УДК 519.8

Ю.І. ХАРКЕВИЧ

Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна,
e-mail: *kharkevich.juriy@gmail.com.*

ПРО ДЕЯКІ АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ БІГАРМОНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Анотація. Розглянуто застосування методів теорії наближення до принципів оптимальності в теорії прийняття рішень. Часто функція ризику в процесі відшукання оптимальних рішень має досить складну структуру для вивчення її властивостей, тому виникає потреба наблизити функцію ризиків до іншої функції з простими та зрозумілими характеристиками. Досліджено асимптотичні властивості розв'язків бігармонійних рівнянь як функцій наближення. Отримано повні асимптотичні розклади верхніх меж відхилень функцій класу Соболєва W^2 (це множина, якій належать функції ризику в процесі оптимізації прийняття рішень) від операторів, що є розв'язками бігармонійних рівнянь із певними крайовими умовами. Отримані розклади дають змогу відшукати константи Колмогорова–Нікольського як завгодно високого степеня малості, завдяки чому можна оцінювати похибку наближення під час розв'язування оптимізаційних задач із довільною точністю. Зазначено, що за допомогою бігармонійних рівнянь можна ефективно будувати математичні моделі природничих та соціальних явищ.

Ключові слова: похибка наближення, оптимізаційні властивості функцій, бігармонійні рівняння, повні асимптотичні розклади, класи Соболєва.

ВСТУП

Ще на початку XX століття було започатковано насправді революційні зміни в математичній науці, зокрема, активно поширювалась ідея про узагальнення розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними. З одного боку, необхідність у розширенні класів функцій виникає у багатовимірних варіаційних задачах, а з іншого, — в процесі дослідження хвильового рівняння і рівнянь гідродинаміки. У цих задачах класів неперервних функцій було недостатньо.

С.Л. Соболєв ввів узагальнені розв'язки основних видів лінійних рівнянь з частинними похідними другого порядку з класів функцій, які потім були названі просторами Соболєва. Останні мають принципове значення не лише у теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, але й у варіаційних задачах, теорії функцій, теорії наближень, методах обчислення, теорії керування та багатьох інших розділах аналізу.

Зазвичай математична модель оптимізаційної задачі складається з декількох незалежних математичних об'єктів: рівняння стану, обмеження на стан системи керування, функціонал якості. Також важливим є те, що кожна з цих складових залежить від області, на якій вивчається об'єкт керування. Отже, якщо область якимось способом змінюється, то маємо абсолютно іншу задачу оптимального керування, можливо, з іншими обмеженнями, функціоналом якості і крайовою задачею.

Неможливо недооцінювати прикладне значення таких задач для керування процесами та забезпечення стійкості в задачах індустріальної інформатики, керування виробничими процесами [1–3] тощо. Наприклад, схожу техніку використовують у дослідженнях диференціальних ігор, коли певним способом задають умови та особливості керованих конфліктів [4, 5], умови для завершення гри в конфліктно-керваних процесах [6, 7].

Використання сучасних ідей і методів теорії оптимальних рішень сприяє її проникненню в найрізноманітніші області прикладних досліджень [8]. Так, значну кількість різного роду природничих і соціальних процесів найоптимальніше описують за допомогою диференціальних рівнянь у частинних похідних еліптичного типу [9–13]. Одним із важливих частинних випадків рівнянь такого типу є бігармонійні рівняння [14–16].

Різноманітні застосування крайових задач для бігармонійних рівнянь як у математичному моделюванні, так і в теорії ігрових задач динаміки [17, 18], стимулюють подальші дослідження в цій області знань. Вивчення асимптотичної поведінки розв'язків бігармонійних рівнянь з певними крайовими умовами дасть змогу точніше вивчати реальні процеси. Запропонована робота присвячена питанням застосування методів теорії наближення до принципів оптимальності в теорії прийняття рішень.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Позначимо C простір неперервних 2π-періодичних функцій, у якому норма елемента задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$.

