосів. Але водночас постулюється, що в момент колективного прийняття рішень (голосування) вже встановлено стаціонарний режим і можна визначити вектор стаціонарних імовірностей p (або він задається явно). Детальніше це описано в [3].

У процесі прийняття рішень часто досліджується ситуація динамічної рівноваги, а саме, коли всі альтернативи вибираються з однаковими ймовірностями, тобто

$$\upsilon = (\upsilon_j), \upsilon_j = 1 / n, j = \overline{1, n}. \tag{2}$$

У працях [2, 3] приділено увагу дослідженню проблеми динамічної рівноваги альтернатив, особливо для $n=2$. У цьому разі динамічна рівновага означає, що за кожну альтернативу голосує приблизно однакова кількість виборців і по черзі перемагає то одна, то інша альтернатива. У загальному випадку динамічна рівновага означає, що ймовірність того, що агент проголосує за будь-яку альтернативу, дорівнює $1/n$.

У роботі [11] проілюстровано ситуацію динамічної рівноваги, а також можливі дії агентів впливу, спрямовані на відхід від неї в бажаному для них напрямку (це має забезпечити стійку перевагу однієї альтернативи над іншою). За термінологією [3] вектор $p=(p_1, \ldots, p_m)$, для якого виконується властивість (2), названо рівноважним для матриці Z.

У праці [3] доведено деякі достатні умови динамічної рівноваги для $n=2$ (теорема про симетричне врівноваження). Сутність цих умов зводиться до таких міркувань.

Припустимо, що є m-вектор $p=(p_1, \ldots, p_m)$ такий, що $0 \le p_i \le 1$, $i=\overline{1, m}$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, $\forall i_1 = \overline{1, m}$ $\exists i_2 = m - i_1 + 1$: $p_{i_1} = p_{i_2}$, а матриця $Z=(z_{ij})$, $i=\overline{1, m}$, $j \in \{1, 2\}$, — збалансована прямокутна стохастична $(m \times 2)$-матриця така, що

$$\forall j \in \{1, 2\} \quad \forall i_1 = \overline{1, m}, i_2 = m - i_1 + 1: \; z_{i_1 j} = 1 - z_{i_2 j}. \tag{3}$$

Тоді справедливою є рівність $\sum_{i=1}^{m} p_i z_{ij} = 0.5$, $j \in \{1, 2\}$. У цьому разі суттєво використовується принцип симетрії.

Проілюструємо ці визначення на прикладі, наведеному в [3]. Нехай матриця Z має вигляд

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.9 & 0.1 \\ 0.75 & 0.25 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.25 & 0.75 \\ 0.1 & 0.9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а вектор p = (0.03, 0.12, 0.25, 0.05, 0.1, 0.05, 0.25, 0.12, 0.03). Можна переконатися, що $v_1 = v_2 = 1/2$.

Але вибір станів, які задаються матрицею Z, є значною мірою довільним. Ні їхня кількість, ні конкретні значення ймовірностей, що описуються цими станами, не мають вирішального значення. У деякому наближенні стовпці матриці Z можна розглядати як набори дискретних значень із проміжку $[0, 1]$. Важливішим є те, що в описаній моделі матриця Z не відображає того, що можуть існувати групи агентів, які мають різні уподобання.

З огляду на це постановку задачі, що розглядається у статті, можна сформулювати так:

• запропонувати методику реструктуризації моделі, яка полягає в переході від початкової системи станів, що задається матрицею Z, до деякої агрегованої системи станів, яка б враховувала неоднорідність агентів;

• встановити умови динамічної рівноваги альтернатив для реструктурованої моделі.

РЕСТРУКТУРИЗАЦІЯ МОДЕЛІ «СТАН–ІМОВІРНІСТЬ ВИБОРУ» НА ОСНОВІ ГРУПУВАННЯ ТА АГРЕГАЦІЇ

Один із підходів до реструктуризації моделі «стан–імовірність вибору» ґрунтується на послідовному ієрархічному групуванні множини станів S. Процедуру реструктуризації формально запишемо у вигляді

$$S = < S^1, \ldots, S^K, R_{ij} >, \;\; i = \overline{2, K}, \;\; j = i-1, \tag{4}$$

де S^i — рівні ієрархії, R_{ij} — зв'язок між i-м та j-м рівнями, $i = \overline{2, K}$, $j = i-1$.

