УДК 517.977

А.О. ЧИКРІЙ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *g.chikrii@gmail.com*.
Й.С. РАППОПОРТ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *jeffrappoport@gmail.com*.

ЕКСТРЕМАЛЬНІ СТРАТЕГІЇ ЗБЛИЖЕННЯ КЕРОВАНИХ ОБ'ЄКТІВ В ІГРОВИХ ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ З ТЕРМІНАЛЬНОЮ ФУНКЦІЄЮ ПЛАТИ

Анотація. Запропоновано метод розв'язання проблеми зближення керованих об'єктів в ігрових задачах динаміки з термінальною функцією плати, який зводиться до систематичного використання ідей Фенхеля–Моро стосовно загальної схеми методу розв'язувальних функцій. Сутність методу полягає в тому, що розв'язувальну функцію можна виразити через спряжену до функції плати і, використовуючи інволютивність оператора сполучення для опуклої замкнутої функції, отримати гарантовану оцінку термінального значення функції плати, яку представлено значенням плати в початковий момент та інтегралом від розв'язувальної функції. Особливістю методу є накопичувальний принцип, що використовується в поточному підсумовуванні розв'язувальної функції для оцінки якості гри до досягнення деякого порогового значення. Уведено поняття верхньої та нижньої розв'язувальних функцій двох типів і отримано достатні умови гарантованого результату в диференціальній грі з термінальною функцією плати в разі, коли умова Понтрягіна не виконується. Побудовано дві схеми методу розв'язувальних функцій з екстремальними стратегіями зближення керованих об'єктів і дано порівняння гарантованих часів.

Ключові слова: термінальна функція плати, квазілінійна диференціальна гра, багатозначне відображення, вимірний селектор, екстремальна стратегія, розв'язувальна функція.

ВСТУП

У роботі розглянуто проблему зближення керованих об'єктів в ігрових задачах динаміки з термінальною функцією плати на основі методу розв'язувальних функцій [1] і його сучасної версії [2]. На відміну від основної схеми методу розв'язувальних функцій в цій статті вивчається випадок, коли умова Понтрягіна не має місця. Розглядаються спеціальні багатозначні відображення, які породжують верхні і нижні розв'язувальні функції двох типів, вперше введені в [3]. За допомогою цих функцій отримано достатні умови завершення гри за деякий гарантований час. Запропоновано дві схеми методу розв'язувальних функцій, побудовано екстремальні стратегії керування і дано порівняння гарантованих часів.

Робота продовжує дослідження [1–3], дотична до публікацій [4–14], розширює клас ігрових задач зближення керованих об'єктів, які мають розв'язок, і окреслює нові можливості застосування опуклого аналізу до теорії конфліктно-керованих процесів.

ЗАГАЛЬНА СХЕМА МЕТОДУ. РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНІ ФУНКЦІЇ ПЕРШОГО ТИПУ

Розглянемо конфліктно-керований процес, еволюція якого описується рівністю

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t,\tau)\varphi(u(\tau), \upsilon(\tau))\, d\tau, \;\; t \geq 0\,. \tag{1}$$

Тут $z(t) \in R^n$, функція $g(t)$, $g: R_+ \to R^n$, вимірна за Лебегом [8] і обмежена для $t > 0$, матрична функція $\Omega(t, \tau)$, $t \ge \tau \ge 0$, вимірна за t, а також сумовна за τ для кожного $t \in R_+$. Блок керування задають функцією $\varphi(u, v)$, $\varphi: U \times V \to R^n$, яка вважається безперервною за сукупністю змінних на прямому добутку непорожніх компактів U і V, m, l, n — натуральні числа.

Керування гравців $u(\tau)$, $u: R_+ \to U$, та $v(\tau)$, $v: R_+ \to V$, є вимірними функціями часу. Крім процесу (1), задана власна опукла замкнута обмежена знизу за z функція $\sigma(z)$, $\sigma: R^n \to R^1$, значення якої на траєкторіях процесу (1) визначають момент закінчення гри. Якщо $z(t)$, $t \ge 0$, — траєкторія системи (1), то гру вважатимемо закінченою в момент $t_1 > 0$, коли

$$\sigma(z(t_1)) \le 0. \tag{2}$$

Цілі першого і другого гравців протилежні. Перший (переслідувач) намагається домогтися виконання нерівності (2) на відповідній траєкторії процесу (1) за найкоротший час, а другий (втікач) — максимально відтермінувати момент виконання цієї нерівності або взагалі уникнути зустрічі.

