УДК 517.988

**О.Ф. КАШПУР**
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *olena.kashpur@gmail.com*.

# РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ЕРМІТА У СКІНЧЕННОВИМІРНОМУ ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ

**Анотація.** Розглянуто інтерполяційну задачу Ерміта в Евклідовому просторі у випадку, коли задано значення функції багатьох змінних та значення її похідних Гато першого порядку у вузлах інтерполяції. Показано, що поставлена задача має єдиний розв'язок мінімальної норми у разі недовизначеності. Одержано умови інваріантної розв'язуваності та єдиності розв'язку задачі.

**Ключові слова:** інтерполяційний поліном Ерміта, диференціал Гато, Гільбертів простір, Евклідів простір, мінімальна норма.

## ВСТУП

Інтерполяція, як один із методів апроксимації функцій багатьох змінних, має велике значення для прикладних та теоретичних задач. Теорію інтерполювання широко застосовують у побудові наближених методів математичного аналізу, зокрема, у задачах чисельного диференціювання та інтегрування для розв'язання певного класу рівнянь, а також під час розроблення систем автоматизованого проєктування, розв'язання задач геостатики (побудови моделі рельєфу) та ін. [1]. У класичних інтерполяційних формулах [2] для існування єдиного розв'язку задачі необхідно, щоб виконувалися відповідні співвідношення між кількістю вузлів $m$ та степенем інтерполянта $n$. На практиці особливо цікавим є випадок, коли ці співвідношення не виконуються, тобто інтерполяційна задача є недовизначеною. У статті розглянуто розв'язання саме цієї задачі.

Перші результати з поліноміальної інтерполяції функцій багатьох змінних отримано в роботах [3, 4]. У монографії [5] побудовано основи теорії поліноміальної інтерполяції для операторів у Гільбертових та векторних просторах: розглянуто інтерполяційні задачі Лагранжа, Ерміта та Ерміта–Біркгофа; знайдено необхідні та достатні умови розв'язуваності поставлених задач, конструктивно побудовано всю множину відповідних інтерполяційних поліномів. При цьому степінь інтерполяційного полінома $n$ та кількість вузлів інтерполювання $m$ не пов'язані між собою. Зауважимо, що з інтерполяційних формул, одержаних у [5], можна отримати класичні інтерполяційні формули для функцій однієї змінної. У роботі [6] у Гільбертовому просторі побудовано інтерполяційний поліном Ерміта мінімальної норми, породженої скалярним добутком із Гаусовою мірою [7], та показано, що він має властивість асимптотичного збереження поліномів відповідного степеня в разі, коли задано значення нелінійного оператора у вузлах та його перших диференціалів Гато в них.

У цій статті розглянуто інтерполяційну задачу Ерміта в Евклідовому просторі $E_k$, $k>1$, для випадку, коли задано значення функції багатьох змінних та значення її похідних Гато першого порядку у вузлах інтерполяції. Показано, що поставлена задача має єдиний розв'язок мінімальної норми тоді, коли кількість інтерполяційних умов є меншою ніж розмірність простору поліномів степеня $n$ у скінченновимірному просторі $E_k$, тобто у разі виконання нерівності $2m \le \frac{(n+k)!}{n!\,k!}$, де $m$ — кількість вузлів інтерполювання. При цьому задача є інваріантно розв'язною, тобто має розв'язок для будь-яких значень оператора у вузлах та значень його перших диференціалів Гато. Наведемо допоміжні результати, які будуть використані в цій роботі.

### ПОСТАНОВКА ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ЕРМІТА В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

Нехай $X$, $Y$ — Гільбертові простори ($X$ — сепарабельний), $B$ — кореляційний оператор міри $\mu$ на $X$, $\operatorname{Ker} B = \varnothing$, міра $\mu$ має перший момент, що дорівнює нулю, а другий є обмеженим, $B(u,v)$ — кореляційний оператор цієї міри відповідно. На підставі результатів [7, 8] справджується рівність

$$B(u,v) = \int\limits_X (x,u)(x,v)\mu(dx) = (Bu, v), \;\; u, v, x \in X, \tag{1}$$

де $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в $X$.

Розглянемо множину $\Pi_n$ неперервних на $X$ операторних поліномів степеня $n$:

$$\Pi_n(x) = \{P_n(x) = L_0 + L_1 x + L_2 x^2 + \ldots + L_n x^n\},$$

де $L_k(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — неперервний симетричний $k$-лінійний оператор, $L_k x^k = L_k(\underbrace{x, x, \ldots, x}_{k})$.

