УДК 517.983.54; 519.67; 539.122

В.М. СТАРКОВ
Інститут фізики НАН України, Київ, Україна, e-mail: *vjachnikstar@gmail.com*.

МЕТОДИ РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ НЕКОРЕКТНО ПОСТАВЛЕНИХ ЗАДАЧ КВАНТОВОЇ ОПТИКИ

Анотація. На прикладі конкретної фізичної задачі редукції шуму, зумовленого втратами, темновими відліками і фоновим випромінюванням, у статистиці фотовідліків квантового світла наведено короткий виклад методів регуляризації некоректних задач. Математичне формулювання задачі представлено операторним рівнянням першого роду. Показано, що оператор породжений матрицею з елементами рахункової множини. Зазначено, що некоректність за Адамаром реконструкції статистики кількості фотонів квантового світла спричинена компактністю оператора математичної моделі. Підкреслено, що проблему стійкого наближення до точного розв'язку операторного рівняння для неточно заданих початкових даних можна розв'язати одним з найбільш відомих методів регуляризації, теоретичні основи якого були закладені в роботах А.М. Тихонова. Розглянуто важливий клас регуляризаторів, який ґрунтується на параметричній системі функцій, що називається породжувальною. Підтверджено, що регуляризатори цього класу дають змогу досягти оптимального порядку точності для рівнянь з витокоуявними розв'язками.

Ключові слова: некоректна задача, квантова оптика, оператор, регуляризація, алгоритм, фотон.

ВСТУП

Останнім часом істотно зріс інтерес до дослідження процесів і явищ у квантовій фізиці. Найважливішим напрямом фундаментальних досліджень квантової фізики є визначення характеристик квантового світла. Це зумовлено суттєвим прогресом у галузі квантової оптики і квантового оброблення інформації. Однією з найбільш змістовних відповідей на вимогу часу є робота [1], написана колективом 14 вельми компетентних авторів, які представляють наукові центри трьох країн. Список використаних у ній джерел складається з 89 посилань і 17-ю позицією у ньому є посилання на нашу роботу [2]. Пояснення інтересу до [2] викладено у такій цитаті [1]:

«*Визначення характеристик квантового світла — основна проблема, з якою стикаються під час реалізації таких класично нездійсненних задач, як протоколи квантового зв'язку [1–3]. На більш фундаментальному рівні вивчення особливостей квантованих полів випромінювання дає змогу глибоко зрозуміти роль квантової фізики у природі в цілому та її відмінностей від класичних хвильових теорій зокрема. Як і у класичних системах, квантово-оптичні розподіли у фазовому просторі забезпечують універсальний інструмент для прямої візуалізації таких унікальних властивостей некласичного світла, які, наприклад, проявляються у разі стискання [4–6]. До того ж, від'ємність у деяких функціях фазового простору безпосередньо вказує на квантові властивості світла (див., наприклад, [7–12]). З наведених причин представлення квантового світла у фазовому просторі є одним із методів, які найчастіше застосовуються для отримання характеристик некласичного світла. Проте оцінювання розподілів у фазовому просторі за експериментальними даними є складним завданням. Отже, ця проблема реконструкції стала поштовхом до* *проведення широких досліджень [13–15], що спричинило використання таких складних аналітичних інструментів, як розв'язування задач інверсії [16, 17], використання шаблонних розбіжних функцій (diverging pattern functions) [18, 19], оцінювання максимальної правдоподібності [20–22], а також розпізнавання образів даних [23, 24].*

У цій статті ми оминаємо проблему реконструкції, розробляючи протокол вимірювання, що забезпечує незалежні від детектора розподіли фазового простору (DAPS), які можуть бути безпосередньо оцінені, охоплюють відомі квазіймовірності і застосовуються до довільних квантових станів світла. Ми демонструємо нашу схему з датчиками перехідного краю (TES), які мають складну фізику, що лежить в основі їхньої роботи, та аналізуємо дані, не спираючись на жодні конкретні моделі детекторів. Наші функції DAPS виявляють некласичні особливості, очікувані від оголошених багатофотонних станів з високою статистичною значущістю. До того ж, вимірювання вакууму як такого дає нам змогу передбачити унікальні структури розподілів DAPS, що продемонстровано для наших експериментально згенерованих станів».

З наведеної цитати випливає важливий висновок. Автори [1] запропонували принципово новий протокол вимірювання з використанням схеми з датчиками перехідного краю, які мають складну фізику, що лежить в основі їхньої роботи, і дають змогу виключити будь-які конкретні моделі детекторів. Зроблено це було для того, щоб, зокрема, уникнути використання «складних аналітичних інструментів» (методів регуляризації) для розв'язання задач інверсії. Іншими словами, можна сказати, що простіше і легше зробити інтелектуальний ривок і запропонувати новий напрямок [1] дослідження характеристик квантового світла.

Дещо інший спосіб подолання проблеми некоректності задачі розглянуто у роботі [3], яка також містить посилання на нашу роботу [2]. У [3] описано систему вимірювання, до складу якої входять реконструйовний детектор з розділенням кількості фотонів PNRD (PhotonNumber-Resolving Detector), оптимальна електронна схема та спеціалізований алгоритм оброблення даних. Математичну модель фізичної задачі представлено нескінченною системою лінійних алгебраїчних рівнянь. Основою алгоритму оброблення даних у [3] є нетрадиційний оригінальний (авторський) метод регуляризації для відновлення статистики фотонів, що ґрунтується на ентропії максимального очікування і реалізований у конструкції PNRD.

