СИСТЕМНИЙ
АНАЛІЗ

УДК 631.153.3:330.131.7

В.А. ПЕПЕЛЯЄВ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *pepelaev@yahoo.com*.
О.М. ГОЛОДНІКОВ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна.
Н.О. ГОЛОДНІКОВА
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна.

ОПТИМІЗАЦІЯ НАДІЙНОСТІ В РОСЛИННИЦТВІ

Анотація. Розглянуто задачу оптимізації структури посівних площ з урахуванням ризику втрат урожаю. Для мінімізації ризику запропоновано замість ймовірності відмов, яка широко використовується в теорії надійності, оптимізувати буферну ймовірність відмов (bPOE). На відміну від ймовірності відмов, bPOE має кращі властивості — ця міра ризику є неперервною функцією, яка враховує всі значення, що позиціоновані в хвості функції розподілу втрат урожаю.

Ключові слова: bPOE, міра ризику, оптимізація, квантиль, хвіст функції розподілу, посівна площа, сільськогосподарська культура.

ВСТУП

Одним із напрямів використання математичних методів моделювання надійності технічних систем є планування оптимальної стратегії технологічного обслуговування виробничого обладнання для зменшення ризику виникнення аварій. У [1] для визначення оптимального графіка проведення планово-попереджувальних ремонтів використовують лише інформацію про математичне сподівання та дисперсію невідомої функції розподілу відмов технологічного обладнання. Для оцінювання параметрів, що характеризують надійність обладнання, використовують методи класичної теорії ймовірностей та баєсівського підходу [2].

У рослинництві як аналог надійності технічних систем можна використовувати ризик втрат (недобору) урожаю. Одним із напрямів мінімізації ризику в рослинництві є оптимізація розподілення загальної посівної площі під різні групи сільськогосподарських культур, у процесі якої мінімізують втрати врожаю внаслідок несприятливих погодних умов. У [3] запропоновано математичну модель для оцінювання ризику втрат урожаю, яка базується на підході, застосованому в теорії портфельної оптимізації. Його суть полягає у максимізації середнього очікування результату за обмежень на ризик втрат.

У запропонованій роботі для мінімізації ризику втрат урожаю замість традиційної ймовірності відмов використано нову міру ризику — буферну ймовірність перевищення (Buffered Probability of Exceedance (bPOE)) [4]. Цю міру ризику в [5] застосовували для оптимізації надійності технічних систем.

1. ПІДХОДИ ДО МОДЕЛЮВАННЯ НАДІЙНОСТІ

Нехай X — випадкова величина, яка моделює втрати, а x — деяке порогове значення. Частка втрат, що перевищує цей поріг, $p_x(X) = P(X > x)$ — ймовірність відмови (Probability of Exceedance (POE)). Ймовірність відмови є традиційним показником надійності. Але в процесі оптимізації цього показника виникають значні математичні труднощі, зумовлені тим, що функція розподілу випадкової змінної X не є неперервною. Недоліком цієї міри ризику також є те, що вона враховує тільки мінімальні значення випадкової величини X, що фігурують в хвості її функції розподілу. Водночас ця міра ризику не використовує інформації про максимальні значення, яких випадкова величина X може набувати з дуже малою ймовірністю. Для подолання цих недоліків у [6] було вперше запропоновано нову альтернативну міру ризику — буферну ймовірність відмови для випадку, коли поріг відмови дорівнює нулю. Ця міра ризику враховує ступінь перевищення порога відмови і є консервативнішою за ймовірність відмови.

Нехай F_X — кумулятивна функція розподілу випадкової величини X і $x = 0$ — поріг відмови. Тоді ймовірність відмови визначають за формулою [6]

$$p_f(X) = P\{X > 0\} = 1 - F_X(0).$$

У загальному випадку функція розподілу F_X неперервна тільки справа. У точці, в якій ліміт справа перевищує ліміт зліва, матимемо розрив цієї функції. Інакше кажучи, в цій точці буде атом функції розподілу F_X [6–8]. У випадку, коли атом розташований у точці $X = 0$, ймовірність $P\{X = 0\} > 0$.

