УДК 519.21

**О.Ю. МАСЮТКА**
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *omasyutka@gmail.com*.

**М.П. МОКЛЯЧУК**
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *moklyachuk@gmail.com*.

# ПРО ЗАДАЧУ МІНІМАКСНОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ СТАЦІОНАРНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

**Анотація.** Розглянуто задачу оптимального лінійного оцінювання функціоналів від невідомих значень стохастичної стаціонарної послідовності за спостереженнями послідовності з пропущеними значеннями. Знайдено формули для обчислення значення середньокваратичної похибки та спектральної характеристики оптимальної лінійної оцінки функціоналів за умови спектральної визначеності, коли спектральна щільність послідовності точно відома. У випадку, коли спектральна щільність послідовності точно не відома, а задаються лише деякі класи допустимих спектральних щільностей, застосовано мінімаксно-робастний метод. Знайдено формули для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних спектральних характеристик для оптимального лінійного оцінювання функціоналів для конкретних класів спектральних щільностей.

**Ключові слова:** стаціонарна послідовність, мінімаксно-робастна оцінка, найменш сприятлива спектральна щільність, мінімаксна спектральна характеристика.

## ВСТУП

Задачі оцінювання невідомих значень випадкових процесів важливі в теорії випадкових процесів. Постановка задач інтерполяції, екстраполяції та фільтрації для стаціонарних процесів та їхнє зведення до задач теорії функцій належить Колмогорову [1]. Ефективні методи пошуку оцінок невідомих значень стаціонарних послідовностей та процесів були розроблені Вінером [2] та Ягломом [3]. У подальшому ці методи були розвинуті в [4, 5]. Класична теорія оцінювання базується на припущенні, що спектральні щільності послідовностей та процесів відомі. На практиці, однак, повної інформації про спектральні щільності здебільшого немає. У такому випадку, щоб уникнути труднощів, шукають параметричні чи непараметричні оцінки спектральних щільностей або добирають щільності, виходячи з інших міркувань. Згідно з [6] такий підхід може призвести до значного зростання величини похибки оцінки. Тож доцільно шукати оцінки, які є оптимальними водночас для всіх щільностей з деякого класу можливих спектральних щільностей. Такі оцінки називають мінімаксними, оскільки вони мінімізують максимальне значення величини похибки. У [7] було вперше застосовано такий підхід до задачі екстраполяції стаціонарних процесів. Огляд результатів з мінімаксних (робастних) методів аналізу даних наведено в [8]. Останні результати з мінімаксного оцінювання для стаціонарних процесів, періодично корельованих процесів та процесів із стаціонарними приростами описані в [9–14].

У запропонованій статті досліджується задача оптимального середньоквадратичного оцінювання функціоналів

$$A_{S_1}\xi = \sum_{j=0}^{N} a(j)\xi(j) + \sum_{j=N+M_2+1}^{\infty} a(j)\xi(j), \; A_{S_2}\xi = \sum_{j=-\infty}^{-M_1-1} a(j)\xi(j) + A_{S_1}\xi$$

від невідомих значень стаціонарної послідовності $\xi(j)$, $j \in \mathbb{Z}$, за даними спостережень послідовності в точках $j \in S_k$, де

$$S_1 = \{\ldots,-2,-1\} \cup \{N+1,\ldots,N+M_2\}, S_2 = \{-M_1,\ldots,-1\} \cup \{N+1,\ldots,N+M_2\}.$$

Задача досліджується для випадку спектральної визначеності, коли спектральна щільність послідовності відома, та для випадку спектральної невизначеності, коли задано лише множину допустимих спектральних щільностей.

## КЛАСИЧНИЙ МЕТОД ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

Нехай $\xi(j)$, $j \in \mathbb{Z}$, — стаціонарна (у широкому розумінні) стохастична послідовність, яка має коваріаційну функцію $r(n) = E\xi(j+n)\overline{\xi(j)}$, що допускає спектральне розкладання [15]

$$r(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} F(d\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} f(\lambda) d\lambda,$$

де $F(d\lambda)$ — спектральна міра послідовності, а $f(\lambda)$ — спектральна щільність послідовності, яка задовольняє умову мінімальності

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda))^{-1} d\lambda < \infty. \tag{1}$$

Така умова необхідна і достатня для того, щоб була неможлива безпомилкова інтерполяція невідомих значень послідовності [4].

Кожна стаціонарна послідовність $\xi(j)$, $j \in \mathbb{Z}$, допускає спектральне розкладання [15]

$$\xi(j) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\lambda} Z(d\lambda), \tag{2}$$

де $Z(\Delta)$ — ортогональна стохастична міра послідовності, яка задовольняє співвідношення

$$EZ(\Delta_1)\overline{Z(\Delta_2)} = F(\Delta_1 \cap \Delta_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Delta_1 \cap \Delta_2} f(\lambda) d\lambda.$$

Розглянемо задачу середньоквадратично оптимального оцінювання функціоналів

$$A_{S_1}\xi = \sum_{j=0}^{N} a(j)\xi(j) + \sum_{j=N+M_2+1}^{\infty} a(j)\xi(j), \; A_{S_2}\xi = \sum_{j=-\infty}^{-M_1-1} a(j)\xi(j) + A_{S_1}\xi$$

від невідомих значень стаціонарної послідовності $\xi(j)$, $j \in \mathbb{Z}$, за даними спостережень послідовності в точках $j \in S_k$, де

$$S_1 = \{\ldots,-2,-1\} \cup \{N+1,\ldots,N+M_2\}, S_2 = \{-M_1,\ldots,-1\} \cup \{N+1,\ldots,N+M_2\}.$$

Із спектрального розкладання (2) послідовності $\xi(j)$ випливає, що функціонали $A_{S_1}\xi$ та $A_{S_2}\xi$ можна записати у вигляді

$$A_{S_1}\xi = \int_{-\pi}^{\pi} A_{S_1}(e^{i\lambda})Z(d\lambda),\ A_{S_2}\xi = \int_{-\pi}^{\pi} A_{S_2}(e^{i\lambda})Z(d\lambda), \qquad (3)$$

де

$$A_{S_1}(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{N} a(j)e^{ij\lambda} + \sum_{j=N+M_2+1}^{\infty} a(j)e^{ij\lambda},\ A_{S_2}(e^{i\lambda}) = \sum_{j=-\infty}^{-M_1-1} a(j)e^{ij\lambda} + A_{S_1}(e^{i\lambda}).$$