З огляду на зазначені роботи з квантової оптики можна дійти таких висновків. Передусім, очевидно, фізики не мають досить повного уявлення про сучасні методи регуляризації некоректно поставлених задач. Водночас відсутність глибокого уявлення про методи регуляризації є потужним імпульсом для пошуку принципово нових варіантів дослідження властивостей квантового світла [1] або для розроблення нетрадиційних алгоритмів інверсії нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь [3]. Тому пропонована робота є досить актуальною.

1. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕОРЕТИЧНОЇ МОДЕЛІ ФІЗИЧНОЇ ЗАДАЧІ

Оскільки у роботах [2, 3] математичні моделі фізичних задач представлено у вигляді відповідних нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, далі розглянемо систему рівнянь, отриману А.О. Семеновим [2, 4] на основі теорії фотоелектричного детектування. Підґрунтям процесу фотодетектування є фотоелектричний ефект: атоми детектора випромінюють електрони під впливом світла. Теорія фотодетектування зумовлює основний експериментальний результат таких досліджень — функцію розподілу кількості фотовідліків P_m, яка містить інформацію про втрати, пов'язані з неідеальністю квантового виходу η і наявністю темнових відліків. Для того, щоб мати змогу аналізувати безпосередньо світлове випромінювання, потрібно вилучити спотворювальну інформацію під час роботи з істинною функцією розподілу кількості фотонів p_n.

Теоретичну модель цієї фізичної задачі можна сформулювати у такий спосіб. Розподіл ймовірністі фотовідліків P_m для кінцевого квантового виходу детектора η і середньої кількості шумових відліків N_{nc}, пов'язаних з темновим фотострумом і фоновим випромінюванням, визначають виразом [2, 4]

$$P_m = \sum_{n=0}^{\infty} S_{mn}(\eta, N_{nc}) p_n, \tag{1}$$

де S_{mn} — ймовірність реєстрації m фотовідліків у n-му фотонному стані, p_n — апріорна (квантова) ймовірність знаходження цього стану.

Величину S_{mn} обчислюють за формулою

$$S_{mn}(\eta, N_{nc}) = e^{-N_{nc}} N_{nc}^{m-n} \eta^n \frac{n!}{m!} L_n^{m-n}(N_{nc}(1-\eta^{-1})), \ m \geq n,$$

$$S_{mn}(\eta, N_{nc}) = e^{-N_{nc}} (1-\eta)^{n-m} \eta^m L_m^{n-m}(N_{nc}(1-\eta^{-1})), m \leq n,$$

де $L_n^{\alpha}(z)$ — поліном Лагерра.

Щодо квантової ймовірності p_n апріорі є справедливими твердження

$$p_n \geq 0, \tag{2}$$

$$\sum_n p_n = 1. \tag{3}$$

У роботі [4] формально здійснено обернення співвідношення (1) в аналітичний спосіб:

$$p_n = \sum_{n=0}^{\infty} S_{nm}^{-1}(\eta, N_{nc}) P_m, \tag{4}$$

де

$$S_{nm}^{-1}(\eta, N_{nc}) = \eta^{-n} \Phi(m+1, m-n+1; N_{nc}(\eta^{-1}-1)) \times e^{N_{nc}} \binom{m}{n} (1-\eta^{-1})^{m-n}, \ m \geq n,$$

$$S_{nm}^{-1}(\eta, N_{nc}) = \eta^{-n} \Phi(n+1, n-m+1; N_{nc}(\eta^{-1}-1)) \times e^{N_{nc}} \frac{(-N_{nc})^{n-m}}{(n-m)!}, \ m \leq n,$$

є елементами матриці, оберненої до матриці $\{S_{mn}\}$; $\Phi(n, m; z)$ — гіпергеометрична функція Куммера.

У двох граничних випадках вираз (4) можна спростити. Так, у разі відсутності шумових відліків, коли $\overline{N}_{nc} = 0$, він має вигляд [5]

$$p_n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \eta^{-n} (1-\eta^{-1})^{n-m} P_m.$$

У другому випадку, для квантового виходу $\eta = 1$, значення p_n визначають за формулою

$$p_n = e^{N_{nc}} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-N_{nc})^{m-n}}{(m-n)!} P_m.$$

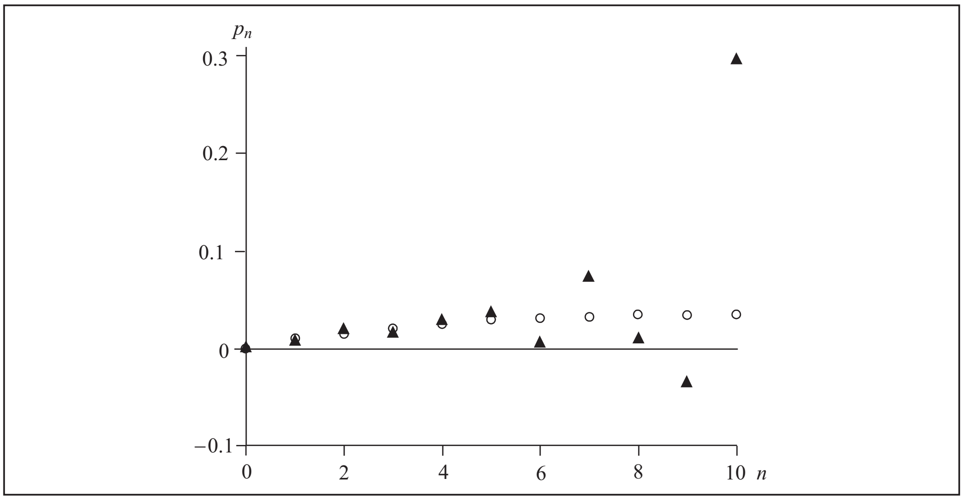

Рис.1. Істинний розподіл (○) кількості фотонів p_n у випадку хаотичного стану світлової моди з доданим фотоном [2] і результат прямого відновлення (▲) кількості фотонів згідно з (4) для $N_{nc} = 0.748$; $\eta = 0.7764$