Уведемо на множині $\Pi_n$ скалярний добуток

$$(P_1, P_2) = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_X \cdots \int\limits_X (L_k^{(1)}(v_1, v_2, \ldots, v_k), L_k^{(2)}(v_1, v_2, \ldots, v_k))\mu(dv_k)\cdots\mu(dv_1),$$

та норму

$$\| P \| = \left( \sum_{k=0}^{n} \int\limits_X \cdots \int\limits_X \| L_k(v_1, v_2, \ldots, v_k) \|_Y^2 \, \mu(dv_k) \cdots \mu(dv_1) \right)^{1/2}.$$

В останніх формулах $P_1$, $P_2 \in \Pi_n$, $L_k^{(1)}$, $L_k^{(2)}$, $L_k$ — симетричні неперевні $k$-лінійні операторні форми поліномів $P_1$, $P_2$, $P$ відповідно, $(\cdot,\cdot)_Y$ — скалярний добуток в $Y$.

Оператор $F: X \to Y$ (у загальному випадку нелінійний) заданий своїми значеннями $F(Bx_j)$, $j = \overline{1, m}$, та значеннями диференціалів Гато

$$F^{(i)}(Bx_j) Bv_{ji}^{(i)} \ldots Bv_{j1}^{(i)}, \;\; i = \overline{0, k_j}, \;\; j = \overline{1, m},$$

$$Bx_j, Bv_{ji}^{(i)} \in X, \;\; i = \overline{0, k_j}, \;\; j = \overline{1, m}.$$

Для оператора $F(x)$ потрібно побудувати такий поліном $P_n(x)$ степеня $n$, що відповідає інтерполяційним умовам

$$P_n^{(i)}(Bx_j) Bv_{ji}^{(i)} \ldots Bv_{j1}^{(i)} = F^{(i)}(Bx_j) Bv_{ji}^{(i)} \ldots Bv_{j1}^{(i)}, \;\; i = \overline{0, k_j}, \;\; j = \overline{1, m}. \tag{2}$$

У [5, 9] показано, що необхідною та достатньою умовою розв'язання операторної інтерпляційної задачі (2) є виконання рівності

$$Z\vec{F}_H = \vec{0}, \tag{3}$$

де

$$\vec{F}_H = \{F^{(i)}(Bx_j)Bv_{ji}^{(i)} \dots Bv_{j1}^{(i)},\ i = \overline{0, k_j}\}_{i=1}^{m},$$

$Z$ — матриця, рядками якої є ортонормовані власні вектори симетричної матриці $H = ||H^{ls}|| = ||h_{ij}^{ls}||_{\ i=\overline{0,k_l},\ j=\overline{0,k_s}}$ з нульовим власним числом,

$$h_{ij}^{ls} =$$

$$= \frac{\partial^{i+j}}{\partial\alpha_1 \dots \partial\alpha_i \partial\beta_1 \dots \partial\alpha_j} g^B\left( x_l + \sum_{p=1}^{i} \alpha_p v_{ip}^{(i)} x_s + \sum_{p=1}^{i} \beta_p v_{sp}^{(i)} ) \right) \Bigg|_{\alpha_1 = \dots = \alpha_i = \beta_1 = \dots = \beta_j = 0},$$

$$g^B = g(Bu, v) = \sum_{p=0}^{n} (Bu, v)^p,\ Bu, v \in X.$$

У разі виконання умови (3) розв'язок задачі (2) має вигляд [9]

$$P_n(x) = Q(x) + \langle \vec{F}_H - \vec{Q}_H, H^{+}\vec{g}_H(x) \rangle,\ Q(x) \in \Pi_n, \tag{4}$$

де $H^{+}$ — псевдообернена матриця Мура–Пенроуза до матриці $H$ [10],

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i,\ \vec{a} = \{\alpha_i\}_{i=1}^{m},\ \vec{b} = \{\beta_i\}_{i=1}^{m},\ \alpha_i \in Y,\ \beta_i \in X,$$

$$\vec{Q}_H = \{Q^{(i)}(Bx_j)Bv_{ji}^{(i)} \dots Bv_{j1}^{(i)},\ i = \overline{0, k_j}\}_{i=1}^{m},$$

$$\vec{g}_H = \left\{ \frac{\partial^i}{\partial\alpha_1 \dots \partial\alpha_i} g\left( Bx_j + \sum_{p=1}^{i} \alpha_p Bv_{jp}^{(i)}, x \right) \Bigg|_{\alpha_1 = \dots = \alpha_i = 0},\ i = \overline{0, k_j} \right\}_{j=1}^{m}.$$

Як показано в [9], умова (3) еквівалентна рівності:

$$(E - HH^{+})\vec{F}_H = \vec{0}, \tag{5}$$

де $E$ — одинична матриця розмірості $\left( \sum_{i=1}^{m} k_i + m \right) \times \left( \sum_{i=1}^{m} k_i + m \right)$.

Формула (4) описує всю множину $\Pi_n^H$ операторних поліномів Ерміта $n$-го степеня, що відповідають інтерполяційним умовам (2).