Для фіксованого числа $p \in (0, 1)$ p-квантиль функції розподілу F_X визначається за формулою [7]

$$q_p(X) = \text{ найменше значення } q \text{ таке, що } F_X(q) \geq p. \tag{1}$$

Якщо функція F_X неперервна і всюди зростальна на інтервалі $(-\infty, \infty)$, то її обернена функція F_X^{-1} існує і $q_p(X) = F_X^{-1}(p)$. У загальному випадку функція F_X не завжди є зростальною. Можуть існувати інтервали, на яких її значення не змінюються. Внаслідок того, що функція F_X неперервна справа, будь-який з цих інтервалів має найменше значення q. Якщо функція F_X має розрив у точці q, то виконуються співвідношення $F_X(r) \geq p$ для $r > q$ і $F_X(r) < p$ для $r < q$. Тоді згідно з (1) p-квантиль функції розподілу F_X буде $q_p(X) = q$. У цьому випадку виникають труднощі під час оптимізації ймовірності відмови $p_f(X)$. Для їхнього подолання необхідно перейти від квантиля $q_p(X)$ до суперквантиля $\bar{q}_p(X)$, який має кращі властивості [6, 7].

У випадку, коли F_X не має розривів, розподіл p-хвоста є умовним розподілом X, якщо $X \geq q_p(X)$. Однак, якщо $q_p(X)$ є атомом функції розподілу X, то ймовірність інтервалу $[q_p(X), \infty)$ може перевищувати значення $1 - p$. Для уникнення цього в [8] було запропоновано розділити цей атом так, щоб ймовірність хвоста точно дорівнювала $1 - p$. До того ж розподіл ймовірностей верхнього p-хвоста, $p \in (0, 1)$, випадкової величини X визначається як розподіл ймовірностей на інтервалі $[q_p(X), \infty)$:

$$F_X^p(q) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}[F_x(q) - p], & \text{якщо } q \geq q_p(X), \\ 0, & \text{якщо } q < q_p(X). \end{cases}$$

З використанням цього підходу в [7, 8] суперквантиль визначено так:

$\bar{q}_p(X) =$ середнє значення розподілу ймовірностей верхнього p-хвоста.

Із визначення $q_p(X)$ і $\bar{q}_p(X)$ випливає, що завжди виконується нерівність $q_p(X) \le \bar{q}_p(X)$ і $\bar{q}_p(X)$ є неперервною функцією від p такою, що [6–8]

$$\bar{q}_p(X) \to \sup X, \text{ якщо } p \to 1, \text{ і } \bar{q}_p(X) \to EX, \text{ якщо } p \to 0.$$

Крім того, виконуються нерівності

$$\bar{q}_p(X) \ge EX \text{ і } q_p(X) < \bar{q}_p(X) < \sup X, \text{ якщо } 0 < p < 1 - P\{X = \sup X\}.$$

Якщо $P\{X = \sup X\} > 0$, то для $p \ge 1 - P\{X = \sup X\}$ виконується співвідношення

$$q_p(X) = \bar{q}_p(X) = \sup X.$$

Кожному значенню $q \in (EX, \sup X)$ відповідає тільки одне значення p таке, що $\bar{q}_p(X) = q$.

Нехай поріг функціональної відмови системи дорівнює 0. Тоді буферна ймовірність відмови визначається за формулою [6, 7]

$$\bar{p}_f(X) = \begin{cases} 1 - p, & \text{якщо } \bar{q}_p(X) = 0 \text{ і } EX \le 0 < \sup X, \\ 0, & \text{якщо } X \le 0, \\ 1, & \text{якщо } EX > 0. \end{cases}$$

Буферна ймовірність відмов завжди перевищує класичну ймовірність відмов

$$\bar{p}_f(X) \ge p_f(X).$$

У [4] запропоновано використовувати буферну ймовірність перевищення bPOE як міру ризику, що узагальнює буферну ймовірність відмови у випадку, коли поріг функціональної відмови системи може бути будь-яким числом (не тільки 0). Вона позначається $bPOE_x(X) = \bar{p}_x(X)$. Цю міру ризику використовували під час оптимізації надійності складної технічної системи в [5].