Будемо розглядати $\xi(j)$ як елементи Гільбертового простору $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ випадкових величин $\gamma$ із нульовим середнім значенням $\mathrm{E}\gamma$, скінченною дисперсією $\mathrm{E}|\gamma|^2 < \infty$ та скалярним добутком $(\gamma_1, \gamma_2) = \mathrm{E}\gamma_1\overline{\gamma_2}$. Позначимо $H^{S_k}(\xi)$ замкнутий лінійний підпростір простору $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, породжений величинами $\{\xi(j): j \in S_k\}$, а $L_2(f)$ — Гільбертів простір функцій $a(\lambda)$ таких, що $\int_{-\pi}^{\pi} |a(\lambda)|^2 f(\lambda)d\lambda < \infty$. Позначимо також $L_2^{S_k}(f)$ підпростір в $L_2(f)$, породжений функціями $\{e^{in\lambda}, n \in S_k\}$. Середньоквадратично оптимальна оцінка $\hat{A}_{S_k}\xi$ функціонала $A_{S_k}\xi$ за спостереженнями послідовності $\xi(j)$ у точках $j \in S_k$ належить простору $H^{S_k}(\xi)$ і її можна записати у вигляді

$$\hat{A}_{S_k}\xi = \int_{-\pi}^{\pi} h_k(e^{i\lambda})Z(d\lambda), \qquad (4)$$

де $h_k(e^{i\lambda}) \in L_2^{S_k}(f)$ — спектральна характеристика оцінки $\hat{A}_{S_k}\xi$. Середньоквадратична похибка $\Delta(h_k; f) = E\left|A_{S_k}\xi - \hat{A}_{S_k}\xi\right|^2$ оцінки $\hat{A}_{S_k}\xi$ обчислюється за формулою

$$\Delta(h_k; f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|A_{S_k}(e^{i\lambda}) - h_k(e^{i\lambda})\right|^2 f(\lambda)d\lambda.$$

Класичний метод ортогонального проєктування у Гільбертовому просторі, який запропонував Колмогоров [1], дає змогу відшукати спектральну характеристику $h_k(e^{i\lambda})$ та середньоквадратичну похибку $\Delta(h_k; f)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_{S_k}\xi$ у тому випадку, коли відома щільність $f(\lambda)$ та виконується умова мінімальності (1). Спектральну характеристику оцінки визначають за таких умов:

1) $h_k(e^{i\lambda}) \in L_2^{S_k}(f)$;

2) $A_{S_k}(e^{i\lambda}) - h_k(e^{i\lambda}) \perp L_2^{S_k}(f)$.

З умови 2 випливає, що для всіх $\eta \in H^{S_k}(\xi)$ має виконуватись рівність

$$(A_{S_k}\xi - \hat{A}_{S_k}\xi, \eta) = E[(A_{S_k}\xi - \hat{A}_{S_k}\xi)\overline{\eta}] = 0.$$

Остання рівність еквівалентна рівнянням $E[(A_{S_k}\xi - \hat{A}_{S_k}\xi)\overline{\xi(j)}] = 0,\ j \in S_k$. Із (3), (4) і означення скалярного добутку в $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ отримаємо такі співвідношення

$$\int_{-\pi}^{\pi} (A_{S_k}(e^{i\lambda}) - h_k(e^{i\lambda}))f(\lambda)e^{-ij\lambda}d\lambda = 0,\ j \in S_k.$$

Звідси випливає, що функції $(A_{S_k}(e^{i\lambda}) - h_k(e^{i\lambda}))f(\lambda)$ можна записати у вигляді

$$(A_{S_k}(e^{i\lambda}) - h_k(e^{i\lambda}))f(\lambda) = C_{S_k}(e^{i\lambda}),$$

де

$$C_{S_1}(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{N} c(j)e^{ij\lambda} + \sum_{j=N+M_2+1}^{\infty} c(j)e^{ij\lambda}, \ C_{S_2}(e^{i\lambda}) = \sum_{j=-\infty}^{-M_1-1} c(j)e^{ij\lambda} + C_{S_1}(e^{i\lambda}),$$

а $c(j)$ — невідомі коефіцієнти, які потрібно визначити. Із останнього співвідношення випливає, що спектральна характеристика $h_k(e^{i\lambda})$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_{S_k}\xi$ має вигляд

$$h_k(e^{i\lambda}) = A_{S_k}(e^{i\lambda}) - C_{S_k}(e^{i\lambda})(f(\lambda))^{-1}. \tag{5}$$

Щоб знайти рівняння для відшукання невідомих коефіцієнтів $c(j)$, використаємо розклад функції $(f(\lambda))^{-1}$ в ряд Фур'є

$$\frac{1}{f(\lambda)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b(m)e^{im\lambda}, \tag{6}$$

де $b(m)$ — коефіцієнти Фур'є функції $(f(\lambda))^{-1}$. Підставляючи (6) у (5), отримуємо такі формули для обчислення спектральних характеристик:

$$h_1(e^{i\lambda}) = \sum_{j=N+M_2+1}^{\infty} a(j)e^{ij\lambda} + \sum_{j=0}^{N} a(j)e^{ij\lambda} -$$

$$-\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} b(m)e^{im\lambda}\right)\left(\sum_{j=0}^{N} c(j)e^{ij\lambda} + \sum_{j=N+M_2+1}^{\infty} c(j)e^{ij\lambda}\right), \tag{7}$$

$$h_2(e^{i\lambda}) = \sum_{j=-\infty}^{-M_1-1} a(j)e^{ij\lambda} + \sum_{j=0}^{N} a(j)e^{ij\lambda} + \sum_{j=N+M_2+1}^{\infty} a(j)e^{ij\lambda} -$$

$$-\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} b(m)e^{im\lambda}\right)\left(\sum_{j=-\infty}^{-M_1-1} c(j)e^{ij\lambda} + \sum_{j=0}^{N} c(j)e^{ij\lambda} + \sum_{j=N+M_2+1}^{\infty} c(j)e^{ij\lambda}\right). \tag{8}$$

З умови $h_k(e^{i\lambda}) \in L_2^{S_k}(f)$ випливає, що коефіцієнти Фур'є функції $h_k(e^{i\lambda})$ дорівнюють нулю для $j \in Z \setminus S_k$, тобто

$$\int_{-\pi}^{\pi} h_k(e^{i\lambda})e^{-ij\lambda}d\lambda = 0, \ j \in Z \setminus S_k.$$

Скориставшись співвідношеннями (7) та (8), отримаємо системи для відшукання невідомих коефіцієнтів $c(j), \ j \in Z \setminus S_1$,

$$a(k) = \sum_{j \in Z \setminus S_1} c(j)\, b(-j+k), \ k = \overline{0, N},$$

$$a(N+M_2+k) = \sum_{j \in Z \setminus S_1} c(j)b(N+M_2+k-j), \quad k \ge 1, \tag{9}$$