Інтерполяційний поліном $P_n(x)$ називають інтерполянтом мінімальної норми, якщо він є розв'язком екстремальної задачі

$$||P_n|| = \min ||Q_n||,\ Q_n \in \Pi_n^H. \tag{6}$$

У [6] показано, що у разі виконання умови (2) поліном

$$P_n(x) = \langle \vec{F}_H, H^{+}\vec{g}_H(x) \rangle \tag{7}$$

є розв'язком задачі Ерміта (2) та має мінімальну норму, породжену скалярним добутком із Гаусовою мірою.

Задачу інтерполяції назвемо інваріантно розв'язною, якщо вона має розв'язок для будь-яких значень вектора $\vec{F}_H$. Перейдемо до викладу результатів цієї роботи.

### РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ЕРМІТА У СКІНЧЕННОВИМІРНОМУ ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ $E_k$

Наведені вище результати застосуємо для простору $E_k$. Не зменшуючи загальності міркувань, розглянемо Евклідів простір $E_2$ з Гаусовою мірою $\mu$. Нехай $p$ — розмірність простору поліномів степеня $n$ в $E_2$, $p=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$, $u=(u_1,u_2)$, $v=(v_1,v_2)$, $\gamma=(x,y)$, $g(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-t^2/2)$. Тоді рівність (1) у цьому випадку можна записати у такий спосіб:

$$B(u,v)=\int_{E_2}(\gamma,u)(\gamma,v)\mu(d\gamma)=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(u_1x+u_2y)(v_1x+v_2y)g(x)g(y)dxdy=$$

$$=(u_1v_1+u_2v_2)=(u,v)=(Iu,v).$$

Отже, у просторі $E_2$ як оператор $B$ можна обрати одиничний оператор $I$, а як вузли інтерполювання та напрямки диференціалів Гато — вектори $\gamma_i=(x_i,y_i)$, $\delta_i=(v_i,h_i)$, $i=\overline{1,m}$, відповідно.

Нехай функція $f:E_2\to R_1$ задана своїми значеннями $f(\gamma_i)$, $i=\overline{1,m}$, у вузлах інтерполяції $\gamma_i=(x_i,y_i)$, $i=\overline{1,m}$, та значеннями диференціалів Гато першого порядку $f'(\gamma_i)\delta_i$, $i=\overline{1,m}$, у цих вузлах $2m\le p$.

Потрібно знайти такий поліном $P_n(\gamma)$, що відповідає інтерполяційним умовам

$$P_n^{(i)}(\gamma_j)\delta_j=f^{(i)}(\gamma_j)\delta_j,\ i=0,1,\ j=\overline{1,m}. \qquad (8)$$

Розв'язком поставленої задачі є поліном мінімальної норми (7), при цьому матриця $H$ набуває вигляду $H=\|H^{sl}\|_{l=\overline{1,m},\,s=\overline{1,m}}$,

$$H^{sl}=\left\|\begin{matrix} g(\gamma_s,\gamma_l) & \left.\dfrac{\partial}{\partial\beta}g(\gamma_s,\gamma_l+\beta\delta_l)\right|_{\beta=0} \\ \left.\dfrac{\partial}{\partial\alpha}g(\gamma_s+\alpha\delta_s,\gamma_l)\right|_{\alpha=0} & \left.\dfrac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}g(\gamma_s+\alpha\delta_s,\gamma_l+\beta\delta_l)\right|_{\alpha=\beta=0}\end{matrix}\right\|,$$

$$g(u,v)=\sum_{p=0}^{n}(u,v)^p.$$

Елементи матриці $H=\|H^{sl}\|_{l=\overline{1,m},\,s=\overline{1,m}}$, $H^{sl}=\|h_{ij}^{sl}\|_{i=0,1,\,j=0,1}$ можна записати у вигляді

$$h_{00}^{sl}=\sum_{p=0}^{n}(\gamma_s,\gamma_l)^p, \qquad (9)$$

$$h_{01}^{sl}=\frac{\partial}{\partial\beta}\sum_{p=0}^{n}(\gamma_s,\gamma_l+\beta\delta_l)^p\Big|_{\beta=0}=(\gamma_s,\delta_l)\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)(\gamma_s,\gamma_l)^p, \tag{10}$$

$$h_{10}^{sl}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\sum_{p=0}^{n}(\gamma_s+\alpha\delta_s,\gamma_l)^p\Big|_{\alpha=0}=(\gamma_l,\delta_s)\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)(\gamma_s,\gamma_l)^p, \tag{11}$$

$$h_{11}^{sl}=\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\sum_{p=0}^{n}(\gamma_s+\alpha\delta_s,\gamma_l+\beta\delta_l)^p\Big|_{\alpha=\beta=0}=$$
$$=(\delta_s,\delta_l)\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)(\gamma_s,\gamma_l)^p+(\delta_s,\gamma_l)(\delta_l,\gamma_s)\sum_{p=2}^{n}p(p-1)(\gamma_s,\gamma_l)^{p-2}. \tag{12}$$