Розглянемо ймовірність $P(X > q)$, де q задовольняє умову $E(X \mid X > q) = x$, тобто умовне математичне сподівання дорівнює значенню порога x. Із цієї умови випливає, що $q < x$ і $P(X > q) > P(X > x)$. Отже, ця міра ризику є консервативнішою за POE і має «буфер безпеки» як у кількості втрат ($x - q > 0$), так і в ймовірності $(P(X > q) - P(X > x) > 0)$ [4].

Буферну ймовірність перевищення bPOE можна розглядати як обернену суперквантильну функцію, для якої є взаємозалежність із квантильною функцією. Квантильна функція визначається у такий спосіб [9]:

$$Q_X(p) = \min\{x \mid F_X(x) \ge p\} \text{ для } p \in (0, 1).$$

Отже, $Q_X(p)$ є найменшим значенням x, для якого виконується нерівність $P\{X > x\} \le 1 - p$. У загальному випадку квантильна функція Q_X є кусково-неперервною і може мати континуальну кількість стрибків. Якщо F_X — неперервна і строго зростальна функція, то $Q_X(p)$ — єдиний розв'язок рівняння $F_X(x) = p$. У цьому випадку Q_X є оберненою до F_X функцією F_X^{-1} на $(0, 1)$.

Крім квантильної функції в [9] було введено суперквантильну функцію розподілу

$\bar{Q}_X(p) =$ математичне сподівання верхнього p-хвоста розподілу X.

На відміну від квантильної функції, яка може мати розриви, суперквантильна функція є неперервною.

Нехай $\overline{X} = \overline{Q}_X(F_X(X))$ — допоміжна випадкова величина. Функція суперрозподілу $\overline{F}_X$ генерується у такий спосіб [9]:

$$\overline{F}_X = F_{\overline{X}}.$$

Таким чином, функція розподілу $\overline{Q}_X$ є оберненою до функції суперрозподілу $\overline{F}_X$. У [4] bPOE визначається через функцію суперрозподілу так: $bPOE_x(X) = \overline{p}_x(X) = 1 - \overline{F}_X(x)$. Отже, суперрозподіл визначається як [4]

$$\overline{F}_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \geq \sup X, \\ \overline{q}^{\,-1}(x; X), & \text{якщо } EX < x < \sup X, \\ 0 & \text{інакше}, \end{cases}$$

а bPOE визначається як [4]

$$bPOE_x(X) = \overline{p}_x(X) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \geq \sup X, \\ 1 - \overline{q}^{\,-1}(x; X), & \text{якщо } EX < x < \sup X, \\ 1 & \text{інакше}. \end{cases}$$

У фінансових застосунках замість терміна «квантиль $q_X(p)$» використовують термін «Value-at-Risk, $VaR_p(X)$», а замість терміна «суперквантиль $\overline{q}_X(p)$» — термін «Conditional Value-at-Risk, $CVaR_p(X)$». З огляду на те, що зазначені терміни є більш поширеними, далі будемо використовувати обидва варіанти цих термінів.

2. ВИКОРИСТАННЯ bPOE ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ РОЗПОДІЛЕННЯ ПОСІВНОЇ ПЛОЩІ ПІД ОЗИМИЙ І ЯРИЙ ЯЧМІНЬ

Розглянемо застосування bPOE для визначення оптимального розподілення загальної посівної площі під різні сільськогосподарські культури. Оптимізація розподілення посівних площ є однією із складових проблеми продовольчої безпеки [10, 11]. Зокрема, розглядається задача оптимального розподілення посівної площі в Одеській області під озимий і ярий ячмінь для мінімізації втрат урожаю внаслідок несприятливих погодних умов. Для розв'язання цієї задачі від Головного управління статистики в Одеській області було отримано інформацію про врожайність озимого та ярого ячменю у кожному з 26 районів цієї області за період з 2005 по 2015 р.