та коефіцієнтів $c(j)$, $j \in Z \setminus S_2$,

$$a(-M_1 - k) = \sum_{j \in Z \setminus S_2} c(j) b(-M_1 - k - j), \; k \ge 1,$$

$$a(k) = \sum_{j \in Z \setminus S_2} c(j) b(-j + k), \; k = \overline{0, N},$$

$$a(N + M_2 + k) = \sum_{j \in Z \setminus S_2} c(j) b(N + M_2 + k - j), \; k \ge 1. \tag{10}$$

Позначимо $\vec{a}_1^{\,\mathrm{T}} = (\vec{a}_N^{\,\mathrm{T}}, \vec{a}_{N+M_2+1}^{\,\mathrm{T}})$, $\vec{a}_{-M_1-1}^{\,\mathrm{T}}$ вектори, що утворені з коефіцієнтів $a(j)$

$$\vec{a}_N^{\,\mathrm{T}} = (a(0), a(1), \ldots, a(N)), \; \vec{a}_{-M_1-1}^{\,\mathrm{T}} = (a(-M_1 - 1), a(-M_1 - 2), \ldots),$$

$$a_{N+M_2+1}^{\mathrm{T}} = (a(N + M_2 + 1), \; a(N + M_2 + 2), \ldots),$$

та $B_{S_1}$ — матрицю $B_{s_1} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, де $B_k$ — матриці, що утворені коефіцієнтами Фур'є функції $(f(\lambda))^{-1}$

$$B_1(i, j) = b(i - j), \; 0 \le i, j \le N, B_4(i, j) = b(i - j), \; 0 \le i, j < \infty,$$

$$B_2(i, j) = b(-N - M_2 - 1 + i - j), \; 0 \le i \le N, \; 0 \le j < \infty,$$

$$B_3(i, j) = b(N + M_2 + 1 + i - j), \; 0 \le j \le N, \; 0 \le i < \infty.$$

Тоді систему рівнянь (9) можна записати у вигляді

$$\vec{a}_1 = B_{S_1} \vec{c}_1, \tag{11}$$

а систему рівнянь (10) — у вигляді

$$\vec{a}_N = B_1 \vec{c}_N + B_5 \vec{c}_{-M_1-1} + B_2 \vec{c}_{N+M_2+1},$$

$$\vec{a}_{-M_1-1} = B_6 \vec{c}_N + B_7 \vec{c}_{-M_1-1} + B_8 \vec{c}_{N+M_2+1},$$

$$\vec{a}_{N+M_2+1} = B_3 \vec{c}_N + B_9 \vec{c}_{-M_1-1} + B_4 \vec{c}_{N+M_2+1}, \tag{12}$$

де $\vec{c}_1^{\,\mathrm{T}} = (\vec{c}_N^{\,\mathrm{T}}, \vec{c}_{N+M_2+1}^{\,\mathrm{T}})$, $\vec{c}_{-M_1-1}^{\,\mathrm{T}}$ — вектори, що утворені з невідомих коефіцієнтів $c(j)$

$$\vec{c}_N^{\,\mathrm{T}} = (c(0), c(1), \ldots, c(N)), \; \vec{c}_{-M_1-1}^{\,\mathrm{T}} = (c(-M_1 - 1), \; c(-M_1 - 2), \ldots),$$

$$\vec{c}_{N+M_2+1}^{\,\mathrm{T}} = (c(N + M_2 + 1), \; c(N + M_2 + 2), \ldots),$$

а $B_k$ — матриці, що утворені коефіцієнтами Фур'є функції $(f(\lambda))^{-1}$

$$B_5(i, j) = b(M_1 + 1 + i + j), \; 0 \le i \le N, \; 0 \le j < \infty,$$

$$B_6(i, j) = b(-M_1 - 1 - i - j), \; 0 \le j \le N, \; 0 \le i < \infty, B_7(i, j) = b(j - i), \; 0 \le i, j < \infty,$$

$$B_8(i, j) = b(-N - M_2 - 1 - j - M_1 - 1 - i), \; 0 \le i, j < \infty,$$

$$B_9(i, j) = b(N + M_2 + 1 + i + M_1 + 1 + j), \; 0 \le i, j < \infty.$$

Оскільки матриця $B_{S_1}$ має обернену [16], з (11) отримаємо, що $\vec{c}_1 = B_{S_1}^{-1}\vec{a}_1$. Отже, невідомі коефіцієнти $c(j)$, $j \in Z \setminus S_1$, обчислюються за формулою

$$c(j) = (B_{S_1}^{-1}\vec{a}_1)(j), \; j \in Z \setminus S_1,$$

де $(B_{S_1}^{-1}\vec{a}_1)(j)$ — $j$-й елемент вектора $B_{S_1}^{-1}\vec{a}_1$. Таким чином, спектральна характеристика оцінки $\hat{A}_{S_1}\xi$ обчислюється за формулою

$$h_1(e^{i\lambda}) = \sum_{j=N+M_2+1}^{\infty} a(j)e^{ij\lambda} + \sum_{j=0}^{N} a(j)e^{ij\lambda} -$$

$$-\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} b(m)e^{im\lambda}\right)\left(\sum_{j=0}^{N}(B_{S_1}^{-1}\vec{a}_1)(j)e^{ij\lambda} + \sum_{j=N+M_2+1}^{\infty}(B_{S_1}^{-1}\vec{a}_1)(j)e^{ij\lambda}\right), \quad (13)$$

а середньоквадратичні похибки оцінок функціоналів $\hat{A}_{S_1}\xi$, $\hat{A}_{S_2}\xi$ обчислюються за формулами

$$\Delta(h_1; f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{j=0}^{N} c(j)e^{ij\lambda} + \sum_{j=N+M_2+1}^{\infty} c(j)e^{ij\lambda}\right)\left(\sum_{j=0}^{N}\overline{c(j)}e^{-ij\lambda} +\right.$$

$$\left. + \sum_{j=N+M_2+1}^{\infty}\overline{c(j)}\,e^{-ij\lambda}\right)\times\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} b(m)e^{im\lambda}\right)d\lambda = \left\langle \vec{c}_1, B_{S_1}\vec{c}_1\right\rangle = \left\langle B_{S_1}^{-1}\vec{a}_1, \vec{a}_1\right\rangle, \quad (14)$$

$$\Delta(h_2; f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{j=-\infty}^{-M_1-1} c(j)e^{ij\lambda} + \sum_{j=0}^{N} c(j)e^{ij\lambda} + \sum_{j=N+M_2+1}^{\infty} c(j)e^{ij\lambda}\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{j=-\infty}^{-M_1-1}\overline{c(j)}e^{-ij\lambda} + \sum_{j=0}^{N}\overline{c(j)}e^{-ij\lambda} + \sum_{j=N+M_2+1}^{\infty}\overline{c(j)}e^{-ij\lambda}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} b(m)e^{im\lambda}\right)d\lambda =$$

$$= \left\langle \vec{c}_N, \vec{a}_N\right\rangle + \left\langle \vec{c}_{-M_1-1}, \vec{a}_{-M_1-1}\right\rangle + \left\langle \vec{c}_{N+M_2+1}, \vec{a}_{N+M_2+1}\right\rangle, \quad (15)$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — позначення скалярного добутку у просторі $l_2$.