Використовуючи рівності (9)–(12), матрицю $H$ представимо як $H=AA'$, де

$$A=$$
$$=\left\|\begin{matrix}1 & x_1 & y_1 & \sqrt{2}x_1y_1 & x_1^2 & y_1^2 & \sqrt{3}x_1^2y_1 & \sqrt{3}x_1y_1^2 & x_1^3 & y_1^3 & \dots & y_1^n\\ 0 & \upsilon_1 & h_1 & \sqrt{2}(x_1\upsilon_1+y_1h_1) & 2x_1h_1 & 2y_1\upsilon_1 & \sqrt{3}x_1(2y_1\upsilon_1+x_1h_1) & \sqrt{3}y_1(2x_1\upsilon_1+y_1h_1) & 3x_1^2\upsilon_1 & 3y_1^2h_1 & \dots & C_n^1y_1^{n-1}\upsilon_1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & x_m & y_m & \sqrt{2}x_my_m & x_m^2 & y_m^2 & \sqrt{3}x_m^2y_m & \sqrt{3}x_my_m^2 & x_m^3 & y_m^3 & \dots & y_m^n\\ 0 & \upsilon_m & h_m & \sqrt{2}(x_m\upsilon_m+y_mh_m) & 2x_mh_m & 2y_m\upsilon_m & \sqrt{3}x_m(2y_m\upsilon_m+x_mh_m) & \sqrt{3}y_m(2x_m\upsilon_m+y_mh_m) & 3x_m^2\upsilon_m & 3y_m^2\upsilon_m & \dots & C_n^1y_m^{n-1}\upsilon_m\end{matrix}\right\|. \tag{13}$$

Позначимо

$$\vec{\psi}_{2i-1}=(1,x_i,y_i,\sqrt{2}x_iy_i,x_i^2,y_i^2,\sqrt{3}x_i^2y_i,\sqrt{3}x_iy_i^2,x_i^3,y_i^3,\dots,y_i^n), \tag{14}$$

$$\vec{\psi}_{2i}=(0,\upsilon_i,h_i,\sqrt{2}(x_i\upsilon_i+y_ih_i),2x_ih_i,2y_i\upsilon_i,$$
$$\sqrt{3}x_i(2y_i\upsilon_i+x_ih_i),\sqrt{3}y_i(2x_i\upsilon_i+y_ih_i),3x_i^2\upsilon_i,3y_i^2\upsilon_i,\dots,C_n^1y_i^{n-1}\upsilon_i), \tag{15}$$

де $i\in\mathbb{N}$. Враховуючи введені позначення (14), (15), матрицю $H$ можна представити у вигляді

$$H=\begin{pmatrix}(\vec{\psi}_1,\vec{\psi}_1) & \dots & (\vec{\psi}_1,\vec{\psi}_{2m})\\ \dots & \dots & \dots\\ (\vec{\psi}_{2m},\vec{\psi}_1) & \dots & (\vec{\psi}_{2m},\vec{\psi}_{2m})\end{pmatrix},\ 2m\le p. \tag{16}$$

Отже, матриця $H$ є матрицею Грама. Зауважимо, що таку матрицю розглянуто для нескінченновимірного Гільбертового простору в роботі [9]. Матриця $H$ буде невиродженою, якщо обрати вектори $\vec{\psi}_i$, $i=\overline{1,2m}$, $2m\le p$, лінійно незалежними, тобто у цьому випадку $H^+=H^{-1}$. На підставі (5) умови розв'язуваності задачі (8) набувають вигляду $(E-HH^{-1})\vec{f}_H=\vec{0}$, тобто виконуються для будь-яких значень функції $f(\gamma_i)$, $i=\overline{1,2m}$, та її диференціалів Гато $f'(\gamma_i)\delta_i$, $i=\overline{1,m}$, $2m\le p$. Це означає, що інтерполяційна задача Ерміта (8) є інваріантно розв'язною, а її розв'язок мінімальної норми можна записати так:

$$P_n(\gamma)=\langle\vec{f}_H,H^{-1}\vec{g}_H(\gamma)\rangle, \tag{17}$$

де $\vec{f}_H=\left\{\begin{matrix}f(\gamma_i)\\ f'(\gamma_i)\delta_i\end{matrix}\right\}_{i=1}^{m}$,

$$\vec{g}_H(\gamma)=\left\{\begin{array}{c}\sum_{p=0}^{n}(\gamma_i,\gamma)^p\\ \frac{\partial}{\partial\alpha}\sum_{p=0}^{n}(\gamma_i+\alpha\delta_i,\gamma)^p\Big|_{\alpha=0}\end{array}\right\}_{i=1}^{m}=$$

$$=\left\{\begin{array}{c}\sum_{p=0}^{n}(\gamma_i,\gamma)^p\\ (\delta_i,\gamma)\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)(\gamma_i,\gamma)^p\end{array}\right\}_{i=1}^{m}. \tag{18}$$