Розглянемо в одиничному крузі крайову задачу для рівняння

$$\Delta(\Delta U) = 0, \tag{1}$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ — оператор Лапласа [19] у полярних координатах.

Якщо $f(x)$ — сумовна 2π-періодична функція, то розв'язком рівняння (1), що задовольняє крайові умови

$$U(\rho, x)\Big|_{p=1} f(x), \ \left.\frac{\partial U(\rho, x)}{\partial\rho}\right|_{\rho=1} = 0, \ -\pi \le x \le \pi, \tag{2}$$

буде величина

$$U_\rho(f, x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{k}{2}(1-\rho^2)\right)\rho^k \cos kt\right\} dt, \ 0< p< 0, \tag{3}$$

яку прийнято називати бігармонійним інтегралом Пуассона функції f (див., наприклад, [20, 21]). Поклавши в (3) $\rho = e^{-\beta}$, $\beta > 0$, згідно з [22] бігармонійний інтеграл Пуассона (3) запишемо у вигляді

$$U_\beta(f, x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{k}{2}(1-e^{-2\beta})\right)e^{-k\beta} \cos kt\right\} dt, \ \beta > 0. \tag{4}$$

Як загально прийнято, класом функцій Соболєва W^r називатимемо множину 2π-періодичних функцій, які мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го порядку включно і $|f^{(r)}(x)| \le 1$.

Позначимо згідно з [23, с. 198]

$$\varepsilon(W^r, U_\beta)_C = \sup_{f \in W^r}\left\| f(\cdot) - U_\beta(f, \cdot)\right\|_C. \tag{5}$$

Якщо в явному вигляді знайдемо функцію $\varphi(\beta)$ таку, що для $\beta \to 0$ має місце асимптотична рівність $\varepsilon(W^r, U_\beta)_C = \varphi(\beta) + o(\varphi(\beta))$, то наслідуючи О.І. Степанця [23, с. 198], будемо говорити, що розв'язано задачу Колмогорова–Нікольського для класу функцій Соболєва W^r і розв'язку задачі (1), (2) $U_\beta(f, x)$, заданого за допомогою співвідношення (4), у рівномірній метриці.

Формальний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} h_n(\beta)$ називатимемо повним асимптотичним розкладом або повною асимптотикою функції $f(\beta)$ для $\beta \to 0$ (див., наприклад, [24, 25]), якщо для всіх $n \in N$ $|h_{n+1}(\beta)| = o(|h_n(\beta)|)$ і за будь-якого $m \in N$ $f(\beta) = \sum_{n=0}^{m} h_n(\beta) + o(h_m(\beta))$, $\beta \to 0$. Коротко це записують так: $f(\beta) \cong \sum_{n=0}^{\infty} h_n(\beta)$.

Бігармонійний інтеграл Пуассона як ров'язок бігармонійного рівняння (1) з початковими умовами (2) є додатним лінійним оператором і тому згідно з [26] його найкращі асимптотичні властивості досягаються саме на класі функцій Соболєва W^2. Тож основною метою запропонованої роботи є розв'язання задачі Колмогорова–Нікольського для величини (5) для отримання асимптотичної поведінки розв'язків задачі (1), (2) на класах функцій Соболєва W^2 у рівномірній метриці.

ОСНОВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ РОБОТИ

Теорема 1. Якщо $(g(t))_{2\pi}$ — парне 2π-періодичне продовження функції

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2}, & 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\pi^2}{4} - \dfrac{(\pi - t)^2}{2}, & \dfrac{\pi}{2} \le t \le \pi, \end{cases}$$