Сформулюємо отриманий результат у вигляді теореми.

**Теорема 1**. Нехай $\xi(j)$ — стаціонарна стохастична послідовність, що має спектральну щільність $f(\lambda)$, яка задовольняє умову мінімальності (1). Середньоквадратичні похибки $\Delta(h_k, f)$ та спектральні характеристики $h_k(e^{i\lambda})$ оптимальних лінійних оцінок $\hat{A}_{S_k}\xi$ функціоналів $A_{S_k}\xi$ можна обчислити за формулами (8), (13)–(15).

Розглянемо задачу середньоквадратичного оптимального оцінювання функціоналів

$$A_{S_3}\xi = \sum_{j=0}^{N} a(j)\xi(j) + \sum_{j=N+M_2+1}^{N+M_2+N_2} a(j)\xi(j),$$

$$A_{S_4}\xi = \sum_{j=-M_1-N_1}^{-M_1-1} a(j)\xi(j) + \sum_{j=0}^{N} a(j)\xi(j) + \sum_{j=N+M_2+1}^{N+M_2+N_2} a(j)\xi(j),$$

від невідомих значень стаціонарної послідовності $\xi(j)$, $j \in \mathbb{Z}$, за даними спостережень послідовності в точках $j \in S_k$, де

$$S_3 = Z \setminus (\{0, \ldots, N\} \cup \{N + M_2 + 1, \ldots, N + M_2 + N_1\}),$$

$$S_4 = Z \setminus (\{-M_1 - N_1, \ldots, -M_1 - 1\} \cup \{0, \ldots, N\} \cup \{N + M_2 + 1, \ldots, N + M_2 + N_1\}).$$

Позначимо $\vec{a}_3^{\,\mathrm{T}} = (\vec{a}_N^{\,\mathrm{T}}, \vec{a}_{N+M_2+1}^{\,N_2\mathrm{T}})$, $\vec{a}_4^{\,\mathrm{T}} = (\vec{a}_N^{\,\mathrm{T}}, \vec{a}_{-M_1-1}^{\,N_1\mathrm{T}}, \vec{a}_{N+M_2+1}^{\,N_2\mathrm{T}})$ вектори, утворені з коефіцієнтів $a(j)$:

$$\vec{a}_N^{\,\mathrm{T}} = (a(0), a(1), \ldots, a(N)), \; \vec{a}_{-M_1-1}^{\,N_1\mathrm{T}} = (a(-M_1 - 1), a(-M_1 - 2), \ldots, a(-M_1 - N_1)),$$

$$\vec{a}_{N+M_2+1}^{\,N_2\mathrm{T}} = (a(N + M_2 + 1), a(N + M_2 + 2), \ldots, a(N + M_2 + N_2)).$$

Нехай $B_{S_3} = \begin{pmatrix} B_1 & B_5 \\ B_6 & B_7 \end{pmatrix}$, $B_{S_4} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_5 \\ B_3 & B_4 & B_8 \\ B_6 & B_9 & B_7 \end{pmatrix}$ — матриці, що утворені коефіцієнтами Фур'є функції $(f(\lambda))^{-1}$:

$$B_1(i, j) = b(i - j), \; 0 \le i, j \le N, B_4(i, j) = b(j - i), \; 0 \le i, j < N_1,$$

$$B_2(i, j) = b(M_1 + 1 + i + j), \; 0 \le i \le N, \; 0 \le j < N_1,$$

$$B_3(i, j) = b(-M_1 - 1 - i - j), \; 0 \le j \le N, \; 0 \le i < N_1,$$

$$B_5(i, j) = b(-N - M_2 - 1 + i - j), \; 0 \le i \le N, \; 0 \le j < N_2,$$

$$B_6(i, j) = b(N + M_2 + 1 + i - j), 0 \le j \le N, 0 \le i < N_2 \;,$$

$$B_7(i, j) = b(i - j), 0 \le i, j < N_2,$$

$$B_8(i, j) = b(-N - M_2 - 1 - j - M_1 - 1 - i), \; 0 \le i < N_1, \; 0 \le j < N_2,$$

$$B_9(i, j) = b(N + M_2 + 1 + i + M_1 + 1 + j), \; 0 \le i < N_1, \; 0 \le j < N_2.$$

**Наслідок 1**. Нехай $\xi(j)$ — стаціонарна стохастична послідовність, що має спектральну щільність $f(\lambda)$, яка задовольняє умову мінімальності (1). Середньоквадратичні похибки $\Delta(h_k, f)$ та спектральні характеристики $h_k(e^{i\lambda})$ оптимальних лінійних оцінок $\hat{A}_{S_k}\xi$ функціоналів $A_{S_k}\xi$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)$ для $j \in S_k$, де $k = 3, 4$, можна обчислити так:

$$h_3(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{N} a(j) e^{ij\lambda} + \sum_{j=N+M_2+1}^{N+M_2+N_2} a(j) e^{ij\lambda} -$$

$$-\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} b(m) e^{im\lambda}\right)\left(\sum_{j=0}^{N} (B_{S_3}^{-1}\vec{a}_3)(j) e^{ij\lambda} + \sum_{j=N+M_2+1}^{N+M_2+N_2} (B_{S_3}^{-1}\vec{a}_3)(j) e^{ij\lambda}\right), \quad (16)$$

$$\Delta(h_3; f) = \left\langle B_{S_3}^{-1}\vec{a}_3, \vec{a}_3 \right\rangle, \quad (17)$$

$$h_4(e^{i\lambda}) = \sum_{j=-M_1-N_1}^{-M_1-1} a(j) e^{ij\lambda} + \sum_{j=0}^{N} a(j) e^{ij\lambda} + \sum_{j=N+M_2+1}^{N+M_2+N_2} a(j) e^{ij\lambda} -$$

$$-\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} b(m)e^{im\lambda}\right)\times\left(\sum_{j=0}^{N}(B_{S_4}^{-1}\vec{a}_4)(j)e^{ij\lambda}+\sum_{j=-M_1-N-1}^{-M_1-1}(B_{S_4}^{-1}\vec{a}_4)(j)e^{ij\lambda}+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=N+M_2+1}^{N+M_2+N_2}(B_{S_4}^{-1}\vec{a}_4)(j)e^{ij\lambda}\right), \tag{18}$$

$$\Delta(h_4; f)=\left\langle B_{S_4}^{-1}\vec{a}_4, \vec{a}_4\right\rangle. \tag{19}$$

**МІНІМАКСНИЙ (РОБАСТНИЙ) МЕТОД ІНТЕРПОЛЯЦІЇ**

Класичний метод інтерполяції застосовують у випадку, коли точно відома спектральна щільність $f(\lambda)$ послідовності. Однак, як уже зазначалось, на практиці повної інформації про спектральну щільність здебільшого немає. Проте, якщо відомо, що щільність $f(\lambda)$ належить певному класу спектральних щільностей $D$, то доцільно застосовувати мінімаксний підхід. Тоді замість відшукання оцінки, яка була б оптимальною для деякої спектральної щільності, шукають оцінку, яка мінімізує величину похибки водночас для всіх спектральних щільностей із даного класу $D$.