Проведемо декомпозицію параметрів моделі на основі наведених вище властивостей добутків прямокутних стохастичних матриць.

Нехай $S^1 = (s_1^1, \ldots, s_m^1)$ — набір станів базового рівня, що відповідає початковому набору станів: кожний базовий стан відповідає певному розподілу ймовірностей, з якими агент голосує за різні альтернативи, m — кількість станів. Для його опису, як було визначено вище, використовується матриця «стан–імовірність дії» Z.

Побудова системи агрегованих станів у межах дослідження здійснюється на основі явного виділення приблизно однорідних груп агентів u_i, $i = \overline{1, q}$, за деякою системою ознак, де q — кількість груп (кластерів), $q < m$. Система агрегованих станів $S^2 = (s_1^2, \ldots, s_q^2)$ пов'язується з поділом на кластери. Оцінка ситуації агентом відповідає стану s_i^2, якщо цей стан агрегує всі варіанти початкових станів із групи u_i, $i = \overline{1, q}$. У такому разі є сенс розглядати також марковський ланцюг із матрицею перехідних імовірностей Π^2, який описує ймовірності можливих переходів між групами. Процес агрегації та групування можна розглядати й надалі, отримуючи нові кластери рівня $i = \overline{2, K}$.

Вважатимемо, що розглядається довільний рівень ієрархії групування. Для наявного набору кластерів цього рівня покладемо: y_{ik} — ймовірність того, що оцінка агента відповідає стану s_k за умови перебування агента в групі u_i. Тоді ймовірність h_{ij} того, що він проголосує за j-ту альтернативу, $j = \overline{1, n}$, на основі станів групи u_i, за правилом повної ймовірності дорівнює

$$h_{ij} = \sum_k P(a_j \mid s_k) P(s_k \mid u_i) = \sum_k y_{ik} z_{kj},$$

або в матричному вигляді

$$H = YZ. \tag{5}$$

Назвемо матрицю Z базовою матрицею станів, а матрицю Y — кластерною матрицею станів (базовою та кластерною матрицею). Матрицю H називатимемо агрегованою матрицею.

Можна говорити про стаціонарні ймовірності відповідності оцінок агентів станам у групах: позначимо стаціонарну ймовірність того, що оцінка агента відповідає *i*-й групі, через r_i, тоді $v = rH$.

Отже, можна конкретизувати зміст моделі (4) та виділити рівні станів і зв'язки між ними. В отриманій інтерпретації базові стани (система станів S^1), як і раніше, задаються матрицею Z. Групи (кластери) станів відповідають новим станам системи S^d, $d \geq 2$. Компонента $R_{d,d-1}$ (зв'язки між станами різних рівнів) описується кластерною матрицею Y.

Така реструктуризація має суттєве значення для моделювання процесів прийняття рішень на основі як індивідуального, так і колективного вибору альтернатив. Застосування моделі суттєво спирається або на можливість задання стаціонарних імовірностей станів у явному вигляді, або, що важливіше, на можливість задання перехідних імовірностей між станами, оскільки саме ці перехідні ймовірності моделюють одну з ключових характеристик моделі — зміну суб'єктивних оцінок агентів. У рамках базової системи станів, що задається матрицею Z, це видається проблематичним, оскільки стани в цій системі часто є незрозумілими та довільно вибраними. Агрегація дозволяє побудову матриць перехідних імовірностей вже між виокремленими кластерами, що можуть мати змістовну інтерпретацію (нижче наведений відповідний приклад). Крім того, множина агрегованих станів кожного наступного рівня та перехідна матриця ймовірностей переходів між цими станами стають суттєво компактнішими.

У рамках зазначеної методики процедура отримання агрегованих станів ґрунтується на матричних добутках, що описуються формулою (5). З огляду на це важливим є дослідження властивостей цих добутків, зокрема питання, чи буде агрегована матриця H, отримана за формулою (5), прямокутною стохастичною та збалансованою.