2.1. Постановка задачі. Відповідно до методики Державної служби статистики врожайність сільськогосподарської культури визначається як середнє значення врожаю на одиницю площі, з якої фактично зібрали врожай. Однак у цьому визначенні не враховано той факт, що внаслідок несприятливих погодних умов протягом періоду вегетації на деякій частині посівної площі може не бути схожості посівів. Тож у цій роботі запропоновано врожайність сільськогосподарської культури визначати як середнє значення врожаю на одиницю засіяної площі.

Уведемо позначення: I — кількість районів Одеської області; i — номер району, $i = 1, \ldots, I$; J — кількість розглядуваних років; j — номер року, $j = 1, \ldots, J$; u_{ij}^o, u_{ij}^y, u_{ij}^t — значення врожайності озимого і ярого ячменю, а також всього врожаю цих культур в i-му районі в j-му році відповідно. У розглядуваному випадку $I=26$, $J=11$. Нехай S_{ij}^{o} і S_{ij}^{y} — площі, засіяні під озимий і ярий чмінь в i-му районі в j-му році, тоді

$$u_{ij}^{t}=\frac{u_{ij}^{o}S_{ij}^{o}+u_{ij}^{y}S_{ij}^{y}}{S_{ij}^{o}+S_{ij}^{y}}.$$

Будемо вважати, що врожайність озимого ячменю в Одеській області є випадковою величиною ξ^{o}, яка набуває будь-якого значення u_{ij}^{o}, $i=1,\ldots,I$, $j=1,\ldots,J$, з ймовірністю $p=\dfrac{1}{I\cdot J}$; урожайність ярого ячменю — випадкова величина ξ^{y}, яка набуває будь-якого значення u_{ij}^{y}, $i=1,\ldots,I$, $j=1,\ldots,J$, з ймовірністю p; сукупна врожайність озимого і ярого ячменю — випадкова величина ξ^{t}, яка набуває будь-якого значення u_{ij}^{t}, $i=1,\ldots,I$, $j=1,\ldots,J$, з ймовірністю p. Математичне сподівання випадкової величини ξ^{t} становить

$$b=E[\xi^{t}]=\frac{1}{I\cdot J}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}u_{ij}^{t}=22.035\ \text{ц/га посівної площі.}$$

Якщо різниця $b-\xi^{t}$ перевищує 0, то будемо її називати «недобором урожаю». Задача полягає у виборі такого розподілення посівної площі під ярий і озимий ячмінь в Одеській області, у результаті якого мінімізується ймовірність того, що недобір урожаю ячменю перевищить деяке порогове значення z.

2.2. Оптимізація розподілення посівної площі під озимий і ярий ячмінь в Одеській області. Нехай X — випадкова величина, яка моделює недобір урожаю ячменю (озимого і ярого); y — частка посівної площі, відведеної під озимий ячмінь, у загальній посівній площі, $0\le y\le 1$. Відповідно $1-y$ — частка посівної площі, відведеної під ярий ячмінь. Залежність недобору врожаю ячменю X від y будемо називати функцією втрат і позначати $X(y)$. У класичній теорії надійності задача оптимального розподілення посівної площі під озимий і ярий ячмінь полягає у мінімізації ймовірності того, що недобір середнього врожаю озимого і ярого ячменю перевищить порогове значення z:

$$\min_{0\le y\le 1} P\{X(y)>z\}. \tag{2}$$

Під час розв'язання оптимізаційної задачі (2) виникають значні математичні труднощі. Тому замість задачі (2) будемо мінімізувати bPOE:

$$\min_{0\le y\le 1} bPOE_{z}\ X(y). \tag{3}$$

Для розв'язання оптимізаційної задачі (3) використано пакет програм PSG, розроблений компанією American Optimal Decisions [12]. Результати оптимізації продемонстровано на рис. 1. Вибрано порогове значення $h=10.385$. Ймовірність того, що недобір урожаю всього ячменю (озимого і ярого) перевищує цей поріг до розв'язання оптимізаційної задачі (3), становить $P\{X>10.385\}=0.17$.