Станемо на бік першого гравця і будемо орієнтуватися на вибір втікачем як керування довільної вимірної функції, що набуває значення з V. Якщо гра (1), (2) триває на інтервалі $[0, T]$, то керування першого гравця в момент t вибиратимемо на основі інформації про $g(T)$ і $v_t(\cdot)$, тобто у вигляді вимірної функції

$$u(t) = u(g(T), v_t(\cdot)),\ t \in [0, T],\ u(t) \in U, \tag{3}$$

де $v_t(\cdot) = \{v(s): s \in [0, t]\}$ — передісторія керування другого гравця до моменту t, або у вигляді контркерування

$$u(t) = u(g(T), v(\cdot)),\ t \in [0, T],\ u(t) \in U. \tag{4}$$

Якщо, зокрема, $g(t) = e^{At} z_0$, $\Omega(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$, $z(0) = z_0$, а e^{At} — матрична експонента, то вважають, що керування $u(t) = u(z_0, v_t(\cdot))$ реалізує квазістратегію [7], а контркерування [4] $u(t) = u(z_0, v(\cdot))$ є проявом стробоскопічної стратегії Хаєка [8].

Згідно з визначенням сполученої функції і з урахуванням теореми Фенхеля–Моро [10] маємо

$$\sigma(z) = \sup_{\psi \in R^n} [(\psi, z) - \sigma^*(\psi)],$$

де

$$\sigma^*(\psi) = \sup_{z \in R^n} [(\psi, z) - \sigma(z)]. \tag{5}$$

Функція $\sigma^*(\psi)$ власна замкнута і опукла [10]. Ефективна множина функції $\sigma^*(\psi)$ має вигляд $\operatorname{dom} \sigma^* = \{\psi \in R^n : \sigma^*(\psi) < +\infty\}$. Враховуючи обмеженість знизу власної функції $\sigma(z)$ і співвідношення (5), отримуємо $\sigma^*(0) = -\inf_{z \in R^n} \sigma(z)$, отже, $0 \in \operatorname{dom} \sigma^*$.

Вважатимемо, що L — лінійна оболонка множини $\operatorname{dom}\sigma^*$ (перетин всіх лінійних підпросторів, які містять множину $\operatorname{dom}\sigma^*$). Тоді вона є лінійним підпростором. Нехай $\Psi = \{\psi \in L: \|\psi\| = 1\}$ і π — оператор ортогонального проєктування з R^n у L. Якщо $\sigma^*(\psi)$ неперервна за $\psi \in \Psi$, то слушне співвідношення

$$\sigma(z) = \sigma(\pi z) = \max_{\psi \in \Psi} [(\psi, \pi z) - \sigma^*(\psi)], \ z \in R^n.$$

Якщо функція $\sigma^*(\psi)$ неперервна за $\psi \in \Psi$, то, зважаючи на рівність $\sigma(z(t)) = \sigma(\pi z(t))$, формулу (1) і визначення сполученої функції, отримуємо

$$\sigma(z(t)) = \max_{\psi \in \Psi} \left[(\psi, g(t)) + \int_0^t (\psi, \pi\Omega(t, \tau)\varphi(u(\tau), v(\tau)))d\tau - \sigma^*(\psi) \right], \ t \geq 0. \quad (6)$$

Поклавши $\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v): u \in U\}$, розглянемо на множині $\Delta \times V$ багатозначне відображення

$$W(t, \tau, v) = \operatorname{co} \pi\Omega(t, \tau)\varphi(U, v).$$

Тут $\operatorname{co}A$ — опуклення множини A [10], $\Delta = \{(t, \tau): 0 \leq \tau \leq t < \infty\}$.

Умова 1. Функція $\sigma^*(\psi)$ неперервна за $\psi \in \Psi$, відображення $\pi\Omega(t, \tau)\varphi(U, v)$ є замкнутозначним, а границі множин $W(t, \tau, v)$ та $\pi\Omega(t, \tau)\varphi(U, v)$ збігаються на множині $\Delta \times V$.