Тоді для інтерполяційного полінома мінімальної норми (17) одержимо таку формулу:

$$P_n(x,y)=\left\langle \vec{f}_H, H^{-1}\left\{\begin{array}{c}\sum_{p=0}^{n}(x_i x+y_i y)^p\\ (v_i x+h_i y)\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)(x_i x+y_i y)^p\end{array}\right\}_{i=1}^{m}\right\rangle. \tag{19}$$

Отже, якщо вузли інтерполювання $\gamma_i=(x_i,y_i)$, $i=\overline{1,m}$, та напрямки диференціалів Гато $\delta_i=(v_i,h_i)$, $i=\overline{1,m}$, $2m\le p$, обрати так, щоб система векторів (14), (15) була лінійно незалежною, то інтерполяційна задача Ерміта (8) буде інваріантно розв'язною та матиме єдиний розв'язок мінімальної норми у випадку недовизначенності вихідних даних, тобто коли кількість інтерполяційних умов $2m$ є меншою ніж розмірність простору поліномів степеня $n$ у просторі $E_2$, $m\le\frac{(n+1)(n+2)}{4}$. Довели таку теорему.

**Теорема 1.** Нехай функція $f:E_2\to R_1$ задана своїми значеннями $f(\gamma_i)$, $i=\overline{1,m}$, та значеннями перших диференціалів Гато $f'(\gamma_i)\delta_i$, $i=\overline{1,m}$. Якщо вузли інтерполювання $\gamma_i$, $i=\overline{1,m}$, та напрямки перших диференціалів Гато $\delta_i$, $i=\overline{1,m}$, у (8) обрати так, щоб система векторів (14), (15) була лінійно незалежною, то інтерполяційна задача Ерміта (8) для функції двох змінних є інваріантно розв'язною та має єдиний розв'язок мінімальної норми, що визначається формулою (19) у випадку, коли $2m\le p$, де $p=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ — розмірність простору поліномів другого степеня в $E_2$.

Результати теореми 1 можна узагальнити для функцій багатьох змінних. Нехай $E_k$ — $k$-вимірний Евклідів простір, $\gamma=(x_1,x_2,\dots,x_k)$, $\gamma_i=(x_{1_i},x_{2_i},\dots,x_{k_i})$, $\delta_i=(h_{1_i},h_{2_i},\dots,h_{k_i})\in E_k$, $\Pi_{kn}$ — простір поліномів $k$ змінних степеня $n$, розмірність простору $\Pi_{kn}$ дорівнює $p=\frac{(n+k)!}{n!\,k!}$.

Функція $f:E_k\to R_1$ задана своїми значеннями $f(\gamma_i)$, $i=\overline{1,2m}$, та значеннями похідних Гато першого порядку $f'(\gamma_i)(\delta_i)$, $i=\overline{1,m}$. У цьому випадку система векторів (14), (15) набуває вигляду

$$\vec{\psi}_{2i-1}=\left\{\left(\frac{j!}{j_1!\,j_2!\dots j_k!}\right)^{1/2}x_{1_i}^{j_1}x_{2_i}^{j_2}\dots x_{k_i}^{j_k},\ j_1+j_2+\dots+j_k=j,\ 0!=1\right\}_{j=0}^{n}, \tag{20}$$

$$i=\overline{1,m},$$

$$\vec{\psi}_{2i}=(0,h_{1_i},\ldots,h_{k_i},\sqrt{2}(x_{1_i}h_{2_i}+x_{2_i}h_{1_i}),\ldots,\sqrt{2}(x_{(k-1)_i}h_{k_i}+x_{k_i}h_{(k-1)_i}),2x_{1_i}h_{1_i},\ldots$$
$$\ldots,2x_{k_i}h_{k_i},\sqrt{3}x_{1_i}(2x_{2_i}h_{1_i}+x_{1_i}h_{2_i}),\ldots,\sqrt{3}x_{(k-1)_i}(2x_{k_i}h_{(k-1)_i}+x_{(k-1)_i}h_{k_i},$$
$$3x_{1_i}^2h_{1_i},\ldots,3x_{k_i}^2h_{k_i},\ldots,C_n^1x_{k_i}^{n-1}h_{k_i}),\ i\in\mathbb{N}, \tag{21}$$