Під час проведення обчислювальних експериментів [2] встановлено, що вираз (4) як формальне обернення виразу (1) не забезпечує задовільних результатів в умовах реального експерименту, оскільки найменші похибки у статистиці фотовідліків, пов'язані з експериментальною процедурою, спричиняють великі відхилення у статистиці кількості фотонів p_n, що реконструюється (рис. 1).

2. МАТЕМАТИЧНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ПРОБЛЕМИ

Спроба використання аналітичного вразу (4) не дала задовільних результатів, тому запропоновано таке математичне формулювання задачі відновлення статистики кількості фотонів. Зв'язок статистики фотовідліків P_m зі статистикою кількості фотонів p_n можна описати операторним рівнянням

$$u = Av, \;\; u \in U, \;\; v \in V, \tag{5}$$

де оператор A породжений матрицею $\{S_{mn}\}$ з елементами $S_{mn}\,(\eta, N_{nc})$ — ймовірністю реєстрації $m = 0, 1, 2, \ldots$ фотовідліків за наявності $n = 0, 1, 2, \ldots$ фотонів. Для обґрунтування цього твердження використано висновки теореми 1 з [6].

Теорема 1. Для того, щоб матриця $\{S_{mn}\}$ представляла обмежений лінійний оператор, визначений всюди в дійсному Гільбертовому просторі $V = l_2$, необхідно і достатньо, щоб для будь-яких скінченних q і r та для будь-яких $x_0, x_1, \ldots, x_q$; $y_0, y_1, \ldots, y_r$ виконувалася нерівність

$$\left| \sum_{n=0}^{q} \sum_{m=0}^{r} S_{mn} x_n y_m \right| \le M \left(\sum_{n=0}^{q} x_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{r} y_m^2 \right)^{1/2},$$

де M — фіксоване число; $x_0, x_1, \ldots, x_q$ — компоненти вектора $f = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e_k \in l_2$; $y_0, y_1, \ldots, y_r$ — компоненти вектора $g = \sum_{k=0}^{\infty} y_k e_k \in l_2$; $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ — ортонормований базис в l_2.

Оскільки замість точних значень $S_{mn}(\eta, N_{nc})$ і P_m зазвичай відомі лише їхні наближення $\widetilde{S}_{mn}(\eta, N_{nc})$ і $\widetilde{P}_m$, під час проведення обчислювальних експериментів перевірці підлягає насамперед дотримання нерівності

$$\left| \sum_{n=0}^{q} \sum_{m=0}^{r} \widetilde{S}_{mn} x_n y_m \right| \le M \left(\sum_{n=0}^{q} x_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{r} y_m^2 \right)^{1/2}. \qquad (6)$$

У разі підтвердження виконання умов (6) вихідну систему рівнянь (1) можна записати у вигляді наближеного операторного рівняння з рівнем похибок h і δ:

$$A_h v = u_\delta, \ u_\delta \in U, \ v \in V. \qquad (7)$$

При цьому $|| u - u_\delta || \le \delta$, $|| A - A_h || \le h$. Умови (6) будуть завідомо виконані, якщо виявиться справедливим таке співвідношення:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{S}_{mn} x_n y_m \right| = | (A_h f, g) | \le M \, || f || \, || g ||.$$

Найважливішим етапом дослідження властивостей лінійного матричного оператора A_h є визначення його компактності (цілком неперервності). Достатньою, але не необхідною умовою компактності оператора A_h є скінченність його абсолютної норми або збіжність ряду [6]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{S}_{mn}^{\,2} < \infty. \qquad (8)$$

У разі дотримання умови (8) можна стверджувати, що рівняння (7) є операторним рівнянням першого роду, де $A_h \in \Lambda(V, U)$ —лінійний компактний оператор, що діє з Гільбертового простору $V = l_2$ у Гільбертів простір $U = l_2$, $u_\delta = \{\widetilde{P}_0, \widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2, \ldots, \widetilde{P}_m, \ldots\} \in U$ — заданий елемент; $v = \{p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\} \in V$ — шуканий елемент, $\Lambda(V, U)$ — простір усіх обмежених лінійних операторів, визначених на V.

Компактність оператора A_h має принципове значення під час вибору методу і побудови алгоритму розв'язування операторного рівняння першого роду (7), оскільки у нескінченновимірному просторі V компактний оператор A_h не може мати обмеженого оберненого оператора A_h^{-1} у просторі U [7]. Це означає, що формальне обернення виразу (1) або спроба пошуку розв'язку задачі (7) у вигляді $v = A_h^{-1} u_\delta$ не забезпечують задовільних результатів в умовах реального експерименту, оскільки нескінченно малі варіації у статистиці фотовідліків P_m, пов'язані з експериментальною процедурою, призводять до як завгодно великих відхилень у статистиці кількості фотонів p_n, що реконструюється. Отже, розв'язок задачі (7) є нестійким, а задача є некоректно поставленою [8–12].