**Означення 1**. Для заданого класу спектральних щільностей $D$ спектральна щільність $f_k^0(\lambda)\in D$ називається найменш сприятливою в $D$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_{S_k}\xi$, якщо

$$\Delta(f_k^0)=\Delta(h_k(f_k^0); f_k^0)=\max_{f\in D}\Delta(h_k(f); f).$$

**Означення 2**. Для заданого класу спектральних щільностей $D$ спектральна характеристика $h_k^0(e^{i\lambda})$ оптимальної оцінки функціонала $A_{S_k}\xi$ називається мінімаксною (робастною), якщо

$$h_k^0(e^{i\lambda})\in H_D^k=\bigcap_{f\in D} L_2^{S_k}(f),\quad \min_{h\in H_D^k}\max_{f\in D}\Delta(h; f)=\max_{f\in D}\Delta(h_k^0; f).$$

**Лема 1**. Спектральна щільність $f_k^0(\lambda)\in D$ найменш сприятлива в класі $D$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_{S_k}\xi$, $k=1,3,4$, якщо коефіцієнти Фур'є функції $(f_k^0(\lambda))^{-1}$ задають матрицю $B_{S_k}^0$, що визначає розв'язок екстремальної задачі

$$\max_{f\in D}\left\langle B_{S_k}^{-1}\vec{a}_k, \vec{a}_k\right\rangle=\left\langle B_{S_k}^{0-1}\vec{a}_k, \vec{a}_k\right\rangle. \tag{20}$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h_k^0=h_k(f_k^0)$ обчислюється за формулами (13), (16), (18) за умови, що $h_k(f_k^0)\in H_D^k$.

**Лема 2**. Спектральна щільність $f_2^0(\lambda)\in D$ найменш сприятлива в класі $D$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_{S_2}\xi$, якщо коефіцієнти Фур'є функції $(f_2^0(\lambda))^{-1}$ задають матриці $B_k^0$, що визначають розв'язок екстремальної задачі

$$\max_{f\in D}(\langle\vec{c}_N,\vec{a}_N\rangle+\langle\vec{c}_{-M_1-1},\vec{a}_{-M_1-1}\rangle+\langle\vec{c}_{N+M_2+1},\vec{a}_{N+M_2+1}\rangle)=$$

$$=\langle\vec{c}^{\,0}_N,\vec{a}_N\rangle+\langle\vec{c}^{\,0}_{-M_1-1},\vec{a}_{-M_1-1}\rangle+\langle\vec{c}^{\,0}_{N+M_2+1},\vec{a}_{N+M_2+1}\rangle. \qquad (21)$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h_2^0=h_2(f_2^0)$ обчислюється за формулою (8) за умови, що $h_2(f_2^0)\in H_D^2$.

Найменш сприятлива спектральна щільність $f_k^0$ та мінімаксна спектральна характеристика $h_k^0$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h;f)$ на множині $H_D^k\times D$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta(h;f_k^0)\ge\Delta(h_k^0;f_k^0)\ge\Delta(h_k^0;f)\ \ \forall f\in D,\ \forall h\in H_D^k$$

виконуються, якщо $h_k^0=h_k(f_k^0)$ та $h_k(f_k^0)\in H_D^k$, де $f_k^0$ — розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\widetilde{\Delta}_k(f)=-\Delta(h_k^0;f)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|C_k^0(e^{i\lambda})\right|^2\frac{f(\lambda)}{(f_k^0(\lambda))^2}d\lambda\to\inf,\ f(\lambda)\in D, \qquad (22)$$

де

$$C_1^0(e^{i\lambda})=\sum_{j=0}^{N}(B_{S_1}^{0-1}\vec{a}_1)(j)e^{ij\lambda}+\sum_{j=N+M_2+1}^{\infty}(B_{S_1}^{0-1}\vec{a}_1)(j)e^{ij\lambda},$$

$$C_2^0(e^{i\lambda})=\sum_{j=-\infty}^{M_1-1}c^0(j)e^{ij\lambda}+\sum_{j=0}^{N}c^0(j)e^{ij\lambda}+\sum_{j=N+M_2+1}^{\infty}c^0(j)e^{ij\lambda},$$

$$C_3^0(e^{i\lambda})=\sum_{j=0}^{N}(B_{S_3}^{0-1}\vec{a}_3)(j)e^{ij\lambda}+\sum_{j=N+M_2+1}^{N+M_2+N_2}(B_{S_3}^{0-1}\vec{a}_3)(j)e^{ij\lambda},$$

$$C_4^0(e^{i\lambda})=\sum_{j=0}^{N}(B_{S_4}^{0-1}\vec{a}_4)(j)e^{ij\lambda}+\sum_{j=-M_1-N-1}^{-M_1-1}(B_{S_4}^{0-1}\vec{a}_4)(j)e^{ij\lambda}+$$

$$+\sum_{j=N+M_2+1}^{N+M_2+N_2}(B_{S_4}^{0-1}\vec{a}_4)(j)e^{ij\lambda}.$$

Задача на умовний екстремум (22) еквівалентна задачі на безумовний екстремум

$$\Delta_D^k(f)=\widetilde{\Delta}_k(f)+\delta(f|D)\to\inf,$$

де $\delta(f|D)$ — індикаторна функція множини $D$. Розв'язок $f_k^0$ цієї задачі характеризується умовою $0\in\partial\Delta_D^k(f_k^0)$, де $\partial\Delta_D^k(f_k^0)$ — субдиференціал опуклого функціонала $\Delta_D^k(f)$. Ця умова дає змогу відшукати найменш сприятливі спектральні щільності для конкретних класів $D$ [17, 18]. Зауважимо, що вигляд функціонала $\Delta(h_k^0;f)$ зручний для застосування методу невизначених множників Лагранжа до визначення розв'язку задачі (22). Використовуючи метод множників Лагранжа і вигляд субдиференціала індикаторної функції, можна описати відношення, які визначають найменш сприятливі спектральні щільності в деяких класах спектральних щільностей.