то для $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ буде виконуватись рівність

$$\varepsilon(W^2, U_\beta)_C = \frac{2}{\pi}\beta\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\beta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{(g(t))_{2\pi}}{t^2} dt\right\} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{2^{2k}}{(2k+1)\pi^{2k+1}} - \right.$$

$$\left. - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{(g(t))_{2\pi}}{t^{2k+1}} dt \right]\beta^{2k+2} + \frac{1}{\pi}(1 - e^{-2\beta})\left[\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k}\left\{\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi(2k+1)}\beta^2\right\}\beta^{2k} + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{2}\beta - \frac{\pi}{2}\right] - \frac{1}{\pi}(1 - e^{-2\beta})\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left\{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\left(\frac{(g(t))_{2\pi}}{t}\right)' \frac{dt}{t^{2k}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{(g(t))_{2\pi}}{t^{2k+2}} dt\right\}\beta^{2k}. \quad (6)$$

Доведення. Із означення метрики C і співвідношення (5) випливає, що

$$\varepsilon(W^2;U_\beta)_C = \sup_{f\in W^2}\left\| f(x)-U_\beta(f;x)\right\|_C =$$

$$= \sup_{f\in W^2}\max_{-\pi\le t\le\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1+\frac{k}{2}(1-e^{-2\beta})\right)\right)e^{-k\beta}\cos kt\,dt\right|. \quad (7)$$

Враховуючи розклад функції $f\in W^2$ в ряд Фур'є та методи з [27], із співвідношення (7) отримуємо

$$\varepsilon(W^2;U_\beta)_C =$$

$$=\frac{1}{\pi}\sup_{f\in W^2}\max_{-\pi\le t\le\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f^{(2)}(t+x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\left(1+\frac{k}{2}(1-e^{-2\beta})\right)}{k^2}e^{-k\beta}\cos(kt+\pi)dt\right| =$$

$$=\frac{4}{\pi}\left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\left(1+\frac{k}{2}(1-e^{-2\beta})\right)}{k^2}e^{-k\beta}\cos kt\,dt\right|. \quad (8)$$

Можна показати, що для функції

$Q(\beta;t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\left(1+\frac{k}{2}(1-e^{-2\beta})\right)}{k^2}e^{-k\beta}\cos(kt+\pi)$ для всіх $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ знак різниці $Q(\beta;t)-Q(\beta;\frac{\pi}{2})$ буде збігатися зі знаком $\pm\cos t$. Тож очевидно із (8) випливатиме, що

$$\varepsilon(W^2;U_\beta)_C = \frac{2}{\pi}\left|\int_{0}^{\pi} g_0(t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\left(1+\frac{k}{2}(1-e^{-2\beta})\right)}{k^2}e^{-k\beta}\cos kt\,dt\right|, \quad (9)$$

де $g_0(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le\frac{\pi}{2},\\ -1, & \frac{\pi}{2}\le t\le\pi.\end{cases}$.

Інтегруючи частинами інтеграл з правої частини (9) і підбираючи до того ж сталі інтегрування таким чином, щоб інтегральні члени [22, с. 175] перетворювалися в нуль, маємо

$$\varepsilon(W^2;U_\beta)_C = \frac{2}{\pi}\left|\int_{0}^{\pi} g(t)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{2}(1-e^{-2\beta})\right)e^{-k\beta}\cos kt\,dt\right\}\right|, \quad (10)$$

$$g(t)=\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} g_0(t_2)\,dt_2 = \begin{cases}\frac{t^2}{2}, & 0\le t<\frac{\pi}{2},\\ \frac{\pi^2}{4}-\frac{(\pi-t)^2}{2}, & \frac{\pi}{2}\le t\le\pi.\end{cases} \quad (11)$$

Далі, використовуючи методи з [22, 28], можна показати справедливість рівності

$$\varepsilon(W^2;U_\beta)_C = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (g(t))_{2\pi}\left(\frac{\beta}{\beta^2+t^2} + \frac{1-e^{-2\beta}}{2}\cdot\frac{\beta^2-t^2}{(\beta^2+t^2)^2}\right)dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (g(t))_{2\pi}\frac{\beta}{\beta^2+t^2}dt + \frac{1-e^{-2\beta}}{\pi}\int_0^\infty (g(t))_{2\pi}\frac{\beta^2-t^2}{(\beta^2+t^2)^2}dt = I_1 + I_2. \quad (12)$$