3. МЕТОДИ РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ НЕКОРЕКТНИХ ЗАДАЧ

Для подолання проблеми некоректності задачі до розгляду введено регуляризувальний оператор (регуляризатор) $R_\alpha(\delta, h, A_h)$ [8] такий, що

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ h \to 0}} \ \sup_{A_h : \|A - A_h\|_{V \to U} \le h} \ \sup_{u_\delta : \|u - u_\delta\|_U \le \delta} \ \inf_{v \in A^{-1} u} || v - R_\alpha(\delta, h, A_h) u_\delta ||_V = 0,$$

де $A^{-1} u$ — повний прообраз елемента u, α —параметр регуляризації.

Набір усіх регуляризаторів позначимо $\mathfrak{R}$.

У випадку експериментальних досліджень у лазерній фізиці, нелінійній оптиці, квантовій оптиці замість точних значень A і u відомі лише їхні наближення з рівнем похибок h і δ: $\| u - u_\delta \| \le \delta$, $\| A - A_h \| \le h$, тобто замість (5) розв'язують наближене операторне рівняння $A_h v = u_\delta$, $u_\delta \in U$, $A_h \in \Lambda(V, U)$.

Надалі вважатимемо, що елемент u у рівнянні (5) належить області значень $\mathrm{Range}\,(A)$ оператора A, тобто $u \in \mathrm{Range}(A)$, а нуль-простір $\mathrm{Ker}\,(A) = \{v \in V: A(v) = 0\}$ оператора A не є порожнім ($\mathrm{Ker}(A) \ne 0$).

Конструктивне розв'язування задачі полягає в апроксимації нормального розв'язку рівняння (5) (чи розв'язку (5) з найменшою нормою в просторі V) $v^\dagger \in \mathrm{Range}\,(A^\dagger) = \overline{\mathrm{Range}\,(A^*)} = \mathrm{Ker}\,(A)^\perp$ наближеним розв'язком рівняння (7). При цьому враховують, що $A^\dagger$ — лінійний оператор, псевдообернений до оператора A, такий, що $A^\dagger: \mathrm{Range}\,(A) \oplus \mathrm{Range}\,(A)^\perp \to V$, $\mathrm{Range}\,(A^\dagger) = \overline{\mathrm{Range}\,(A^*)} = \mathrm{Ker}\,(A)^\perp$, $A^\dagger$ — неперервний оператор, якщо $\mathrm{Range}\,(A) = \overline{\mathrm{Range}\,(A)}$.

Справедливим є таке твердження [12]: нормальний розв'язок $v^\dagger = A^\dagger u$ ($u \in \mathrm{Range}\,(A) \oplus \mathrm{Range}\,(A)^\perp$) є єдиним розв'язком рівняння $A^* A v = A^* u$, $v \in \overline{\mathrm{Range}\,(A^*)}$.

Зазвичай математичні моделі (5) в експериментальних дослідженнях лазерної фізики, нелінійної оптики, квантової оптики мають таку властивість: $\mathrm{Range}\,(A) \ne \overline{\mathrm{Range}\,(A)}$ (наприклад, A — лінійний компактний оператор), тобто задача розв'язування операторного рівняння $Av = u$ є некоректно поставленою. Розв'язати задачу стійкого наближення до точного розв'язку рівняння (5) у випадку неточно заданих початкових даних $u_\delta \in U$, $A_h \in \Lambda(V, U)$, $\| u - u_\delta \| \le \delta$, $\| A - A_h \| \le h$ з відомими δ і h можна лише одним з методів регуляризації. Серед них найвідомішим є метод, теоретичні основи якого були закладені в роботах А.М. Тихонова [8]. Відповідно до цього методу для розв'язання (7) уводять згладжувальний функціонал (параметричний функціонал Тихонова) [8]:

$$\Phi_\alpha[v, u_\delta] = \| A_h v - u_\delta \|_U^2 + \alpha \Omega[v], \tag{9}$$

де $\Omega[v]$ — стабілізувальний функціонал (стабілізатор, зазвичай $\Omega[v] = \| v \|_V^2$); $1 > \alpha > 0$ — параметр регуляризації, $\| A_h v - u_\delta \|_U$ — нев'язка рівняння (7) на елементі v. Визначають елемент v_α такий, що функціонал (9) має на ньому мінімальне значення, тобто

$$\Phi_\alpha[v_\alpha, u_\delta] = \inf_{v \in V} \Phi_\alpha[v, u_\delta]. \tag{10}$$

Якщо у функціоналі Тихонова (9) $\Omega[v] = \| v \|_V^2$, то рівняння Ейлера набуває досить простого вигляду: $\alpha v_\alpha + A_h^* A_h v_\alpha = A_h^* u_\delta$. При цьому

$$v_\alpha = (\alpha E + A_h^* A_h)^{-1} A_h^* u_\delta = R_\alpha u_\delta, \tag{11}$$

де $R_\alpha = (\alpha E + A_h^* A_h)^{-1} A_h^*$.

Для $\delta, h \to 0$ має виконуватися і $\alpha \to 0$ унаслідок визначення регуляризатора. Тому як розв'язок задачі (10) слід брати

$$v^\dagger = \lim_{\alpha \to 0} (\alpha E + A^* A)^{-1} A^* u, \tag{12}$$

для $\Omega[v] = \| v \|_V^2$.