ДОБУТКИ ПРЯМОКУТНИХ СТОХАСТИЧНИХ ТА ЗБАЛАНСОВАНИХ МАТРИЦЬ

Теорема 1. Якщо $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, r}$, та $B = (b_{ij})$, $i = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, n}$, — прямокутні стохастичні матриці розміром $m \times r$ та $r \times n$ відповідно, то їхній добуток $C = AB$ — прямокутна стохастична матриця розміром $m \times n$.

Доведення. Всі елементи матриці $C = (c_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, є невід'ємними. Тому достатньо довести, що сума елементів кожного рядка дорівнює одиниці.

Кожний елемент матриці C за визначенням матричного добутку дорівнює

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}, \quad i = \overline{1, m}, \; j = \overline{1, n}.$$

Знайдемо суми елементів кожного рядка:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} \sum_{j=1}^{n} b_{kj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} = 1, \quad i = \overline{1, m}.$$

Теорему доведено.

Теорема 2. Якщо $A=(a_{ij}),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,r},$ — збалансована $m\times r$-матриця, сума елементів кожного стовпчика якої дорівнює u, $B=(b_{ij}),\ i=\overline{1,r},\ j=\overline{1,n},$ — збалансована $r\times n$-матриця, сума елементів кожного стовпчика якої дорівнює v, то їхній добуток $C=AB$ — збалансована $m\times n$-матриця, сума елементів кожного стовпчика якої дорівнює uv.

Доведення аналогічне до доведення теореми 1. Дійсно, знайдемо суму елементів кожного стовпчика матриці C:

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{r} b_{kj}\sum_{i=1}^{m} a_{ik}=u\sum_{k=1}^{r} b_{kj}=uv,\quad i=\overline{1,m}.$$

Теорему доведено.

Теорема 3. Якщо $A=(a_{ij}),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,r},$ — збалансована прямокутна стохастична $(m\times n)$-матриця, то $A'A$ і AA' — збалансовані матриці, суми елементів кожного рядка та кожного стовпчика яких дорівнюють $\dfrac{m}{n}$.

Доведення. Оскільки A — збалансована прямокутна стохастична матриця, транспонована матриця A' збалансована, сума елементів кожного стовпчика дорівнює 1. Сума елементів кожного стовпчика матриці A дорівнює $\dfrac{m}{n}$ відповідно до твердження 1. Отже, за теоремою 2 сума елементів кожного стовпчика матриць $A'A$ та AA' дорівнює $\dfrac{m}{n}$.

Знайдемо суму елементів кожного рядка. Для AA' ці суми обчислюються за формулою

$$\sum_{j}\sum_{k} a_{ik}a_{jk}=\sum_{k} a_{ik}\sum_{j} a_{jk}=\frac{m}{n}\sum_{k} a_{ik}=\frac{m}{n}\,.$$

Для $A'A$ доведення проводиться аналогічно.

Теорему доведено.

Наслідок 1. У результаті множення матриць $A'A$ або AA' на величину $\dfrac{n}{m}$ за теоремою 3 утворюються бістохастичні матриці.

Матриця Y не обов'язково має бути збалансованою. До того ж, для різних кластерів характерні різні ймовірності вибору, і вимога рівностей сум цих імовірностей по стовпчиках не має сенсу. Однак можна показати, що добуток двох матриць може бути збалансованою прямокутною стохастичною матрицею і за дещо послаблених умов.

СИМЕТРИЧНА ЗБАЛАНСОВАНІСТЬ ТА ДИНАМІЧНА РІВНОВАГА ДВОХ АЛЬТЕРНАТИВ

Означення 4. Прямокутну стохастичну $(m\times n)$-матрицю $A=(a_{ij})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, називатимемо симетрично збалансованою, якщо суми елементів кожного її стовпчика утворюють симетричний вектор, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}=\sum_{i=1}^{m} a_{i,\,n-j+1},\ j=\overline{1,n}.$$

Матриця Z має бути збалансованою прямокутною стохастичною $(m \times 2)$-матрицею та задовольняти умову (3). У роботі [3] запропонований конструктивний алгоритм отримання таких матриць.