### НАЙМЕНШ СПРИЯТЛИВІ СПЕКТРАЛЬНІ ЩІЛЬНОСТІ В КЛАСІ $D_0^-$

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціоналів $A_{S_1}\xi$, $A_{S_2}\xi$ від невідомих значень стаціонарної послідовності $\xi(j)$, що має спектральну щільність з класу

$$D_0^- = \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\lambda) d\lambda \geq p \right. \right\},$$

де $p$ — задане число, а послідовність $a(k)$, $k \in Z \setminus S_k$, що визначає функціонал $A_{S_k}\xi$, строго позитивна [19]. Щоб знайти розв'язок задачі (22), використаємо метод невизначених множників Лагранжа. Отримаємо такі рівняння:

$$\left| C_k^0(e^{i\lambda}) \right|^2 ((f_k^0(\lambda))^2)^{-1} = \alpha_k^2 ((f_k^0(\lambda))^2)^{-1},$$

де $\alpha_k^2$ — невідомі множники Лагранжа. Звідси маємо, що коефіцієнти Фур'є функцій $(f_k^0(\lambda))^{-1}$ задовольняють рівняння

$$\left| \sum_{j=0}^{N} c(j) e^{ij\lambda} + \sum_{j=N+M_2+1}^{\infty} c(j) e^{ij\lambda} \right|^2 = \alpha_1^2, \tag{23}$$

$$\left| \sum_{j=-\infty}^{M_1-1} c(j) e^{ij\lambda} + \sum_{j=0}^{N} c(j) e^{ij\lambda} + \sum_{j=N+M_2+1}^{\infty} c(j) e^{ij\lambda} \right|^2 = \alpha_2^2, \tag{24}$$

де $c(j)$, $j \in Z \setminus S_1$, — координати вектора $\vec{c}_1$, що задовольняє рівняння $B_{S_1}^0 \vec{c}_1 = \text{а}_1$, матриця $B_{S_1}^0$ утворена з коефіцієнтів Фур'є функції $(f_1^0(\lambda))^{-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_1^0(k) e^{ij\lambda}$, значення $c(j)$, $j \in Z \setminus S_2$, — координати векторів $\vec{c}_N$, $\vec{c}_{-M_1-1}$, $\vec{c}_{N+M_2+1}$, що задовольняють рівняння

$$\vec{a}_N = B_1^0 \vec{c}_N + B_2^0 \vec{c}_{-M_1-1} + B_5^0 \vec{c}_{N+M_2+1},$$

$$\vec{a}_{-M_1-1} = B_3^0 \vec{c}_N + B_4^0 \vec{c}_{-M_1-1} + B_8^0 \vec{c}_{N+M_2+1},$$

$$\vec{a}_{N+M_2+1} = B_6^0 \vec{c}_N + B_9^0 \vec{c}_{-M_1-1} + B_7^0 \vec{c}_{N+M_2+1},$$

а матриці $B_k^0$ утворені з коефіцієнтів Фур'є функції $(f_2^0(\lambda))^{-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_2^0(k) e^{ij\lambda}$.

Рівняння (23) та рівняння $B_{S_1}^0 \vec{c}_1 = \vec{a}_1$ задовольняють коефіцієнти Фур'є $b_1^0(n) = b_1^0(-n)$, $n \in Z \setminus S_1$, які можна відшукати з рівняння $B_{S_1}^0 \vec{\alpha}_1 = \vec{a}_1$, де

$\vec{\alpha}_1 = (\alpha_1, 0, 0, \ldots)$. Останню рівність можна записати у вигляді системи рівнянь $\alpha_1 b_1^0(n) = a(n)$, $n \in Z \setminus S_1$. З першого рівняння системи ($n = 0$) маємо невідоме $\alpha_1 = a(0)(b_1^0(0))^{-1}$. Внаслідок екстремальної умови (20) і обмеження на спектральні щільності в класі $D_0^-$ отримаємо

$$b_1^0(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f_1^0(\lambda))^{-1}d\lambda = p.$$

Таким чином,

$$b_1^0(n) = b_1^0(-n) = \begin{cases} p\,a(n)(a(0))^{-1}, & n \in Z \setminus S_1; \\ 0, & n \in S_1. \end{cases}$$

Функцію $(f_1^0(\lambda))^{-1}$ можна записати у вигляді

$$(f_1^0(\lambda))^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{-N-M_2-1} b_1^0(n)e^{in\lambda} + \sum_{n=-N}^{N} b_1^0(n)e^{in\lambda} + \sum_{j=N+M_2+1}^{\infty} b_1^0(n)e^{in\lambda}. \quad (25)$$

Базуючись на результаті [19], функцію $(f_1^0(\lambda))^{-1}$ можна представити так:

$$(f_1^0(\lambda))^{-1} = \left|\sum_{j=0}^{\infty}\gamma_{1n}e^{in\lambda}\right|^2, \ \lambda \in [\pi, -\pi], \quad (26)$$

де $\gamma_{1n} = 0$, $n \in \{N+1, \ldots, N+M_2\}$. Мінімаксна спектральна характеристика $h_1(f_1^0)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_{S_1}\xi$ обчислюється за формулою (7), де

$$\sum_{j=0}^{N} c(j)e^{ij\lambda} + \sum_{j=N+M_2+1}^{\infty} c(j)e^{ij\lambda} = \alpha_1 = a(0)p^{-1},$$

тобто

$$h_1(f_2^0) = \sum_{j=0}^{N} a(j)e^{ij\lambda} + \sum_{j=N+M_2+1}^{\infty} a(j)e^{ij\lambda} - \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_1^0(k)e^{ij\lambda}\right)a(0)p^{-1} =$$

$$= -\sum_{j=0}^{N} a(j)e^{-ij\lambda} - \sum_{j=N+M_2+1}^{\infty} a(j)e^{-ij\lambda}. \quad (27)$$

Сформулюємо отриманий результат у вигляді теореми.

**Теорема 2**. Найменш сприятливою спектральною щільністю в класі $D_0^-$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_{S_1}\xi$, що задається строго позитивною послідовністю $a(k)$, $k \in Z \setminus S_1$, є спектральна щільність (25) з коефіцієнтами Фур'є

$$b_1^0(n) = b_1^0(-n) = p\,a(n)(a(0))^{-1}, \ n \in Z \setminus S_1.$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h_1(f_1^0)$ обчислюється за формулою (27). Найменш сприятлива спектральна щільність у класі $D_0^-$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_{S_2}\xi$, що задається строго позитивною послідовністю $a(k)$, $k \in Z \setminus S_2$, задовольняє співвідношення (24) та визначає розв'язок екстремальної задачі (21). Мінімаксна спектральна характеристика $h_2(f_2^0)$ обчислюється за формулою (8).