З урахуванням припущень про матричну функцію $\Omega(t, \tau)$ робимо висновок, що для будь-якого фіксованого $t > 0$ вектор-функція $\pi\Omega(t, \tau)\varphi(u, v)$ буде $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірною за $(\tau, v) \in [0, t] \times V$ і неперервною за $u \in U$. Тому для будь-якого фіксованого $t > 0$ багатозначні відображення $\pi\Omega(t, \tau)\varphi(U, v)$ і $W(t, \tau, v)$ мають замкнуті значення та є $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірними за $(\tau, v) \in [0, t] \times V$ [9].

Умова 2 (умова Понтрягіна). На множині Δ існує селектор Понтрягіна $\gamma_0(t, \tau)$, для якого слушне включення

$$0 \in \bigcap_{v \in V} [\pi\Omega(t, \tau)\varphi(U, v) - \gamma_0(t, \tau)].$$

В опуклому аналізі [10] для опису множин ключову роль відіграють опорні функції $C^*(X, \psi) = \sup_{x \in X} (\psi, x)$, де X — із R^n. Якщо множина X опукла і замкнута, то функція $C^*(X, \psi)$ опукла і позитивно однорідна [10]. Назвемо такі функції верхніми опорними функціями, а паралельно введемо нижні опорні функції $C_*(X, \psi) = \inf_{x \in X} (\psi, x)$.

Якщо множина X опукла і замкнута, то між нею та її верхньою і нижньою опорними функціями існує взаємно однозначна відповідність [10], причому

$$X = \{x: (x, \psi) \leq C^*(X, \psi) \ \forall \psi \in R^n\} = \{x: (x, \psi) \geq C_*(X, \psi) \ \forall \psi \in R^n\}.$$

Нехай $\gamma(t, \tau)$, $\gamma: \Delta \to L$, $\Delta = \{(t, \tau): 0 \leq \tau \leq t < \infty\}$ — деяка, майже всюди обмежена, вимірна за t і сумовна за τ, $\tau \in [0, t]$, для кожного $t > 0$ функція, яку, дотримуючись [3], називатимемо функцією зсуву.

Умова 3. Виконана умова 1 і для деякої функції зсуву $\gamma(t,\tau)$, $\gamma:\Delta\to L$, на множині $\Delta\times V$ має місце нерівність $\max\limits_{\psi\in\Psi} C_*(W(t,\tau,\upsilon)-\gamma(t,\tau),\psi)\le 0$.

Зауваження 1. Умова 3 еквівалентна включенню $0\in[W(t,\tau,\upsilon)-\gamma(t,\tau)]$ для всіх $\tau\in[0,t]$, $\upsilon\in V$, яке, взагалі кажучи, не гарантує виконання умови 2. При цьому, якщо $W(t,\tau,\upsilon)=\pi\Omega(t,\tau)\varphi(U,\upsilon)$, умова 3 гарантує справедливість умови 2.

Зафіксуємо деяку функцію зсуву $\gamma(t,\tau)$ і покладемо

$$\xi(t)=\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))=\pi g(t)+\int_0^t \gamma(t,\tau)\,d\tau.$$

Розглянемо множину

$$\mathrm{P}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\{t\ge 0\colon \sigma(\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))\le 0\}.$$

Якщо нерівність у фігурних дужках не виконується ні для яких $t\ge 0$, то покладемо $\mathrm{P}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\varnothing$.

Теорема 1. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2) з термінальним функціоналом $\sigma(z)$ виконана умова 3, для відповідної функції зсуву $\gamma(t,\tau)$ множина $\mathrm{P}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ не є порожньою і $\mathrm{P}\in\mathrm{P}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$. Тоді, якщо в співвідношенні (6) максимум досягається на деякому векторі $\psi(\mathrm{P})$, гра може бути закінчена в момент P з використанням керування вигляду (4).

Доведення. Нехай $\upsilon(\tau)$ — довільний вимірний селектор компакта V, $\tau\in[0,\mathrm{P}]$, $\psi(\mathrm{P})$ — зазначений в умові теореми вектор. Наведемо спосіб вибору керування переслідувачем.