Вважатимемо, що m непарне і існує центральний індекс $c = [m/2] + 1$, для якого

$$z_{c1} = z_{c2} = 0.5.$$

Додаткова вимога щодо непарності m носить технічний характер і, по суті, не зменшує загальності розгляду. Тоді схема формування матриці Z спрощується і набуває такого вигляду:

— задається вектор $u = (u_1, \ldots, u_L)$, при цьому $0 < u_i < 1$, $i = \overline{1, L}$, $m = 2L + 1$; цей вектор можна змістовно інтерпретувати як деякий набір типових імовірностей вибору альтернативи;

— елементи матриці Z отримуються за правилами:

• для першого та останнього рядків

$$z_{11} = z_{m2} = 0; \ z_{12} = z_{m1} = 1;$$

$$z_{c1} = z_{c2} = 0.5; \ c = L + 1 = [m/2] + 1;$$

• для всіх інших рядків

$$z_{i1} = u_1; \ z_{i2} = 1 - z_{i1}, \ i = 2, \ldots, [m/2], \tag{6}$$

$$z_{i1} = 1 - u_{m-i+1}; \ z_{i2} = 1 - z_{i1} = u_{m-i+1}, \ i = [m/2] + 2, \ldots, m-1.$$

Теорема 4. Якщо матриця $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, q}$, є симетрично збалансованою прямокутною стохастичною $(m \times q)$-матрицею, а $B = (b_{ij})$, $i = \overline{1, q}$, $j = \overline{1, n}$, — збалансованою прямокутною стохастичною $(q \times n)$-матрицею, для якої виконується умова (3), то для $n = 2$ їхній добуток $C = AB$ є прямокутною стохастичною збалансованою $(m \times n)$-матрицею, сума елементів кожного стовпчика якої дорівнює $\frac{m}{n}$.

Доведення. Кожний елемент матриці $C = (c_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, обчислюється як

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}, \ i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n}.$$

Тоді для кожного j-го стовпчика сума його елементів дорівнює

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^{m} c_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{q} b_{kj} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} = \sum_{k=1}^{q} r_k b_{kj},$$

де $r_k = \sum_{i=1}^{m} a_{ik}$.

Вектор $r = (r_1, \ldots, r_q)$ є симетричним за умовою теореми.

Таким чином, вектор r та матриця B задовольняють умови теореми про симетричне врівноваження. Звідси випливає, що всі суми стовпців σ_j рівні між собою, тобто матриця C є збалансованою. Відповідно до теореми 1 вона є прямокутною стохастичною матрицею, а відповідно до твердження 1 сума елементів кожного стовпчика дорівнює $\frac{m}{n}$.

Теорему доведено.

Отже, визначено орієнтири для досягнення динамічної рівноваги стосовно реструктурованої моделі для двох альтернатив ($n=2$). Але навіть якщо отримано збалансовану матрицю $H = YZ$, для динамічної рівноваги потрібно виконати важливу умову (3). У наведеному далі прикладі Y підібрано так, щоб ця умова виконувалася.

ІЛЮСТРАТИВНИЙ ПРИКЛАД

Наведемо приклад, який демонструє отримані результати.

Припустимо, що вектор $u = (0.25;\ 0.4)$ на основі наведеної схеми (6) породжує матрицю

$$Z = \begin{pmatrix} 0.0 & 1.0 \\ 0.25 & 0.75 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.75 & 0.25 \\ 1.0 & 0.0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Реструктуризуємо цю матрицю на основі методики, описаної у статті, і перейдемо до нової агрегованої матриці.

Вважаємо, що виділено три групи, тобто $q=3$. Будемо змістовно інтерпретувати їх таким чином:

- перша група — переконані прихильники альтернативи A;
- друга група — проміжний кластер з нестійкими уподобаннями;
- третя група — переконані прихильники альтернативи B.

Нехай матриця Y має вигляд

$$Y = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Тоді агрегована матриця $H = YZ$ матиме вигляд

$$H = \begin{pmatrix} 0.1150 & 0.8850 \\ 0.5000 & 0.5000 \\ 0.8850 & 0.1150 \end{pmatrix}.$$

Легко переконатися, що сума елементів кожного рядка цієї матриці дорівнює 1, а сума елементів кожного стовпчика дорівнює 1.5, тобто вона справді є збалансованою прямокутною стохастичною матрицею.