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціоналів $A_{S_k}\xi$, де $k=3, 4$. Щоб отримати розв'язок задачі (22), використаємо метод невизначених множників Лагранжа. Отримаємо такі рівняння:

$$\left| \sum_{j=0}^{N} c(j)e^{ij\lambda} + \sum_{j=N+M_2+1}^{N+M_2+N_2} c(j)\, e^{ij\lambda} \right|^2 = \alpha_3^2, \qquad (28)$$

$$\left| \sum_{j=-M_1-N_1}^{M_1-1} c(j)e^{ij\lambda} + \sum_{j=0}^{N} c(j)e^{ij\lambda} + \sum_{j=N+M_2+1}^{N+M_2+N_2} c(j)\, e^{ij\lambda} \right|^2 = \alpha_4^2, \qquad (29)$$

де $\alpha_k^2$ — невідомі множники Лагранжа, $c(j)$, $j \in Z \setminus S_k$, — координати векторів $\vec{c}_k$:

$$\vec{c}_3^{\,\mathrm{T}} = (\vec{c}_N^{\,\mathrm{T}} \vec{c}_{N+M_2+1}^{\,N_2\mathrm{T}}),\ \vec{c}_4^{\,\mathrm{T}} = (\vec{c}_N^{\,\mathrm{T}}, \vec{c}_{-M_1-1}^{\,N_1\mathrm{T}}, \vec{c}_{N+M_2+1}^{\,N_2\mathrm{T}}),$$

$$\vec{c}_N^{\,\mathrm{T}} = (c(0), c(1), \ldots, c(N)), \vec{c}_{-M_1-1}^{\,N_1\mathrm{T}} = (c(-M_1-1), c(-M_1-2), \ldots, c(-M_1-N_1)),$$

$$\vec{c}_{N+M_2+1}^{\,N_2\mathrm{T}} = (c(N+M_2+1), c(N+M_2+2), \ldots, c(N+M_2+N_2)),$$

що задовольняють рівняння $B_{S_k}^0 \vec{c}_k = \vec{a}_k$, а матриці $B_{S_k}^0$ утворені з коефіцієнтів Фур'є функції $(f_k^0(\lambda))^{-1}$. Рівняння (23) та рівняння $B_{S_k}^0 \vec{c}_k = \vec{a}_k$ задовольняють коефіцієнти Фур'є

$$b_k^0(n) = b_k^0(-n),\ n \in Z \setminus S_k,\ k = 3, 4,$$

які можна знайти з рівняння $B_{S_k}^0 \vec{\alpha}_k = \vec{a}_k$, де $\vec{\alpha}_3 = (\alpha_3, 0, 0, \ldots, 0)$, $\vec{\alpha}_4 = (0, 0, \ldots, \alpha_4)$. Останню рівність можна записати у вигляді системи рівнянь

$$\alpha_3 b_3^0(n) = a(n), n \in Z \setminus S_3,\ \alpha_4 b_4^0(n-N-M_2-N_2) = a(n), n \in Z \setminus S_4.$$

Звідси для $n=0$ та $n = N+M_2+N_2$ знаходимо невідомі $\alpha_3 = a(0)(b_3^0(0))^{-1}$, $\alpha_4 = a(N+M_2+N_2)(b_4^0(0))^{-1}$ відповідно.

Унаслідок екстремальної умови (20) і обмеження на спектральні щільності в класі $D_0^-$ отримаємо

$$b_k^0(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_k^0(\lambda))^{-1} d\lambda = p.$$

Таким чином,
$$b_3^0(n) = b_3^0(-n) = \begin{cases} p\, a(n)\,(a(0))^{-1}, & n \in Z \setminus S_3; \\ 0, & n \in S_3, \end{cases}$$

$$b_4^0(n-N-M_2-N_2)=b_4^0(N+M_2+N_2-n)=$$

$$=\begin{cases} p\,a(n)(a(N+M_2+N_2))^{-1}, & n\in Z\setminus S_4; \\ 0, & n\in S_4. \end{cases}$$

Функції $(f_k^0(\lambda))^{-1}$, $k=3,4$, можна записати у вигляді

$$(f_3^0(\lambda))^{-1}=\sum_{k=N-M_2-N_2}^{-N-M_2-1} b_3^0(k)e^{ij\lambda}+\sum_{k=-N}^{N} b_3^0(k)e^{ij\lambda}+\sum_{k=N+M_2+1}^{N+M_2+N_2} b_3^0(k)e^{ij\lambda}, \quad (30)$$

$$(f_4^0(\lambda))^{-1}=\sum_{k=-N-M_2-N_2-M_1-N_1}^{-N-M_2-N_2-M_1-1} b_4^0(k)e^{ik\lambda}+\sum_{k=-N-M_2-N_2}^{-M_2-N_2} b_4^0(k)e^{ik\lambda}+$$

$$+\sum_{k=-(N_2-1)}^{N_2-1} b_4^0(k)e^{ik\lambda}+\sum_{k=M_2+N_2}^{N+M_2+N_2} b_4^0(k)e^{ik\lambda}\sum_{k=N+M_2+N_2+M_1+1}^{N+M_2+N_2+M_1+N_1} b_4^0(k)e^{ik\lambda}. \quad (31)$$

Базуючись на результаті [19], функції $(f_k^0(\lambda))^{-1}$, $k=3,4$, можна представити так:

$$(f_k^0(\lambda))^{-1}=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_{kn}e^{-in\lambda}\right|^2, \ \lambda\in[\pi,-\pi], \quad (32)$$

де

$$\gamma_{3n}=0: N+1\le n\le N+M_2,\ n>N+M_2+N_2, \gamma_{4n}=0: N_2\le n< M_2+N_2,$$
$$N+M_2+N_2<n\le N+M_2+N_2+M_1,\ n>N+M_2+N_2+M_1+N_1.$$

Мінімаксні спектральні характеристики $h_k(f_k^0)$ оптимальної лінійної оцінки функціоналів $A_{S_k}\xi$, $k=3,4$, обчислюються за формулами

$$h_3(f_3^0)=-\sum_{j=1}^{N}a(j)e^{-ij\lambda}-\sum_{j=N+M_2+1}^{N+M_2+N_2}a(j)e^{-ij\lambda}, \quad (33)$$

$$h_4(f_4^0)=-\sum_{j=1}^{N_2-1}a(N+M_2+N_2-j)e^{i(N+M_2+N_2+j)\lambda}-$$

$$-\sum_{j=M_2+N_2}^{N+M_2+N_2}a(N+M_2+N_2-j)e^{i(N+M_2+N_2+j)\lambda}-$$

$$-\sum_{j=N+M_2+N_2+M_1+1}^{N+M_2+N_2+M_1+N_1}a(N+M_2+N_2-j)e^{i(N+M_2+N_2+j)\lambda}, \quad (34)$$

**Наслідок 1.** Найменш сприятливими спектральними щільностями в класі $D_0^-$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціоналів $A_k\xi$, $k=3,4$, що задаються строго позитивною послідовністю $a(n)$, $n \in Z \setminus S_k$, є спектральні щільності (30), (31) з коефіцієнтами Фур'є

$$b_3^0(n) = b_3^0(-n) = p\,a(n)(a(0))^{-1}, \; n \in Z \setminus S_3,$$

$$b_4^0(n - N - M_2 - N_2) = b_4^0(N + M_2 + N_2 - n) =$$

$$= p\,a(n)(a(N + M_2 + N_2))^{-1}, n \in Z \setminus S_4.$$

Мінімаксні спектральні характеристики $h_k(f_k^0)$ обчислюються за формулами (33), (34).