при цьому матриця $H=A'A$, де

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & x_{1_1} & \ldots & x_{k_1} & \sqrt{2}x_{1_1}x_{2_1} & \ldots & x_{1_1}^2 & \ldots & x_{k_1}^2 & \sqrt{3}x_{1_1}^2x_{2_1} & \ldots & x_{1_1}^3 & \ldots & x_{k_1}^n \\ 0 & h_{1_1} & \ldots & h_{k_1} & \sqrt{2}(x_{1_1}h_{2_1}+x_{2_1}h_{1_1}) & \ldots & 2x_{1_1}^2h_{1_1} & \ldots & 2x_{k_1}^2h_{k_1} & \sqrt{3}x_{1_1}(2x_{2_1}h_{1_1}+x_{1_1}h_{2_1}) & \ldots & 3x_{1_1}^2h_{1_1} & \ldots & C_n^1x_{k_1}^{n-1}h_{k_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{1_m} & \ldots & x_{k_m} & \sqrt{2}x_{1_m}x_{2_m} & \ldots & x_{1_m}^2 & \ldots & x_{k_m}^2 & \sqrt{3}x_{1_m}^2x_{2_m} & \ldots & x_{1_m}^3 & \ldots & x_{k_m}^n \\ 0 & h_{1_m} & \ldots & h_{k_m} & \sqrt{2}(x_{1_m}h_{2_m}+x_{2_m}h_{1_m}) & \ldots & 2x_{1_m}^2h_{1_m} & \ldots & 2x_{k_m}^2h_{k_m} & \sqrt{3}x_{1_m}(2x_{2_m}h_{1_m}+x_{1_m}h_{2_m}) & \ldots & 3x_{1_m}^2h_{1_m} & \ldots & C_n^1x_{k_m}^{n-1}h_{k_m} \end{Vmatrix},$$

а інтерполяційний поліном мінімальної норми (17), що є розв'язком задачі Ерміта (8) у просторі $E_k$, можна записати у такому вигляді

$$P_n(x_1,x_2,\ldots,x_k)=\langle\vec{f}_H,H^{-1}\vec{g}_H(x_1,x_2,\ldots,x_k)\rangle\!\rangle, \tag{22}$$

де

$$\vec{g}_H(x_1,\ldots,x_k)=\left\{\begin{matrix}\sum_{p=0}^{n}(x_1x_{1_i}+\ldots+x_kx_{k_i})^p \\ (x_1h_{1_i}+\ldots+x_kh_{k_i})\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)(x_1x_{1_i}+\ldots+x_kx_{k_i})^p\end{matrix}\right\}_{i=1}^{m}.$$

Отже, узагальнення теореми 1 для багатовимірного Евклідового простору $E_k$ сформулюємо у вигляді такої теореми.

**Теорема 2.** Нехай функція $f:E_k\to R_1$ задана своїми значеннями $f(\gamma_i)$, $i=\overline{1,m}$, та значеннями перших диференціалів Гато $f'(\gamma_i)\delta_i$, $i=\overline{1,m}$. Якщо вузли інтерполювання $\gamma_i$, $i=\overline{1,m}$, та напрямки перших диференціалів Гато $\delta_i$, $i=\overline{1,m}$, у (8) обрати так, щоб система векторів (20), (21) була лінійно незалежною, то інтерполяційна задача Ерміта (8) для функції багатьох змінних є інваріантно розв'язною та має єдиний розв'язок мінімальної норми (22) на просторі $\Pi_{kn}$ у випадку, коли $2m\le p$, де $p$ — розмірність простору $\Pi_{kn}$.

### ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ПОЛІНОМИ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ЕРМІТА У СКІНЧЕННОВИМІРНОМУ ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ $E_k$

Нехай виконуються умови теореми 2. Розглянемо розв'язок інтерполяційної задачі Ерміта (8) у вигляді інтеполянта мінімальної норми (17). Подамо його у вигляді:

$$P_n(\gamma)=\langle\vec{f}_H,H^{-1}\vec{g}_H(\gamma)\rangle\!\rangle=\sum_{i=1}^{m}(f(\gamma_i)l_{2i-1}(\gamma)+f'(\gamma_i)\delta_i l_{2i}(\gamma)), \tag{23}$$

де

$$\vec{l}(\gamma)=\begin{Vmatrix} l_{2i-1}(\gamma) \\ l_{2i}(\gamma)\end{Vmatrix}_{i=1}^{m}=H^{-1}g_H(\gamma). \tag{24}$$

Покажемо, що елементи вектора $\vec{l}(\gamma)$ є фундаментальними поліномами інтерполяційної задачі Ерміта (8) у просторі $E_k$, тобто

$$l_{2i-1}(\gamma_k)=\delta_{ik},\ \ l_{2i}(\gamma_k)=0, \tag{25}$$

$$l'_{2i-1}(\gamma_k)\delta_k=0,\ \ l'_{2i}(\gamma_k)\delta_k=\delta_{ik},\ \ i,k=\overline{1,m}, \tag{26}$$

$\delta_{ik}$ — символ Кронекера.