Розв'язок (12) є нормальним розв'язком, тобто для точних значень v і A з усіх розв'язків рівняння $Av = u$, $v \in V$, $u \in U$, у методі Тихонова вибирають нормальний розв'язок. Формулу (12) можна записати інакше: $v^{\dagger} = A^{\dagger} u$, де $A^{\dagger} = \lim\limits_{\alpha \to 0} (\alpha E + A^* A)^{-1} A^*$ — оператор, псевдообернений до A. Якщо $\delta \neq 0$ і/або $h \neq 0$, то метод визначає розв'язок v_{α}, який є наближенням до нормального розв'язку $v^{\dagger}$. Справедливим є таке твердження [12].

Теорема 2. Нехай $v^{\dagger} \in V$ — нормальний розв'язок рівняння (5). У межах методу (11), якщо $\alpha(\delta, h) \to 0$ так, що $\lim\limits_{\delta, h \to 0} \dfrac{h^2 + \delta^2}{\alpha(\delta, h)} = 0$, то $\lim\limits_{\delta, h \to 0} || v_{\alpha(\delta, h)} - v^{\dagger} || = 0$.

Зазвичай для розв'язання складної задачі пропонують декілька методів. Це повною мірою стосується і некоректно поставленої задачі. При цьому виникає природне питання щодо визначення точності використовуваного методу наближеного розв'язування некоректної задачі. Відповідно до [13], під методом розв'язування рівняння (5) розумітимемо будь-яке відображення Θ, що ставить у відповідність наближеним даним u_{δ} і A_h рівняння (7) деякий елемент $\Theta(u_{\delta}, A_h) \in V$, який вважають наближеним розв'язком рівняння (5). Точність методу Θ на множині M характеризується найбільшим відхиленням [13]:

$$\psi\,(\delta, h; \mathrm{M}; \Theta) = \sup_{u \in \mathrm{M}} \sup_{\substack{A_h \in \Lambda(V, U) \\ ||A - A_h||_{V \to U} \leq h}} \sup_{\substack{u_{\delta} \in U \\ ||Av^{\dagger} - u_{\delta}|| \leq \delta + \beta_{\mathrm{M}} h}} || \Theta(u_{\delta}, A_h) - v ||_V,$$

де $\beta_{\mathrm{M}} = \sup\limits_{u \in \mathrm{M}} || u ||$.

Метод $\Theta_{\delta, h}$ називають оптимальним на множині M, якщо [13]

$$\psi\,(\delta, h; \mathrm{M}; \Theta_{\delta, h}) = \inf_{\Theta} \psi\,(\delta, h; \mathrm{M}; \Theta);$$

асимптотично оптимальним на множині M, якщо

$$\lim_{\delta \to 0,\, h \to 0} \{\psi\,(\delta, h; \mathrm{M}; \Theta_{\delta, h}) \,/\, \inf_{\Theta} \psi\,(\delta, h; \mathrm{M}; \Theta)\} = 1;$$

оптимальним за порядком на множині M, якщо

$$\psi\,(\delta, h; \mathrm{M}; \Theta_{\delta, h}) \leq c \inf_{\Theta} \psi\,(\delta, h; \mathrm{M}; \Theta),\ 0 < \delta \leq \delta_0,\ 0 < h \leq h_0.$$

У теорії некоректних задач, досліджуючи побудову оптимальних методів розв'язування некоректного рівняння (5), як центрально-симетричну множину розглядають $\mathrm{M} \subset V$, що має такий вигляд [13]:

$$\mathrm{M}_{\upsilon, \rho}(A) := \{z : z = | A |^{\upsilon} w,\ || w ||_V \leq \rho\},$$

де $\upsilon > 0$, $\rho > 0$, $| A | = (A^* A)^{1/2}$.

Елементи множини $\mathrm{M}_{\upsilon, \rho}(A)$ називають витокоуявними. Відомо [13], що якщо рівняння (5) має витокоуявний розв'язок $v^{\dagger} \in \mathrm{M}_{\upsilon, \rho}(A)$, то $v^{\dagger}$ — найменший у метриці V розв'язок (5). До того ж, для $\forall\, \upsilon > 0$ справджується співвідношення $\mathrm{Range}\,(| A |^{\upsilon}) = \mathrm{Range}\,(A^*)$, тобто елементи $| A |^{\upsilon} w$ утворюють всюди щільну множину у підпросторі $\mathrm{Ker}\,(A)^{\perp}$, якому належить нормальний розв'язок рівняння (5). Це означає, що будь-який нормальний розв'язок $v^{\dagger}$ рівняння (5) можна апроксимувати як завгодно близько елементами множини $\mathrm{M}_{\upsilon, \rho}(A)$. У зв'язку з цим доречно послатися на важливий клас методів регуляризації, які можна представити функцією від оператора рівняння (5). Ідея підходу, запропонованого А.Б. Бакушинським [14, 15], полягає в побудові параметричного сімейства функцій $G=\{g_\alpha(\lambda), \alpha\in(0,1)\}$, кусково-неперервних на відрізку $[0, \gamma_h^2]$, де $\|A_h\|\le\gamma_h=(\gamma+h)$, і таких, що задовольняють для $\forall v\in[0, v_*]$ такі умови:

$$\sup_{0\le\lambda\le\gamma_h^2} \lambda^v|1-\lambda g_\alpha(\lambda)|\le\chi_v\alpha^v, \tag{13}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le\gamma_h^2} \sqrt{\lambda}\,|g_\alpha(\lambda)|\le\chi_*\alpha^{-1/2}, \tag{14}$$

де v_*, χ_v, χ_* — деякі додатні константи, що не залежать від α. Систему функцій G називають породжувальною для методу регуляризації:

$$R_\alpha=g_\alpha(A_h^*A_h)A_h^*,\ g_\alpha\in G. \tag{15}$$

Параметр v_* функції g_α називають кваліфікацією методу R_α, а параметр $\alpha=\alpha(\delta, h)$ — параметром регуляризації. Регуляризатори (15) дають змогу досягти оптимального порядку точності на класах рівнянь (5) з витокоуявними розв'язками.