Переходячи до обчислення першого доданку із правої частини (12), із співвідношення (11) отримуємо

$$I_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (g(t))_{2\pi}\frac{\beta}{\beta^2+t^2}dt = \frac{1}{\pi}\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^2}{\beta^2+t^2}dt +$$

$$+\frac{2}{\pi}\beta\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{(g(t))_{2\pi}}{\beta^2+t^2}dt = I_3 + I_4. \quad (13)$$

Згідно з формулою 1.644(2) із [29]

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \ldots + = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)x^{2k+1}},\ x^2 \ge 1, \quad (14)$$

маємо

$$I_3 = \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{\beta^{2k+1}}{(2k+1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}}\right]. \quad (15)$$

Щодо обчислення другого інтеграла із правої частини (13), то очевидно

$$I_4 = \frac{2}{\pi}\beta\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{(g(t))_{2\pi}}{\beta^2+t^2}dt = \frac{2}{\pi}\beta\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{1}{t^2}\cdot\frac{(g(t))_{2\pi}}{1+\left(\frac{\beta}{t}\right)^2}dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\beta\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{(g(t))_{2\pi}}{t^2}dt - \frac{2}{\pi}\beta\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \left\{\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{(g(t))_{2\pi}}{t^{2k+4}}dt\right\}\beta^{2k+2}. \quad (16)$$

Підставивши (15) та (16) у праву частину (13), отримаємо

$$I_1 = \frac{2}{\pi}\beta\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\beta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{(g(t))_{2\pi}}{t^2}dt + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k\left[\frac{2^{2k+1}}{2(2k+1)\pi^{2k+1}} -\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{(g(t))_{2\pi}}{t^{2k+4}}dt\right]\beta^{2k+2}\right\}. \quad (17)$$

Для оцінювання другого доданка I_2 з правої частини (12) запишемо його у вигляді

$$I_2 = \frac{1}{\pi}(1-e^{-2\beta})\int_0^\infty (g(t))_{2\pi} \frac{\beta^2 - t^2}{(\beta^2+t^2)^2} dt = \frac{1}{\pi}(1-e^{-2\beta})(I_5 + I_6), \qquad (18)$$

$$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (g(t))_{2\pi} \frac{\beta^2 - t^2}{(\beta^2+t^2)^2} dt, \qquad (19)$$

$$I_6 = \int_{\frac{\pi}{2}}^\infty (g(t))_{2\pi} \frac{\beta^2 - t^2}{(\beta^2+t^2)^2} dt. \qquad (20)$$

Із (19) і (11) випливає, що

$$I_5 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \frac{\beta^2 - t^2}{(\beta^2+t^2)^2} dt = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \frac{(\beta^2+t^2)-2\beta^2}{(\beta^2+t^2)^2} dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{\beta^2+t^2} dt + \frac{1}{2}\beta^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \frac{2t}{(\beta^2+t^2)^2} dt = \frac{1}{2}\beta^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\beta^2+t^2} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \frac{2t(\beta^2+t^2) - t^2 \cdot 2t}{(\beta^2+t^2)^2} dt = \beta \operatorname{arctg}\frac{\pi}{2\beta} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{2}{\pi}\beta\right)^2}. \qquad (21)$$

Застосувавши до першого доданка правої частини (21) формулу (14), а потім розклавши в ряд останній доданок правої частини (21), отримаємо вираз для величини

$$I_5 = \beta\left(\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{\beta^{2k+1}}{(2k+1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k} \beta^{2k}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi(2k+1)}\beta^2\right)\beta^{2k} + \frac{\pi}{2}\beta - \frac{\pi}{2}. \qquad (22)$$