Розглянемо для $\tau\in[0,\mathrm{P}]$, $\upsilon\in V$ компактнозначне багатозначне відображення

$$U_0(\tau,\upsilon)=\{u\in U\colon(\pi\Omega(\mathrm{P},\tau)\varphi(u,\upsilon)-\gamma(\mathrm{P},\tau),\psi(\mathrm{P}))=$$

$$=C_*(W(\mathrm{P},\tau,\upsilon)-\gamma(\mathrm{P},\tau),\psi(\mathrm{P}))\}. \qquad (7)$$

З урахуванням властивостей параметрів процесу (1) і нижньої опорної функції $C_*(W(\mathrm{P},\tau,\upsilon)-\gamma(\mathrm{P},\tau),\psi(\mathrm{P}))$ компактнозначне багатозначне відображення $U_0(\tau,\upsilon)$ є $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-вимірним [2] для $\tau\in[0,\mathrm{P}]$, $\upsilon\in V$. Тому за теоремою про вимірний вибір селектора [9] багатозначне відображення $U_0(\tau,\upsilon)$ містить $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-вимірний селектор $u_0(\tau,\upsilon)$, який є суперпозиційно вимірною функцією [2].

Покладемо керування першого гравця $u_0(\tau)=u_0(\tau,\upsilon(\tau))$, $\tau\in[0,\mathrm{P}]$. Взявши до уваги співвідношення (6), отримаємо

$$\sigma(z(\mathrm{P}))=(\psi(\mathrm{P}),\xi(\mathrm{P}))+$$

$$+\int_0^{\mathrm{P}}(\psi(\mathrm{P}),\pi\Omega(\mathrm{P},\tau)\varphi(u_0(\tau),\upsilon(\tau))-\gamma(\mathrm{P},\tau))d\tau-\sigma^*(\psi(\mathrm{P})). \qquad (8)$$

Тоді з урахуванням умови 3 співвідношення (7) і (8) визначають

$$\sigma(z(\mathrm{P}))\le(\psi(\mathrm{P}),\xi(\mathrm{P}))-\sigma^*(\psi(\mathrm{P}))\le\sigma(\xi(\mathrm{P},g(\mathrm{P}),\gamma(\mathrm{P},\cdot)))\le 0.$$

Звідси випливає нерівність (2) в момент P.

Зауваження 2. З умови 2 випливає, що існує вимірний селектор $\gamma_0(t,\tau)$, $\gamma_0(t,\tau)\in\bigcap\limits_{\upsilon\in V}\pi\Omega(t,\tau)\varphi(U,\upsilon)$, для якого виконується умова 3.

Розглянемо на множині $\Delta \times V$ багатозначне відображення

$$\mathfrak{A}(t, \tau, v) = \{\alpha \geq 0 : \max_{\psi \in \Psi} [C_*(W(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau), \psi) + \alpha[(\psi, \xi(t)) - \sigma^*(\psi)]] \leq 0\}.$$

Умова 4. Виконана умова 1 і багатозначне відображення $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ не є порожнім на множині $\Delta \times V$.

Якщо умову 4 виконано, то розглянемо верхню і нижню скалярні розв'язувальні функції першого типу

$$\alpha^*(t, \tau, v) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)\},$$

$$\alpha_*(t, \tau, v) = \inf\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)\}, \; \tau \in [0, t], \; v \in V.$$

За аналогією до роботи [2] можна показати, що багатозначне відображення $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ є замкнутозначним, $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірним за сукупністю (τ, v), $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, а верхня і нижня розв'язувальні функції, будучи відповідно верхньою і нижньою опорною функцією багатозначного відображення $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ в напрямку $+1$, $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірні за сукупністю (τ, v), $\tau \in [0, t]$, $v \in V$. Тому вони суперпозиційно вимірні [2], тобто $\alpha^*(t, \tau, v(\tau))$ і $\alpha_*(t, \tau, v(\tau))$ вимірні за τ, $\tau \in [0, t]$, для будь-якої вимірної функції $v(\cdot) \in V(\cdot)$, де $V(\cdot)$ — сукупність вимірних функцій $v(\tau)$, $\tau \in [0, +\infty]$, зі значеннями з множини V. Зауважимо також, що верхня розв'язувальна функція напівбезперервна зверху, а нижня — напівбезперервна знизу за змінною v і функції $\inf_{v \in V} \alpha^*(t, \tau, v)$ та $\sup_{v \in V} \alpha_*(t, \tau, v)$ вимірні за τ, $\tau \in [0, t]$.