Для цього знайдемо значення $\vec{l}(\gamma_j)$, $j=\overline{1,m}$, у вузлах інтерполяції та значення перших диференціалів Гато $\vec{l}\,'(\gamma_j)\delta_j$, $j=\overline{1,m}$, у цих вузлах. Нехай вектори $\vec{e}_{2i-1}$, $\vec{e}_{2i}$ складаються з нулів, а компоненти цих векторів з індексами $2i-1$ та $2i$ відповідно дорівнюють одиниці. Враховуючи вигляд вектора $\vec{g}_H(\gamma)$, що визначається формулою (18), та матриці $H$, елементи якої мають вигляд (9)–(12), одержимо

$$\vec{l}(\gamma_j) = H^{-1}\vec{g}_H(\gamma_j) = H^{-1}\left\{\begin{array}{c} \sum_{p=0}^{n} (\gamma_i, \gamma_j)^p \\ \frac{\partial}{\partial\alpha} \sum_{p=0}^{n} (\gamma_i + \alpha\delta_i, \gamma_j)^p \Big|_{\alpha=0} \end{array}\right\}_{i=1}^{m} =$$

$$= H^{-1}H\vec{e}_{2j-1} = \vec{e}_{2j-1}, \;\; j=\overline{1,m}.$$

Це означає, що виконується рівність (25). Аналогічно знайдемо $\vec{l}\,'(\gamma_j)\delta_j$, $j=\overline{1,m}$:

$$\vec{l}\,'(\gamma_j)\delta_j = H^{-1}\vec{g}\,'_H(\gamma_j)\delta_j =$$

$$= H^{-1}\left\{\begin{array}{c} \sum_{p=0}^{n} \frac{\partial}{\partial\beta}(\gamma_i, \gamma_j + \beta\delta_j)^p \Big|_{\beta=0} \\ \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta} \sum_{p=0}^{n} (\gamma_i + \alpha\delta_i, \gamma_j + \beta\delta_j)^p \Big|_{\alpha=\beta=0} \end{array}\right\}_{i=1}^{m} =$$

$$= H^{-1}H\vec{e}_{2j} = \vec{e}_{2j}, \;\; j=\overline{1,m}.$$

Отримали, що (26) також виконується.

Отже, довели наступну теорему.

**Теорема 3.** Нехай виконуються умови теореми 2. Тоді елементи вектора $\vec{l}(\gamma)$, що визначаються формулою (24), є фундаментальними поліномами інтерполяційної задачі Ерміта (8) у скінченновимірному Евклідовому просторі $E_k$.

**Приклад 1.** Побудуємо інтерполяційний поліном мінімальної норми $P_2(\gamma) = P_2(x, y)$ другого степеня, використовуючи формулу (17). У просторі $E_2$ розмірність простору поліномів другого степеня $p=6$. Отже, на підставі результатів [2] для розв'язання цієї інтерполяційної задачі потрібно, щоб кількість інтерполяційних умов дорівнювала $p$. За теоремою 1 можна обрати меншу кількість умов (8). Нехай $\gamma_1 = (1, 0)$, $\gamma_2 = (1, 2)$ — вузли інтерполювання, $\delta_1 = (1, 0)$, $\delta_2 = (0, 1)$ — напрямки перших диференціалів Гато. За такого вибору напрямків диференціалів Гато маємо

$$f'(\gamma_1)\delta_1 = \frac{\partial f(\gamma_1)}{\partial x}, \;\; f'(\gamma_2)\delta_1 = \frac{\partial f(\gamma_2)}{\partial y},$$

отже, інтерполяційні умови (8) набувають вигляду:

$$f(\gamma_i) = P_2(\gamma_i), \;\; i = 1, 2,$$

$$\frac{\partial f(\gamma_1)}{\partial x} = \frac{\partial P_2(\gamma_1)}{\partial x}, \;\; \frac{\partial f(\gamma_2)}{\partial y} = \frac{\partial P_2(\gamma_2)}{\partial y}.$$

Вектори $\vec{\psi}_i$, $i=\overline{1,2m}$, на підставі формул (14), (15) матимуть такий вигляд:

$$\vec{\psi}_1 = (1, 1, 0, 0, 1, 0),\ \vec{\psi}_2 = (0, 1 0, 0, 2, 0),$$

$$\vec{\psi}_3 = (1, 1, 2, 2\sqrt{2}, 1, 4),\ \vec{\psi}_4 = (0, 0, 1, \sqrt{2}, 0, 4).$$

Система векторів $\{\vec{\psi}_i\}_{i=1}^4$ є лінійно незалежною, тому матриця Грама $H$, що визначається за формулою (16), є невиродженою та

$$H = \begin{Vmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 31 & 22 \\ 0 & 0 & 22 & 19 \end{Vmatrix},\ H^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{59}{48} & -\frac{1}{2} & -\frac{19}{48} & \frac{11}{24} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{19}{48} & 0 & \frac{19}{48} & -\frac{11}{24} \\ \frac{11}{24} & 0 & -\frac{11}{24} & \frac{7}{12} \end{Vmatrix},$$

$$g_H(x, y) = \begin{Vmatrix} 1 + x + x^2 \\ x(1 + 2x) \\ 1 + (x + 2y) + (x + 2y)^2 \\ y(1 + 2(x + 2y)) \end{Vmatrix}.$$