Інтеграл I_6, заданий за допомогою співвідношення (20), запишемо у вигляді

$$I_6 = -\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty (g(t))_{2\pi} \frac{(\beta^2+t^2)-2\beta^2}{(\beta^2+t^2)^2} dt = 2\beta^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{(g(t))_{2\pi}}{(\beta^2+t^2)^2} dt -$$

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{(g(t))_{2\pi}}{\beta^2+t^2} dt = I_7 - I_8. \qquad (23)$$

Розглянемо спочатку величину

$$I_7 = 2\beta^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{(g(t))_{2\pi}}{(\beta^2+t^2)^2} dt = \beta^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{(g(t))_{2\pi}}{t} \cdot \frac{2t}{(\beta^2+t^2)^2} dt =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{(g(t))_{2\pi}}{t} \cdot \frac{2t(\beta^2+t^2)-t^2 2t}{(\beta^2+t^2)^2} dt = \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{2}{\pi}\beta\right)^2} -$$

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \left(\frac{(g(t))_{2\pi}}{t}\right)' \cdot \frac{t^2}{\beta^2+t^2} dt = \frac{\pi}{4} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2}{\pi}\beta\right)^{2k} -$$

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \left(\frac{(g(t))_{2\pi}}{t}\right)' \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\beta}{t}\right)^{2k} dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left\{ \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \left(\frac{(g(t))_{2\pi}}{t}\right)' \frac{dt}{t^{2k}} \right\} \beta^{2k}. \qquad (24)$$

Аналогічно до попереднього можна показати, що матиме місце рівність

$$I_8 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{(g(t))_{2\pi}}{\beta^2+t^2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left\{ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{(g(t))_{2\pi}}{t^{2k+2}} dt \right\} \beta^{2k}. \qquad (25)$$

Тому із співвідношень (23)–(25) випливає, що

$$I_6 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left\{ \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \left(\frac{(g(t))_{2\pi}}{t}\right)' \frac{dt}{t^{2k}} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{(g(t))_{2\pi}}{t^{2k+2}} dt \right\} \beta^{2k}. \qquad (26)$$

Приймаючи до уваги позначення (19) та (20) і підставляючи співвідношення (22) і (26) у праву частину (18), отримуємо

$$I_2 = \frac{2}{\pi}(1-e^{-2\beta}) \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi(2k+1)} \beta^2 \right\} \beta^{2k} + \frac{\pi}{2}\beta - \frac{\pi}{2} \right] -$$

$$-\frac{1}{\pi}(1-e^{-2\beta}) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left\{ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \left(\frac{(g(t))_{2\pi}}{t}\right)' \frac{dt}{t^{2k}} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{(g(t))_{2\pi}}{t^{2k+2}} dt \right\} \beta^{2k}. \qquad (27)$$

Об’єднуючи співвідношення (12), (17) і (27), переконуємося в справедливості рівності (6). Теорему доведено.

ВИСНОВКИ

У роботі розв'язана задача Колмогорова–Нікольського в термінології О.І. Степанця для розв'язку бігармонійного рівняння на класах функцій Соболєва W^2 у рівномірній метриці. Зокрема, отримано повний асимптотичний розклад величини точної верхньої межі відхилень функцій класу Соболєва W^2 від їхніх бігармонійних інтегралів Пуассона. Оскільки клас функцій W^2 найоптимальніше характеризує асимптотичні властивості бігармонійних інтегралів Пуассона, отримані в роботі результати мають і матимуть досить широкий спектр застосувань [30–33] у варіаційних задачах, теорії функцій, теорії наближень, методах обчислення, теорії керування та прикладній математиці.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Maksymuk O.V., Sobchuk V.V., Salanda I.P., Sachuk Yu.V. A system of indicators and criteria for evaluation of the level of functional stability of information heterogenic networks. *Mathematical Modeling and Computing.* 2020. Vol. 7, N 2. P. 285–292. https://doi.org/10.23939/mmc2020.02.285.