Множина $\Re_0=\{g_\alpha(A_h^*A_h)A_h^*, g_\alpha\in G\}\subset\Re$ містить більшість відомих методів регуляризації [13, 16].

• Метод Тихонова: $R_\alpha=(\alpha E+A_h^*A_h)^{-1}A_h^*$ є елементом множини $\Re_0$ з твірною функцією $g_\alpha(\lambda)=(\alpha+\lambda)^{-1}$ і параметрами $\chi_*=1/2$, $\chi_v=v^v(1-v)^{(1-v)}$. Кваліфікація методу Тихонова $v_*=1$.

• Узагальнений варіант методу Тихонова [13]:

$$R_\alpha=(\alpha^{q+1}E+(A_h^*A_h)^{q+1})^{-1}(A_h^*A_h)^q A_h^*\in\Re_0 \tag{16}$$

для $q\ge-1/2$. Метод (16) породжується функцією $g_\alpha(\lambda)=\lambda^q(\alpha^{q+1}+\lambda^{q+1})^{-1}$ для $v_*=q+1$.

• Нестаціонарна ітераційна схема методу Тихонова: задають $v_0=0$. Послідовно знаходять елементи v_k ($k=1,2,\ldots,$) як розв'язки рівнянь

$$\alpha_k v_k+A_h^*A_h v_k=\alpha_k v_{k-1}+A_h^*u_\delta. \tag{17}$$

Метод (17) породжується функцією $g_\alpha(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda}\left(1-\prod_{i=1}^{k}\dfrac{\alpha_i}{\alpha_i+\lambda}\right)$, $\lambda\ne0$ ($0<\alpha_k<\alpha_{k-1}$, наприклад, $\alpha_k=q^k$, $0<q<1$) і задовольняє умови (13), (14) для $\chi_v=O(v^v)$, якщо $0<v\le1$ і $\chi_v=O(c^{v^v})$, якщо $1<v$. Кваліфікація методу $v_*=\infty$.

• Неявна ітераційна схема (метод Факєєва–Ларді): задають $v_0=0$. Послідовно знаходять елементи v_k з рівняння

$$\mu v_k+A_h^*A_h v_k=\mu v_{k-1}+A_h^*u_\delta,\ k=1,2,\ldots;\ (0<\mu=\text{const}). \tag{18}$$

Ітераційний метод (18) є регуляризувальним для (15), якщо

$$g_\alpha(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\left(1-\left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)^{1/\alpha}\right),\ \lambda\ne0,\ k=\lfloor(1/\alpha)\rfloor.$$

Умови (13), (14) виконуються для $\chi_*=\mu^{-1/2}$, $\chi_v=(v\mu)^v$ і $k\ge v$.

Кваліфікація методу $v_* = \infty$.

• Метод асимптотичної регуляризації: твірна функція цього методу має вигляд

$$g_t(\lambda) = \int_0^t e^{-(t-s)\lambda} ds = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-t\lambda}),$$

при цьому $1 - \lambda g_t(\lambda) = e^{-t\lambda}$, а наближений розв'язок визначається формулою

$$v_t = (E - A_h^* A_h g_t(A_h^* A_h))\, v_0 + g_t(A_h^* A_h) A_h^*\, u_\delta \tag{19}$$

для довільних $t = \alpha^{-1}$. Умови (13), (14) у методі (19) виконуються для $\chi_* = 0.6382$, $\chi_v = (ve)^v$. Кваліфікація методу $v_* = \infty$.

• Явна ітераційна схема (метод Ландвебера). Задають $v_0 = 0$.

Послідовно знаходять елементи v_k з рівняння

$$v_k = (E - \mu A_h^* A_h) v_{k-1} + \mu A_h^* u_\delta,\ k = 1, 2,\ \ldots;\ (0 < \mu < 2 / \|A_h\|^2). \tag{20}$$

Ітераційний метод (20) породжується функцією

$$g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda}(1 - (1 - \mu\lambda)^{1/\alpha}),\ \lambda \neq 0,$$

де параметр регуляризації α є таким, що величина $1/\alpha$ набуває лише цілочислових значень $k = \lfloor (1/\alpha) \rfloor$. Кваліфікація методу $v_* = \infty$.

Основний результат теорії некоректних задач з обчислення точних оцінок наближення для рівняння (7) можна сформулювати у такий спосіб [16]. Для рівняння (7) з приблизно заданими оператором A_h і правою частиною u_δ для $\forall v > 0$ порядок збіжності до витокоуявного нормального розв'язку $v^\dagger \in \mathrm{M}_{v,\rho}(A)$ не перевершує величини $\dfrac{v}{v+1}$, тобто $\|v^\dagger - R_\alpha u_\delta\| = O((\delta + h)^{v/(v+1)})$. Оптимальний порядок точності за вказаних припущень апріорі забезпечує вибір параметра регуляризації α, що задовольняє умову $\alpha = c(\delta + h)^{2/(v+1)}$, $c = \mathrm{const} > 0$.