Нехай перехідна матриця ймовірностей переходів між групами дорівнює

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Тоді стаціонарний вектор імовірностей перебування агентів у кожній групі (головний лівий власний вектор перехідної матриці) дорівнює (0.2778; 0.4444; 0.2778).

Ця матриця спеціально підібрана як центрально-симетрична, щоб отримати симетричний головний лівий власний вектор стаціонарних імовірностей.

За таких умов цей вектор має бути рівноважним для матриці H. Дійсно, в прикладі отримуємо розподіл імовірностей (0.5000; 0.5000).

Зазначимо також, що умова (3) є суттєвою, однієї лише збалансованості матриці Z недостатньо. Наприклад, для матриці

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 1.0 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.25 & 0.75 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.75 & 0.25 \\ 1.0 & 0.0 \end{pmatrix},$$

що утворюється з (7) переставленням 2-го та 3-го рядків, отримаємо розподіл імовірностей (0.4950; 0.5050), тобто динамічна рівновага не забезпечуватиметься.

ВИСНОВКИ

У роботі розвинений напрямок, пов'язаний з моделюванням опису ситуації прийняття рішень, який полягає в заданні ймовірностей прийняття рішень на основі моделі «стан–імовірність вибору» [1–3] за умови, що ці ймовірності можуть змінюватися з часом. Запропоновано реструктуризацію моделі на основі декомпозиції, що полягає в явному введенні кластерів (груп) станів, яким можна надати змістовну інтерпретацію. Розглянуто дворівневу систему станів, у якій базові стани відповідають конкретним імовірностям прийняття рішень, а стани другого рівня — групам станів. Запропоновано методику побудови агрегованої матриці станів. Показано, за яких умов отримана агрегована матриця буде збалансованою прямокутною стохастичною матрицею. На цій основі досліджено питання про динамічну рівновагу двох альтернатив у межах реструктурованої моделі.

Проілюстровано, що декомпозиція на основі (5) суттєво послаблює фактор довільності вибору базових станів. Наведено приклад, у якому виділено кілька груп станів, а саме: переконані прихильники певних альтернатив, а також агенти, що вагаються.

Природно розглянути нечіткі величини, що описують, якою мірою ті чи інші ймовірності вибору є типовими для певних груп станів. Тому подальший розвиток може бути пов'язаний з дослідженням властивостей різних типів нечітких чисел [12], а також із застосуванням нечітко-ймовірносного підходу [13].

Для структурованої дворівневої моделі «стан–імовірність вибору» встановлено достатні умови досягнення динамічної рівноваги у процесі вибору з двох альтернатив.

Перспективним видається напрямок подальшої структуризації моделі з урахуванням критеріїв, за якими здійснюється вибір, а також того, що й оцінки за окремими критеріями, й ваги критеріїв можуть змінюватися з часом. На цьому шляху видається доцільним використання методів багатокритерійного вибору та багатокритерійної оптимізації, насамперед методу аналізу ієрархій [14–16 та ін].