**ВИСНОВКИ**

У запропонованій статті наведено методи розв'язання задачі оптимального лінійного оцінювання функціоналів від невідомих значень стохастичної стаціонарної послідовності.

Задачу досліджено для випадку спектральної визначеності, коли спектральні щільності послідовностей точно відомі. Тож запропоновано підхід, заснований на методі ортогональних проєкцій у Гільбертовому просторі. Виведено формули для обчислення спектральних характеристик та середньоквадратичних похибок оптимальних оцінок функціоналів. У випадку спектральної невизначеності, коли спектральні щільності точно не відомі, а задаються деякі класи допустимих спектральних щільностей, застосовується мінімаксно-робастний метод. Отримано зображення середньоквадратичної похибки у вигляді лінійного функціонала відносно спектральних щільностей, що надає змогу розв'язати відповідну задачу умовної оптимізації та описати мінімаксні (робастні) оцінки функціоналів. Виведено формули, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксну (робастну) спектральну характеристику оптимальних лінійних оцінок функціоналів для певних класів допустимих спектральних щільностей.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. Kolmogorov A.N. In: Shiryayev A.N. (Eds.) Selected works by A.N. Kolmogorov. Vol. II: Probability theory and mathematical statistics, Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1992. 579 p. URL: https://www.springer.com/gp/book/9789401050036.
2. Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. With engineering applications. The M. I. T. Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1966. 163 p. URL: https://mitpress.mit.edu/books/extrapolation-interpolation-and-smoothing-stationary-time-series.
3. Yaglom A.M. Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 1, 2. Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York etc., 1987.
4. Rozanov Yu.A. Stationary stochastic processes. San Francisco; Cambridge; London; Amsterdam: Holden-Day, 1967. 211 p. URL: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01621459.1968.11009342.
5. Hannan E.J. Multiple time series. New York: John Wiley and Sons, 1970. 536 p. https://doi.org/10.1002/9780470316429.
6. Vastola K.S., Poor H.V. An analysis of the effects of spectral uncertainty on Wiener filtering. *Automatica*. 1983. Vol. 28. P. 289–293. https://doi.org/10.1016/0005-1098(83)90105-X.

7. Grenander U. A prediction problem in game theory. *Ark. Mat.* 1957. Vol. 6. P. 371–379. https://doi.org/10.1007/BF02589429.
8. Kassam S.A., Poor H.V. Robust techniques for signal processing: A survey. *Proc. IEEE.* 1985. Vol. 73, N. 3. P. 433–481. https://doi.org/10.1109/PROC.1985.13167.
9. Liu Y., Xue Yu., Taniguchi, M. Robust linear interpolation and extrapolation of stationary time series in Lp. *J. Time Ser. Anal.* 2020. Vol. 41, N 2. P. 229–248. https://doi.org/10.1111/ jtsa.12502.
10. Luz M., Moklyachuk M. Estimation of Stochastic Processes with Stationary Increments and Cointegrated Sequences. London: ISTE; Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, 2019. 282 p. https://onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/9781119663539.
11. Moklyachuk M.P. Minimax-robust estimation problems for stationary stochastic sequences. *Stat., Optim. Inf. Comput.* 2015. Vol. 3, N 4. P. 348–419. https://doi.org/ 10.19139/soic. v3i4.173.
12. Moklyachuk M.P., Golichenko I.I. Periodically correlated processes estimates. Saarbrucken: LAP Lambert Academic Publishing. 2016. 308 p. https://www.lap-publishing.com/catalog/ details//store/gb/book/978-3-659-88507-5/periodically-correlated-processes-estimates.
13. Moklyachuk M.P., Masyutka A.Yu. Minimax-robust estimation technique for stationary stochastic processes. Saarbrucken: LAP Lambert Academic Publishing, 2012. 296 p. URL: https://www.amazon.co.uk/Minimax-robust-estimation-technique-Mikhail-Moklyachuk/dp/365919817X.
14. Moklyachuk M.P., Sidei M.I., Masyutka, O.Yu. Estimation of stochastic processes with missing observations. New York: Nova Science Publishers, 2019. 334 p. https://novapublishers.com/shop/estimates-of-stochastic-processes-with-missing-observations.
15. Gikhman I.I., Skorokhod A.V. The theory of stochastic processes. I. Berlin: Springer, 2004. 574 p. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-61943-4.
16. Salehi H. Algorithms for linear interpolator and interpolation error for minimal stationary stochastic processes. *Ann. Probab.* 1979. Vol. 7, N 5. P. 840–846. https://www.jstor.org/ stable/2243305.
17. Pshenichnyj B.N. Necessary conditions of an extremum, Pure and Applied mathematics. 4. New York: Marcel Dekker, 1971. 248 p. https://www.routledge.com/Necessary-Conditions-for-an-Extremum/Pshenichnyi/p/book/9780367452124.
18. Rockafellar R.T. Convex analysis. Princeton: NJ: Princeton University Press, 1997. 451 p. https://press.princeton.edu/books/paperback/9780691015866/convex-analysis.
19. Krein M.G., Nudelman A.A. The Markov moment problem and extremal problems. Translations of Mathematical Monographs. Vol. 50. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1977. 417 p.

**O.Yu. Masyutka, M.P. Moklyachuk**

**ON THE PROBLEM OF MINIMAX INTERPOLATION OF STATIONARY SRQUENCES**

**Abstract.** The problem of the mean-square optimal estimation of the linear functionals that depend on the unknown values of a stochastic stationary sequence from observations of the sequence with missing values is considered. Formulas for calculating the mean-square error and the spectral characteristic of the optimal linear estimate of the functionals are derived under the condition of spectral determinacy, where the spectral density of the sequence is exactly known. The minimax (robust) method of estimation is applied in the case where the spectral density of the sequence is not known exactly while some sets of admissible spectral densities are given. Formulas that determine the least favourable spectral densities and the minimax spectral characteristics are derived for some special sets of feasible densities.

**Keywords:** stationary sequence, minimax-robust estimate, least favourable spectral density, minimax spectral characteristic.

*Надійшла до редакції 14.06.2021*