За відсутності інформації про точне значення параметра v, який визначає множину $\mathrm{M}_{v,\rho}(A)$, під час розв'язання задачі (7) на практиці здійснюють апостеріорний вибір параметра α. Один з найбільш ефективних і поширених способів апостеріорного вибору параметра α у випадку розв'язування (7) методом Тихонова (11) (у разі, коли $A = A_h$, $h = 0$) називають принципом нев'язки. Він був запропонований і обґрунтований В.О. Морозовим [17]. Відповідно до принципу нев'язки зазначений параметр вибирають з умови

$$\|A v_\alpha - u_\delta\| = \delta, \tag{21}$$

де $v_\alpha = (\alpha E + A^* A)^{-1} A^* u_\delta$. На практиці α вибирають так, щоб функціонал $\|A v_\alpha - u_\delta\|$ задовольняв умову

$$\|A v_\alpha - u_\delta\| \in [a_1\delta, a_2\delta], \tag{22}$$

де $1 < a_1 < a_2$ — деякі заздалегідь задані числа.

На випадок неточно заданого оператора О.В. Гончарським, О.С. Леоновим і А.Г. Яголою був запропонований узагальнений принцип нев'язки [18], відповідно до якого має виконуватись умова

$$\|A_h v_\alpha - u_\delta\| \in [a_1(\delta + \|v_\alpha\| h),\ a_2(\delta + \|v_\alpha\| h)]. \tag{23}$$

Відомо [13–16], що регуляризатори (15), які задовольняють умови (13), (14) у поєднанні з принципом нев'язки (22) або узагальненим принципом нев'язки (23), дають змогу знайти розв'язок задачі (5) з оптимальною за порядком точністю на множині $M_{\upsilon,\rho}(A)$ для всіх υ таких, що $0 < \upsilon < (2\upsilon_* - 1)$.

4. РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Особливістю принципів (21), (23) і (24), як і багатьох інших, є те, що в них величина похибки δ правої частини u_δ у рівнянні (7) є конкретно заданою величиною. Проте в наукових експериментальних дослідженнях через їхню унікальність визначення похибки δ нерідко має досить неоднозначний характер, як і вибір величин a_1 і a_2 у (22) або (23). Вибір методу регуляризації також характеризується значним рівнем невизначеності. Важливу роль у цьому випадку відіграє наявність апріорної або апостеріорної інформації про розв'язок задачі, а також досвід проведення обчислювальних експериментів [13].

Для наближеного розв'язання рівняння (7) у цій конкретній задачі вибрано ітераційний метод Ландвебера (20). Вагомими аргументами на користь цього вибору є простота програмної реалізації методу, високий рівень комп'ютерної сумісності та достатньо висока ефективність, як за кількістю ітерацій, так і за точністю наближеного розв'язку. Під час реалізації методу Ландвебера потрібно визначити параметр регуляризації α_* як момент зупинення ітераційного процесу ($k_* = \lfloor (1/\alpha_*) \rfloor$). У цій роботі використано варіант апостеріорного визначення кількості ітерацій k_*.

Уведемо функціонал

$$\varphi[w] := \left| \sum_{n=1}^{k} |w_n| - 1 \right|, \tag{25}$$

що дає змогу побудувати алгоритм розв'язування (7) з використанням (23). На першому етапі фіксуємо кількість ітерацій m_1, потім визначаємо множину

$$V_{m_1} = \{v_k = (E - \mu A_h^* A_h) v_{k-1} + \mu A_h^* u_\delta;\ k = 1, 2, \ldots, m_1\}$$

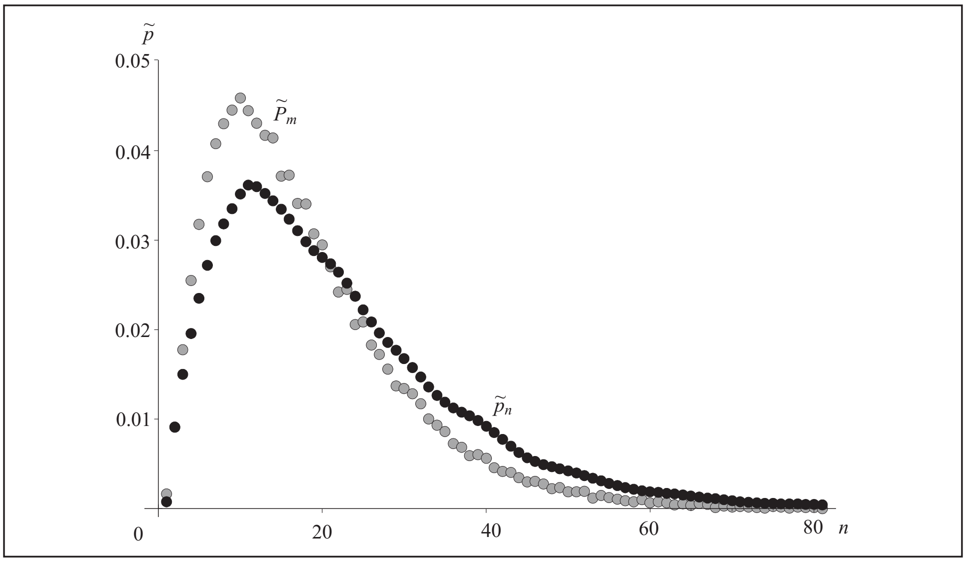

Рис. 2. Результати обчислювального експерименту: $\widetilde{P}_m$ — функція розподілу кількості фотовідліків; $\widetilde{p}_n$ —реконструйована функція розподілу кількості фотонів

наближених розв'язків рівняння (7). Множину V_{m_1} розглядаємо як область визначення функціонала (25) $V_{m_1} = D_1(\varphi)$. Здійснюючи під час обчислювального експерименту аналіз області значень функціонала (25) для різних m_1 і враховуючи узагальнений принцип нев'язки (23), знаходимо шуканий розв'язок v_{k_*}.