Розглянемо множину

$$\mathrm{P}_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \left\{ t \geq 0 : \sigma(\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot))) \leq 0, \int_0^t \sup_{v \in V} \alpha_*(t, \tau, v)\, d\tau < 1 \right\}.$$

Якщо нерівності у фігурних дужках не справджуються ні для яких $t \geq 0$, то покладемо $\mathrm{P}_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \varnothing$.

Теорема 2. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2) з термінальним функціоналом $\sigma(z)$ виконана умова 4, для відповідної функції зсуву $\gamma(t, \tau)$ множина $\mathrm{P}_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не є порожньою і $\mathrm{P}_*^1 \in \mathrm{P}_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$. Тоді, якщо в співвідношенні (6) максимум досягається на деякому векторі $\psi(\mathrm{P}_*^1)$, гра може бути закінчена в момент P_*^1 з використанням керування вигляду (4).

Доведення. Нехай $v(\tau)$ — довільний вимірний селектор компакта V, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^1]$, $\psi(\mathrm{P}_*^1)$ — зазначений в умові теореми вектор. Наведемо спосіб вибору керування переслідувачем.

Розглянемо для $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^1]$, $v \in V$ компактнозначне багатозначне відображення

$$U_*^1(\tau, v) = \{u \in U : (\pi\Omega(\mathrm{P}_*^1, \tau)\varphi(u, v) - \gamma(\mathrm{P}_*^1, \tau), \psi(\mathrm{P}_*^1)) =$$

$$= C_*(W(\mathrm{P}_*^1, \tau, v) - \gamma(\mathrm{P}_*^1, \tau), \psi(\mathrm{P}_*^1))\}. \tag{9}$$

З урахуванням властивостей параметрів процесу (1) і нижньої опорної функції $C_*(W(\mathrm{P}_*^1, \tau, \upsilon) - \gamma(\mathrm{P}_*^1, \tau), \psi(\mathrm{P}_*^1))$ компактнозначне багатозначне відображення $U_*^1(\tau, \upsilon)$ є $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірним [2] для $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^1]$, $\upsilon \in V$. Тому за теоремою про вимірний вибір селектора [9] багатозначне відображення $U_*^1(\tau, \upsilon)$ містить $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірний селектор $u_*^1(\tau, \upsilon)$, який є суперпозиційно вимірною функцією [2].

Покладемо керування першого гравця $u_*^1(\tau) = u_*^1(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^1]$. Тоді з огляду на умову 4 для $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^1]$ справджується нерівність

$$(\psi(\mathrm{P}_*^1), \pi\Omega(\mathrm{P}_*^1, \tau)\varphi(u_*^1(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(\mathrm{P}_*^1, \tau)) +$$
$$+\alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, \upsilon(\tau))[(\psi(\mathrm{P}_*^1), \xi(\mathrm{P}_*^1)) - \sigma^*(\psi(\mathrm{P}_*^1))] \le 0. \tag{10}$$

Враховуючи співвідношення (6), отримуємо

$$\sigma(z(\mathrm{P}_*^1)) = (\psi(\mathrm{P}_*^1), \xi(\mathrm{P}_*^1)) +$$
$$+\int_0^{\mathrm{P}_*^1} (\psi(\mathrm{P}_*^1), \pi\Omega(\mathrm{P}_*^1, \tau)\varphi(u_*(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(\mathrm{P}_*^1, \tau))d\tau - \sigma^*(\psi(\mathrm{P}_*^1)).$$

Додавши і віднявши в цій рівності вираз

$$[(\psi(\mathrm{P}_*^1), \xi(\mathrm{P}_*^1)) - \sigma^*(\psi(\mathrm{P}_*^1))]\int_0^{\mathrm{P}_*^1} \alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, \upsilon(\tau))d\tau,$$