Інший напрямок досліджень — моделювання змін уподобань агентів у результаті інформаційних впливів, що інтенсивно розвивається [17]. Агенти впливу можуть докладати певних зусиль, щоб схилити агентів, які голосують, на свій бік. У цьому контексті варто звернути увагу на роботи [18, 19], де описується система підтримки прийняття рішень на основі методу аналізу ієрархій, важливим компонентом якої є підсистема вироблення рекомендацій, спрямованих на підвищення рангу тієї чи іншої альтернативи. При цьому можуть ставитися оптимізаційні задачі мінімізації зусиль агентів впливу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Олецький О.В. Про підхід до моделювання процесу прийняття рішень у багатоагентному середовищі на основі марковського процесу зміни ймовірностей вибору. *Наук. зап. НаУКМА. Комп'ютерні науки.* 2018. Т. 1. С. 40–43.
2. Олецький О.В. Про деякі необхідні та достатні умови рівноймовірного вибору альтернатив у рамках марковського ланцюга зміни ймовірностей вибору. *Наук. зап. НаУКМА. Комп'ютерні науки.* 2019. Т. 2. С. 4–9.
3. Oletsky O.V., Ivohin E.V. Formalizing the procedure for the formation of a dynamic equilibrium of alternatives in a multi-agent environment in decision-making by majority of votes. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2021. Vol. 57, N 1. P. 47–56. https://doi.org/10.1007/s10559-021-00328-y.
4. Летичевский А.А. Алгебраическая теория взаимодействия и кибер-физические системы. *Проблемы управления и информатики.* 2017. № 5. С. 37–55.
5. Рассел С., Норвиг П. Искусственный интеллект: современный подход. Москва: Изд. дом «Вильямс», 2006. 1408 с.
6. Николенко С.И., Тулупьев А.Л. Самообучающиеся системы. Москва: МЦНМО, 2009. 288 с.
7. Mashchenko S.O. A mathematical programming problem with the fuzzy set of indices of constraints. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2013. Vol. 49, N 1. P. 62–68. https://doi.org/10.1007/s10559-013-9485-4.
8. Borgers T., Krahmer D., Strausz R. An introduction to the theory of mechanism design. Oxford: Oxford Univ. Press, 2015.
9. Roughgarden T. Twenty lectures on algorithmic game theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2016.
10. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. Москва: Мир, 1989. 655 с.
11. Oletsky O. Exploring dynamic equilibrium of alternatives on the base of rectangular stochastic matrices. *CEUR Workshop Proc.* 2021. Vol. 2917. P. 151–160. http://ceur-ws.org/Vol-2917/.
12. Ivokhin E.V., Apanasenko D.V. Clustering of composite fuzzy numbers aggregate based on sets of scalar and vector levels. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. Vol. 50, N 10. P. 47–59. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i10.40.
13. Провотар О.І., Провотар О.О. Нечіткі ймовірності нечітких подій. *Кибернетика и системный анализ.* 2020. Т. 56, № 2. С. 3–13.
14. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. Москва: Радио и связь, 1993. 278 с.

15. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 416 с.

16. Саати Т.Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях. Аналитические сети. Москва: ЛКИ, 2008. 360 с.

17. Ивохин Е.В., Науменко Ю.А. О формализации процессов распространения информации на основе гибридных моделей диффузии. *Проблемы управления и информатики.* 2018. № 4. С. 120–127.

18. Tryhub O.S., Tryhub R.O., Gorborukov V. Researching semistructured problems of multicriteria optimization using the software system. *Наук. зап. НаУКМА.* 2013. Т. 151: Комп'ютерні науки. С. 79–88.

19. Олецький О.В., Тригуб О.С. Про застосування методу аналізу ієрархій для автоматизованого оцінювання студентських робіт. *Наук. зап. НаУКМА. Комп'ютерні науки.* 2020. Т. 3. С. 127–131. https://doi.org/10.18523/2617-3808.2020.3.127-131.

E.V. Ivokhin, O.V. Oletsky

RE-STRUCTURING OF THE MODEL "STATE–PROBABILITY OF CHOICE" BASED ON PRODUCTS OF STOCHASTIC RECTANGULAR MATRICES

Abstract. To analyze the individual and collective behavior of agents, a "state–probability of choice" model is proposed, based on considering the probabilities of choosing alternatives and using the Markov chain of changes in these probabilities. Further development of the direction associated with modeling the description of the decision-making situation is proposed, which consists in explicitly setting the probabilities of decision-making based on the "state–probability of choice" model, provided that these probabilities can change over time. The proposed structuring of the model based on decomposition consists in the formation of the introduction of clusters of states, which can be provided with meaningful interpretation. The paper considers a two-level system of states, in which the base states correspond to specific probabilities of decision-making, and the states of the second level correspond to groups of states. It is shown that decomposition significantly weakens the factor related to the arbitrariness of the choice of base states. An example is given in which several groups of states are clearly distinguished, among which special attention is paid to the behavior of convinced supporters of certain alternatives, as well as to agents who hesitate.

Keywords: model "state–probability of choice," situation of decision-making, rectangular stochastic matrix, dynamic equilibrium of alternatives..

Надійшла до редакції 22.06.2021