Для перевірки роботоздатності запропонованого алгоритму проведено обчислювальний експеримент із системою (1). На рис. 2 наведено результати обчислювального експерименту, під час виконання якого з'ясувалося, що $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\widetilde{S}_{mn}^{2} = 14.195$ для заданих значень $N_{nc} = 0.75$, $\eta = 0.77$, $\mu = 0.6$. Робоча кількість ітерацій у цьому прикладі $k_* = 23$. Відносна похибка апроксимації розв'язку не перевищує 2 %.

ВИСНОВКИ

Запропоновано канонічне представлення нескінченної системи лінійних рівнянь алгебри, що описує реєстрований вектор щільності ймовірності фотовідліків через вектор щільності квантової ймовірності фотонів, у вигляді операторного рівняння першого роду. Вказано необхідні та достатні умови лінійності і неперервності оператора, визначеного в усьому дійсному Гільбертовому просторі l_2. Наведено достатню умову компактності досліджуваного оператора. Початкову задачу (1) визначено як некоректно поставлену. Представлено перелік основних методів регуляризації некоректної задачі. Сформульовано основний результат теорії некоректних задач обчислення точних оцінок наближення для рівняння (7). Для цього рівняння з приблизно заданими оператором A_h і правою частиною u_δ порядок збіжності до витокоуявного нормального розв'язку $v^\dagger \in \mathrm{M}_{\upsilon,\rho}(A)$ не перевершує величину $\upsilon(\upsilon+1)^{-1}$, тобто $\|v^\dagger - R_\alpha u_\delta\| = O((\delta+h)^{\upsilon/(\upsilon+1)})$. Оптимальний порядок точності за вказаних припущень апріорі забезпечує вибір параметра регуляризації $\alpha = c(\delta+h)^{2/(\upsilon+1)}$, $c = \mathrm{const} > 0$. Для наближеного розв'язання рівняння (7) у цій конкретній задачі застосовано ітераційний метод Ландвебера. Використано варіант апостеріорного визначення кількості ітерацій k_*. Наведено задовільні результати обчислювального експерименту з розв'язування вихідної фізичної задачі квантової оптики.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Sperling J., Phillips D.S., Bulmer J.F.F., Thekkadath G.S., Eckstein A., Wolterink T.A.W., Lugani J., Nam S.W., Lita A., Gerrits T., Vogel W., Agarwal G.S., Silberhorn C., Walmsley I.A. Detector-agnostic phase-space distributions. *Phys. Rev. Lett.* 2020. Vol. 124, Iss. 1. P. 013605.

2. Starkov V.N., Semenov A.A., Gomonay H.V. Numerical reconstruction of photon-number statistics from photocounting statistics: Regularization of an ill-posed problem. *Phys. Rev.* 2009. Vol. A80, Iss. 1. P. 013813.

3. Hlousek J., Dudka M., Straka I., Jezek M. Accurate detection of arbitrary photon statistics. *Phys. Rev. Lett.* 2019. Vol. 123, Iss. 15. P. 153604.

4. Semenov A.A., Turchin A.V., Gomonay H.V. Detection of quantum light in the presence of noise. *Phys. Rev.* 2008. Vol. A78, Iss 5. P. 055803.

5. Mandel L. Squeezed states and sub-Poissonian photon statistics. *Phys. Rev. Lett*. 1982. Vol. 49, Iss. 2. P. 136.
6. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т. 1. Харьков: Вища шк., 1977. 318 с.
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1976. 544 с.
8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1979. 285 с.
9. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наук. думка, 1986. 544 с.
10. Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Уральская издательская фирма «Наука», 1993. 263 с.
11. Сизиков В.С. Обратные прикладные задачи и MatLab: СПб.: Лань, 2011. 256 с.
12. Lowes A.K. Inverse und schlecht gestellte Probleme. Stuttgart: Teubner, 1989. 205 p.
13. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. Москва: Наука, 1986. 182 с.
14. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1989. 199 с.
15. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю. Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами. Москва: Едиториал УРСС, 2002. 192 с.
16. Солодкий С.Г. Оптимальные схемы дискретизации операторных уравнений: дис. докт. фіз.-мат. наук. Київ, 2003. 300 с.
17. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. Москва: Наука, 1987. 240 с.
18. Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г. Обобщенный принцип невязки. *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 1973. Т. 13, № 2. С. 294–302.

V.N. Starkov

REGULARIZATION METHODS FOR ILL-POSED PROBLEMS OF QUANTUM OPTICS

Abstract. On the example of a specific physical problem of reduction of noise caused by losses, dark counts, and background radiation, a summary of methods for regularizing ill-posed problems is given in the statistics of photocounts of quantum light. The mathematical formulation of the problem is represented by an operator equation of the first kind. It is shown that the operator is generated by a matrix with elements of a countable set. It is noted that the incorrectness of the Hadamard reconstruction of the statistics of the number of photons of quantum light is due to the compactness of the operator of the mathematical m`odel. It is emphasized that the problem of stable approximation to the exact solution of the operator equation with inaccurate initial data can be solved by one of the most well known regularization methods whose theoretical foundation was laid by A.N. Tikhonov. An important class of regularizers based on a parametric system of functions, called generating functions, is considered. It is confirmed that regularizers of this class allow one to achieve the optimal order of accuracy for equations with source-representable solutions.

Keywords: ill-posed problem, quantum optics, operator, regularization, algorithm, photon.

Надійшла до редакції 02.07.2021