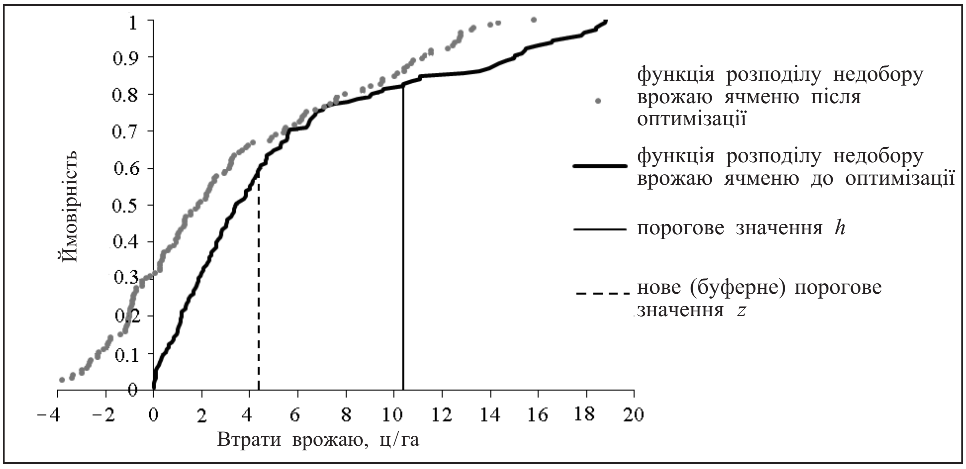

Рис. 1. Функції розподілу втрат урожаю ячменю до і після мінімізації bPOE

Із умови $CVaR_{\alpha}(X) = \bar{q}_{\alpha}(X) = h = 10.385$ було обчислено значення $\alpha = 0.59511$. Нове (буферне) порогове значення $z = q_{\alpha} = 4.35$ (див. рис. 1) було вибране таким, щоб виконувалось співвідношення $E[X \mid X > 4.35] = 10.385$. Отже, замість класичної задачі оптимізації надійності (2) розв'язувалась задача буферної оптимізаці (3).

Оптимальний розв'язок задачі (3) становить $y = 1$. Тобто вирощування ярого ячменю на території Одеської області призводить до підвищення ризику недобору врожаю і тому є недоцільним. У результаті оптимізації ймовірність перевищення порогового значення $h = 10.385$ зменшилась на 19.97 % (з 0.172 до 0.138), а середнє значення хвоста функції розподілу втрат урожаю зменшилось на 19.71 % (з 10.385 до 8.338). Функція розподілу недобору врожаю ячменю після оптимізації перетинає вісь ординат у точці (0; 0.3172). Таким чином, у результаті оптимізації кількість випадків недобору врожаю ячменю зменшилась майже на третину.

ВИСНОВКИ

У цій роботі для мінімізації ризику втрат урожаю замість класичної ймовірності відмов використано нову міру ризику Buffered Probability of exceedance (bPOE). Ймовірність перевищення випадковою змінною X деякого порогового значення h, $p_h(X) = P(X > h)$, не є достатньо інформативною мірою, оскільки вона не враховує важливих подій (величезних збитків), які можуть відбутися з мізерною ймовірністю. Водночас bPOE, яка враховує середні втрати, що перевищують порогове значення h (математичне сподівання верхнього хвоста розподілу X), є більш інформативною мірою ризику. У процесі використання цієї міри ризику виникає можливість визначати не тільки оптимістичну характеристику хвоста функції розподілу (мінімальні втрати, що перевищують поріг h), а і песимістичну (всі втрати, що перевищують h). Крім того, використання bPOE як міри ризику дає змогу суттєво спростити задачу оптимізації надійності.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Golodnikov A.N., Stoikova L.S. Determination of the optimal preventive replacement period on the basis of information on the mathematical expectation and variance of the trouble-free system operation time. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1978. Vol. 14, N 3. P. 431–440. https://doi.org/10.1007/BF01074678.