одержимо

$$\sigma(z(\mathrm{P}_*^1)) = [(\psi(\mathrm{P}_*^1), \xi(\mathrm{P}_*^1)) - \sigma^*(\psi(\mathrm{P}_*^1))]\left(1 - \int_0^{\mathrm{P}_*^1} \alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, \upsilon(\tau))d\tau\right) +$$
$$+\int_0^{\mathrm{P}_*^1} [(\psi(\mathrm{P}_*^1), \pi\Omega(\mathrm{P}_*^1, \tau)\varphi(u_*^1(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(\mathrm{P}_*^1, \tau)) + \tag{11}$$
$$+\alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, \upsilon(\tau))[(\psi(\mathrm{P}_*^1), \xi(\mathrm{P}_*^1)) - \sigma^*(\psi(\mathrm{P}_*^1))]]d\tau.$$

Враховуючи співвідношення (9)–(11), переслідувач може гарантувати в момент P_*^1 виконання нерівності

$$\sigma(z(\mathrm{P}_*^1)) \le [(\psi(\mathrm{P}_*^1), \xi(\mathrm{P}_*^1)) - \sigma^*(\psi(\mathrm{P}_*^1))]\left(1 - \int_0^{\mathrm{P}_*^1} \alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, \upsilon(\tau))\, d\tau\right).$$

При цьому за визначенням P_*^1 справедливі співвідношення

$$(\psi(\mathrm{P}_*^1), \xi(\mathrm{P}_*^1)) - \sigma^*(\psi(\mathrm{P}_*^1)) \le \sigma(\xi(\mathrm{P}_*^1, g(\mathrm{P}_*^1), \gamma(\mathrm{P}_*^1, \cdot))) \le 0,$$

$$1 - \int_0^{\mathrm{P}_*^1} \alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, \upsilon(\tau))d\tau \ge 1 - \int_0^{\mathrm{P}_*^1} \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, \upsilon)\, d\tau > 0.$$

Тому маємо

$$\sigma(z(\mathrm{P}_*^1)) \le \sigma(\xi(\mathrm{P}_*^1, g(\mathrm{P}_*^1), \gamma(\mathrm{P}_*^1, \cdot))) \left(1 - \int_0^{\mathrm{P}_*^1} \alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, \upsilon(\tau)) d\tau \right) \le 0,$$

що завершує доведення теореми.

Зауваження 3. Якщо для деякої функції зсуву $\gamma(t, \tau)$, $\gamma : \Delta \to L$ на множині $\Delta \times V$ виконано умову 3, то $0 \in \mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon)$, $\tau \in [0, t]$, $\upsilon \in V$. Тому справедлива умова 4 і $\alpha_*(t, \tau, \upsilon) = \inf\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon)\} = 0$ на множині $\Delta \times V$.

Умова 5. Виконана умова 4 і на множині Δ справедлива нерівність

$$\sup_{\upsilon \in V} \max_{\psi \in \Psi} [C_*(W(t, \tau, \upsilon) - \gamma(t, \tau), \psi) + \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(t, \tau, \upsilon)[(\psi, \xi(t)) - \sigma^*(\psi)]] \le 0.$$

Зауваження 4. Якщо для деякої функції зсуву $\gamma(t, \tau)$, $\gamma : \Delta \to L$, на множині $\Delta \times V$ виконано умову 3, то справедлива умова 5 и $\sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(t, \tau, \upsilon) = 0$ на множині Δ.

Розглянемо множину

$$T(g(t), \gamma(\cdot, \cdot)) = \left\{ t \ge 0 : \int_0^t \inf_{\upsilon \in V} \sigma^*(t, \tau, \upsilon) d\tau \ge 1, \int_0^t \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(t, \tau, \upsilon) d\tau < 1 \right\}. \qquad (12)$$

Якщо для деякого $t > 0$ маємо $\alpha^*(t, \tau, \upsilon) \equiv +\infty$ для $\tau \in [0, t]$, $\upsilon \in V$, то в такому разі значення відповідного інтеграла у фігурних дужках співвідношення (12) природно покласти рівним $+\infty$ і $t \in T(g(t), \gamma(\cdot, \cdot))$, якщо для цього t справедлива інша нерівність у фігурних дужках співвідношення (12). У разі, коли нерівності співвідношення (12) не справджуються для всіх $t > 0$, покладемо $T(g(t), \gamma(\cdot, \cdot)) = \varnothing$.