Тоді інтерполяційний поліном мінімальної норми (17) набуває вигляду

$$P_n(x, y) = \langle \vec{f}_H, H^{-1}\vec{g}_H(x, y)\rangle = \sum_{i=1}^{m} f(x_i, y_i) l_i(x, y),$$

де

$$l_1(x, y) = \frac{1}{6}\left(5 + 2x - 2y - x^2 \frac{3}{2} y^2 - 4xy\right),\ l_2(x, y) = \frac{1}{2}(-1 + x^2), \qquad (27)$$

$$l_3(x, y) = \frac{1}{12}(4y - 3y^2 + 8xy),\ l_4(x, y) = -\frac{1}{6}(2y + 4xy + 3y^2) \qquad (28)$$

є фундаментальними поліномами задачі Ерміта. Дійсно, як неважко бачити, поліноми (27), (28) відповідають таким співвідношенням:

$$l_{2i-1}(x_k, y_k) = \delta_{ik},\ l_{2i}(x_k, y_k) = 0,\ i = 1, 2,\ k = 1, 2,$$

$$\frac{\partial l_i}{\partial x}(x_1, y_1) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } i = 2, \\ 0, \text{ якщо } i = 1, 3, 4, \end{cases} \quad \frac{\partial l_i}{\partial y}(x_2, y_2) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } i = 4, \\ 0, \text{ якщо } i = \overline{1, 3}, \end{cases}$$

тобто рівності (24), (25) виконуються.

Отже, у прикладі 1 побудовано інтерполяційний поліном мінімальної норми для $m = 4$, $p = 6$, $m < p$.

Поставлена задача відповідно до рівності (5) має розв'язок для будь-яких значень функції у вузлах інтерполювання та значень перших диференціалів Гато у цих вузлах. Це означає, що вона є інваріантно розв'язною.

**Зауваження 1.** Результати цієї роботи можна перенести на інтерполяційну задачу Ерміта–Біркгофа, коли в умовах (8) значення деяких похідних Гато першого порядку у вузлах інтерполяції відсутні. Для того, щоб побудувати розв'язок цієї задачі, потрібно в матриці $H$ викреслити ті рядки та стовбчики, що відповідають похідним Гато, пропущеним в умовах (8). Для векторів, наявних у формулі (17), виконуємо аналогічні викладки: викреслюємо з них ті елементи, що відповідають пропущеним похідним.

### ВИСНОВКИ

Зважаючи на викладене, доходимо висновку, що в умовах недовизначеності, тобто коли кількість інтерполяційних умов (8) є меншою ніж розмірність простору поліномів степеня $n$ у просторі $E_k : 2m \le p,\ p = \frac{(n+k)!}{n!\,k!}$, у разі виконання умов теореми 1 (теореми 2) для інтерполяційної задачі Ерміта (8) існує єдиний розв'язок мінімальної норми для функції двох (багатьох) змінних, при цьому задача є інваріантно розв'язною.


СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Porter W.A. An overview of polinomic system theory. *Proc. IEEE. Special Issue on System Theory*. 1976. Vol. 64, N 1. P. 18–26.
2. Бабенко К.И. Основы численного анализа. Москва; Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2002. 848 с.
3. Kergin P. Interpolation of C functions. Thesis: University of Toronto, 1978.
4. Chung K.C., Yao T.H. On latticies admitting unique Lagrange representations. *SIAM J. Numer. Anal.* 1977. Vol. 14, Iss. 4. P. 735–743.
5. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Основы теории полиномиального операторного интерполирования. Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. Т. 24. 278 с.
6. Хлобистов В.В., Кашпур О.Ф. Операторний інтерполянт типу Ерміта в гільбертовому просторі, що є асимптотично точним на поліномах. *Вісник Київського університету. Сер. фіз.-міт. науки.* 2005. № 2. С. 437–448.
7. Егоров А.Д., Соболевский П.И., Янович Л.А. Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. Минск: Наука и техника, 1985. 310 с.
8. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процесов. Т. 1. Москва: Наука, 1971. 664 с.
9. Makarov V.L., Khlobystov V.V., Yanovich L.A. Methods of operator interpolation. Київ: Ін-т математики НАН України, 2010. Т. 83. 516 с.
10. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Москва: Физматлит, 2010. 558 с.



**O.F. Kashpur**


**SOLVING THE HERMITE INTERPOLATION PROBLEM IN A FINITE-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE**


**Abstract.** We consider the solution of the Hermite interpolation problem in the Euclidean space in the case where the values of the multivariable function and the values of its first-order Gato derivatives at the interpolation nodes are given. The problem is shown to have a unique solution of the minimum norm in the case of under-determinacy. The conditions of invariant solvability and uniqueness of the problem solution are obtained.



**Keywords:** Hermite interpolation polynomial, Gato differential, Hilbert space, Euclidean space, minimum norm.

*Надійшла до редакції 19.11.2021*