2. Golodnikov A.N., Knopov P.S., Pepelyaev V.A. Estimation of reliability parameters under incomplete primary information. *Theor. Decis.* 2004. Vol. 57. P. 331–344. https://doi.org/10.1007/s11238-005-3217-9.

3. Pepelyaev V.A., Golodnikova N.A. Mathematical methods for crop losses risk evaluation and account for sown areas planning. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N 1. P. 60–67. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9592-x.

4. Mafusalov A., Uryasev S. Buffered probability of exceedance: Mathematical properties and optimization. *SIAM. J. Optim*. 2018. Vol. 28. P. 1077–1103. https://doi.org/10.1137/15M1042644.

5. Zrazhevsky G.M., Golodnikov A.N., Uryasev S.P., Zrazhevsky A.G. Application of buffered probability of exceedance in reliability optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2020. Vol. 56, N 3. P. 476–484. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00263-4.

6. Rockafellar T., Royset J.O. On buffered failure probability in design and optimization of structures. *Journal of Reliability Engineering and System Safet*y. 2010. Vol. 95, N 5. P. 499–510. https://doi.org/10.1016/j.ress.2010.01.001.

7. Rockafellar R.T. Convexity and reliability in engineering optimization. *Proc. of the 9th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis* (Chiangrai, Thailand). 2015. P. 1–10. URL: https://sites.math.washington.edu/~rtr/papers/rtr239-Reliability.pdf.

8. Rockafellar R.T., Uryasev S. Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking and Finance.* 2002. Vol. 26, N 7. P. 1443–1471. https://doi.org/ 10.1016/ S0378-4266(02)00271-6.

9. Rockafellar R.T., Royset J.O. Random variables, monotone relations, and convex analysis. *Math. Program.* 2014. Vol. 148. P. 297–331. https://doi.org/10.1007/s10107-014-0801-1.

10. Golodnikov A.N., Ermol'ev Yu.M., Ermol'eva T.Yu., Knopov P.S., Pepelyaev V.A. Integrated modeling of food security management in Ukraine. I. Model for management of the economic availability of food. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2013. Vol. 49, N 1. P. 26–35. https://doi.org/10.1007/s10559-013-9481-8.

11. Golodnikov A.N., Ermol'ev Yu.M., Ermol'eva T.Yu., Knopov P.S., Pepelyaev V.A. Integrated modeling of food security management in Ukraine. II. Models for structural optimization of agricultural production under risk. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2013. Vol. 49, N 2. P. 217–228. https://doi.org/10.1007/s10559-013-9503-6.

12. Portfolio Safeguard. URL: http://www.aorda.com/index.php/portfolio-safeguard/.

V.A. Pepelyaev, A.N. Golodnikov, N.A. Golodnikova

RELIABILITY OPTIMIZATION IN PLANT PRODUCTION

Abstract. We consider the problem of optimizing the structure of sown areas taking into account the risk of crop losses. To minimize the risk, we propose to optimize the buffer probability of failure (bPOE), instead of the probability of failure, which is widely used in the theory of reliability. In contrast to the probability of failure, bPOE has more attractive properties: this risk measure is a continuous function that takes into account all the values located in the tail of the crop loss distribution function.

Keywords: bPOE, risk measure, optimization, quantile, the tail of the distribution function, sown area, agricultural culture.

Надійшла до редакції 04.10.2021