Теорема 3. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2) з термінальним функціоналом $\sigma(z)$ виконана умова 5, для відповідної функції зсуву $\gamma(\cdot, \cdot)$ множина $T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не є порожньою і $T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$. Тоді, якщо в співвідношенні (6) максимум досягається на деякому векторі $\psi(T)$, гра може бути закінчена в момент T з використанням керування вигляду (3).

Доведення. Нехай $\upsilon(\tau)$ — довільний вимірний селектор компакта V, $\tau \in [0, T]$, $\psi(T)$ — зазначений в умові теореми вектор.

Розглянемо спочатку випадок $\sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) > 0$ і запровадимо контрольну функцію

$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau)) d\tau - \int_t^T \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T, \tau, \upsilon) d\tau, \; t \in [0, T].$$

За визначенням T маємо

$$h(0) = 1 - \int_0^T \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T, \tau, \upsilon)\, d\tau > 0,$$

$$h(T) = 1 - \int_0^T \sigma^*(T, \tau, \upsilon(\tau))\, d\tau \le 1 - \int_0^T \inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(t, \tau, \upsilon)\, d\tau \le 0.$$

Внаслідок безперервності функції $h(t)$ існує такий момент часу t_*, $t_* \in (0, T]$, що $h(t_*) = 0$. Зауважимо, що момент перемикання t_* залежить від передісторії керування другого гравця $\upsilon_{t_*}(\cdot) = \{\upsilon(s) : s \in [0, t_*]\}$.

Розглянемо для $\tau \in [0, T]$, $\upsilon \in V$ компактнозначне багатозначне відображення

$$U_1(\tau, \upsilon) = \{u \in U : (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, \upsilon) - \gamma(T, \tau), \psi(T)) =$$

$$= C_*(W(T, \tau, \upsilon) - \gamma(T, \tau), \psi(T))\}. \qquad (13)$$

З урахуванням властивостей параметрів процесу (1) і нижньої опорної функції $C_*(W(T, \tau, \upsilon) - \gamma(T, \tau), \psi(T))$ компактнозначне багатозначне відображення $U_1(\tau, \upsilon)$ є $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірним [2] для $\tau \in [0, T]$, $\upsilon \in V$. Тому за теоремою про вимірний вибір селектора [9] багатозначне відображення $U_1(\tau, \upsilon)$ містить $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірний селектор $u_1(\tau, \upsilon)$, який є суперпозиційно вимірною функцією [2].

Покладемо керування першого гравця $u_1(\tau) = u_1(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [0, T]$.

Відповідно до умови 5 з урахуванням умови 4 і співвідношення (13) для $\tau \in [0, t_*]$ справедлива нерівність

$$(\psi(T), \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u_1(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(T, \tau)) +$$

$$+ \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau))[(\psi(T), \xi(T)) - \sigma^*(\psi(T))] \le 0, \qquad (14)$$

а для $\tau \in [t_*, T]$ — нерівність

$$(\psi(T), \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u_1(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(T, \tau)) +$$

$$+ \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T, \tau, \upsilon)[(\psi(T), \xi(T)) - \sigma^*(\psi(T))] \le 0. \qquad (15)$$

Враховуючи співвідношення (6), отримуємо

$$\sigma(z(T)) = (\psi(T), \xi(T)) + \int_0^T (\psi(T), \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u_1(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(T, \tau)) d\tau - \sigma^*(\psi(T)).$$

Додамо і віднімемо в цій рівності вираз

$$[(\psi(T), \xi(T)) - \sigma^*(T)] \left[\int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau))\, d\tau + \int_{t_*}^T \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T, \tau, \upsilon)\, d\tau \right].$$

Тоді отримаємо

$$\sigma(z(T)) =$$

$$[(\psi(T), \xi(T)) - \sigma^*(\psi(T))]\, h(t_*) + \int_0^{t_*} [(\psi(T), \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u_1(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(T, \tau)) +$$

$$+ \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau))[(\psi(T), \xi(T)) - \sigma^*(\psi(T))]] d\tau +$$

$$+ \int_{t_*}^T [(\psi(T), \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u_1(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(T, \tau)) +$$

$$+ \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T, \tau, \upsilon)[(\psi(T), \xi(T)) - \sigma^*(\psi(T))]] d\tau.$$

З урахуванням співвідношень (14), (15) це означає, що переслідувач може гарантувати в момент T виконання нерівності

$$\sigma(z(T)) \leq [(\psi(T), \xi(T)) - \sigma^*(\psi(T))]\, h(t_*) \leq \sigma(\xi(T))h(t_*) = 0\,.$$

Для випадку $\sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) \leq 0$ достатньо застосувати теорему 2, що завершує доведення теореми.