2. Sobchuk V., Pichkur V., Barabash O., Laptiev O., Kovalchuk I., Zidan A. Algorithm of control of functionally stable manufacturing processes of enterprises. *IEEE 2nd International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT).* Kyiv, Ukraine, 2020. P. 206–210. https://doi.org/10.1109/ATIT50783.2020.9349332.

3. Pichkur V.V., Sobchuk V.V. Mathematical models and control design of a functionally stable technological process. *Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications (JODEA).* 2021. Vol. 29, N 1. P. 1–11. https://doi.org/10.15421/142102.

4. Dzyubenko G.T., Pshenichnyi B.N. Discrete differential games with information lag. *Cybernetics and Systems Analysis.* 1972. N 6. P. 947–952. https://doi.org/10.1007/BF01068518.

5. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in an abstract parabolic system. *Proc. Steklov Inst. Math*. 2016. Vol. 293. P. 254–269. https://doi.org/10.1134/S0081543816050229.

6. Chikrii A.A., Chikrii V.K. Image structure of multi-valued mappings in game problems of motion control. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2016. Vol. 48, N 3. P. 20–35. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i3.30.

7. Chikrii A.A., Eidelman S.D. Control game problems for quasilinear systems with Riemann–Liouville fractional derivatives. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2001. N 6. P. 836–864. https://doi.org/10.1023/A:1014529914874.

8. Samoilenko A.M., Samoilenko V.G., Sobchuk V.V. On periodic solutions of the equation of a nonlinear oscillator with pulse influence. *Ukrainian Math. J.* 1999. Vol. 51, N 6. P. 926–933. https://doi.org/10.1007/BF02591979.

9. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. 4-е изд. Москва: Наука, 1981. 512 с.

10. Kharkevych Yu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of conjugate functions by Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math*. 2018. Vol. 22, N 2. P. 235–243. https://doi.org/10.12697/ACUTM.2018.22.19.

11. Kharkevych Yu.I. On Approximation of the quasi-smooth functions by their Poisson type integrals. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2017. Vol. 49, N 10. P. 74–81. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v49.i10.80.

12. Kal'chuk I.V., Kravets V.I., Hrabova U.Z. Approximation of the classes $W_{\beta}^{r}H^{\alpha}$ by three-harmonic Poisson integrals. *J. Math. Sci. (N. Y.)*. 2020. Vol. 246, N 2. P. 39–50. https://doi.org/10.1007/s10958-020-04721-4.

13. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V. Approximation of the classes $W_{\beta,\infty}^{r}$ by three-harmonic Poisson integrals. *Carpathian Math. Publ.* 2019. Vol. 11, N 2, P. 10–23. https://doi.org/10.15330/cmp.11.2.321-334.

14. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1977. 735 с.

15. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the classes $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2011. Vol. 63, N 7. P. 1083–1107. https://doi.org/10.1007/s11253-011-0565-1.

16. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2012. Vol. 63, N 12. P. 1820–1844. https://doi.org/10.1007/s11253-012-0616-2.

17. Chikrii A.A., Chikrii G.Ts. Matrix resolving functions in game problems of dynamics. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2015. Vol. 291. P. 56–65. https://doi.org/10.1134/S0081543815090047.

18. Chikrii A.A., Matichin I.I. Game problems for fractional-order linear systems. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2010. Vol. 268. P. 54–70. https://doi.org/10.1134/S0081543810050056.

19. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of functions by conjugate Poisson integrals. *Carpathian Math. Publ.* 2020. Vol. 12, N 1. P. 138–147. https://doi.org/10.15330/cmp.12.1.138-147.

20. Abdullayev F.G., Kharkevych Yu.I. Approximation of the classes $C_{\beta}^{\psi}H^{\alpha}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2020. Vol. 72, N 1. P. 21–38. https://doi.org/10.1007/s11253-020-01761-6.

21. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions from the class $\hat{C}_{\beta,\infty}^{\psi}$ by Poisson biharmonic operators in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2008. Vol. 60, N 5. P. 769–798. https://doi.org/10.1007/s11253-008-0093-9.

22. Baskakov V.A. Some properties of operators of Abel-Poisson type. *Math. Notes*. 1975. Vol. 17, N 2. P. 101–107. https://doi.org/10.1007/BF01161864.

23. Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. Киев: Наук. думка, 1981. 340 с.

24. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by triharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2001. Vol. 53, N 6. P. 1012–1018. https://doi.org/10.1023/A:1013364321249.

25. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. Vol. 54, N 9. P. 1462–1470. https://doi.org/10.1023/A:1023463801914.

26. Коровкин П.П. Линейные операторы и теория приближений. Москва: Физматгиз, 1959. 213 с.

27. Kharkevych Yu.I. Asymptotic expansions of upper bounds of deviations of functions of class W^r from their generalized Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. Vol. 50, N 8. P. 38–49. https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v50.i8.40.

28. Kharkevych Yu.I. Approximative properties of the generalized Poisson integrals on the classes of functions determined by a modulus of continuity. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2019. Vol. 51, N 4. P. 43–54. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i4.40.

29. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Физматгиз, 1963. 1100 с.

30. Makarchuk A., Kal'chuk I., Kharkevych Y., Yakovleva A. The Usage of Interpolation Polynomials in the Studying of Data Transmission in Networks. *IEEE 2nd International Conference on System Analysis & Intelligent Computing (SAIC)*. Kyiv, Ukraine. 2020. P. 1–4, https://doi.org/10.1109/SAIC51296.2020.9239180.

31. Makarchuk A., Kal'chuk I., Kharkevych Y., Voloshyna T. Usage of Fourier transformation in theoretical studying of signals in data transmission. *IEEE 2nd International Conference on Advanced Trends in Information Theory (IEEE ATIT 2020).* Kyiv, Ukraine, 2020. P. 192–195. https://doi.org/10.1109/ATIT50783.2020.9349308.

32. Kharkevych G., Kharkevych Y., Kal'chuk I. and Sobchuk V. Usage of Fourier transformation theory in machine translation. *IEEE 2nd International Conference on Advanced Trends in Information Theory (IEEE ATIT 2020)*. Kyiv, Ukraine, 2020. P. 196–199. https://doi.org/10.1109/ATIT50783.2020.9349329.

33. Tovkach R., Kharkevych Y., Kal'chuk I. Application of a Fourier Series for an Analysis of a network Signals. *IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory (IEEE ATIT 2019).* Kyiv, Ukraine, 2019. P. 107–110. https://doi.org/10.1109/ATIT49449.2019.9030488.

Yu.I. Kharkevych

ON SOME ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SOLUTIONS TO BIHARMONIC EQUATIONS

Abstract. The author considers the application of the approximation theory methods to the principles of optimality in the decision-making theory. In finding optimal solutions, the risk function often has rather complex structure for studying its properties, which makes it necessary to approximate the risk function to another function with simple and clear characteristics. In this regard, the asymptotic properties of the solutions of biharmonic equations as approximate functions are investigated. Complete asymptotic expansions of the upper limits of deviations of the Sobolev class functions W (the set that the risk functions in decision-making optimization belong to) from operators that are solutions of biharmonic equations with certain boundary conditions are obtained. The expansions allow us to find the Kolmogorov-Nikol'skii constants of arbitrarily high degree of smallness that allows us to estimate the approximation error when solving optimization problems with arbitrary accuracy. It is mentioned that the biharmonic equations can be used to efficiently generate mathematical models of natural and social phenomena.

Keywords: approximation error, optimization properties of functions, biharmonic equations, complete asymptotic expansions, Sobolev classes.

Надійшла до редакції 09.11.2021