Умова 6. Виконана умова 4 і на множині Δ справедлива нерівність

$$\sup_{\upsilon \in V} \max_{\psi \in \Psi} [C_*(W(t, \tau, \upsilon) - \gamma(t, \tau), \psi) + \inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(t, \tau, \upsilon)[(\psi, \xi(t)) - \sigma^*(\psi)]] \leq 0\,.$$

Теорема 4. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2) з термінальним функціоналом $\sigma(z)$ виконані умови 5, 6, для відповідної функції зсуву $\gamma(\cdot, \cdot)$ множина $T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не є порожньою і $T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$. Тоді, якщо в співвідношенні (6) максимум досягається на деякому векторі $\psi(T)$, гра може бути закінчена в момент T з використанням керування вигляду (4).

Доведення. Нехай $\upsilon(\tau)$ — довільний вимірний селектор компакта V, $\tau \in [0, T]$, $\psi(T)$ — зазначений в умові теореми вектор.

Розглянемо спочатку випадок $\sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) > 0$ і запровадимо контрольну функцію

$$h(t) = 1 - \int_0^t \inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(T, \tau, \upsilon) d\tau - \int_t^T \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T, \tau, \upsilon) d\tau,\;\; t \in [0, T]\,.$$

За визначенням T маємо

$$h(0) = 1 - \int_0^T \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T, \tau, \upsilon)\, d\tau > 0\,,\;\; h(T) = 1 - \int_0^T \inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(T, \tau, \upsilon)\, d\tau \leq 0\,.$$

Внаслідок безперервності функції $h(t)$ існує такий момент часу t_*, $t_* \in (0, T]$, що $h(t_*) = 0$. Зауважимо, що момент перемикання t_* не залежить від передісторії керування другого гравця $\upsilon_{t_*}(\cdot) = \{\upsilon(s) : s \in [0, t_*]\}$.

Розглянемо для $\tau \in [0, T]$, $\upsilon \in V$ компактнозначне багатозначне відображення

$$\widetilde{U}_1(\tau, \upsilon) = \{u \in U : (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, \upsilon) - \gamma(T, \tau), \psi(T)) =$$

$$= C_*(W(T, \tau, \upsilon) - \gamma(T, \tau), \psi(T))\}\,. \qquad (16)$$

З урахуванням властивостей параметрів процесу (1) і нижньої опорної функції $C_*(W(T, \tau, \upsilon) - \gamma(T, \tau), \psi(T))$ компактнозначне багатозначне відображення $\widetilde{U}_1(\tau, \upsilon)$ є $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірним [1] для $\tau \in [0, T]$, $\upsilon \in V$. Тому за теоремою про вимірний вибір селектора [9] багатозначне відображення $\widetilde{U}_1(\tau, \upsilon)$ містить $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірний селектор $\widetilde{u}_1(\tau, \upsilon)$, який є суперпозиційно вимірною функцією [2].

Покладемо керування першого гравця $\widetilde{u}_1(\tau) = \widetilde{u}_1(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [0, T]$.

Відповідно до умови 6 з урахуванням умови 4 і співвідношення (16) для $\tau \in [0, t_*]$ справджується нерівність

$$(\psi(T), \pi\Omega(T, \tau)\varphi(\widetilde{u}_1(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(T, \tau)) +$$

$$+ \inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(T, \tau, \upsilon)[(\psi(T), \xi(T)) - \sigma^*(\psi(T))] \leq 0\,. \qquad (17)$$

Згідно з умовою 5 для $\tau \in [t_*, T]$ справедлива нерівність

$$(\psi(T), \pi\Omega(T,\tau)\varphi(\widetilde{u}_1(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(T,\tau)) +$$

$$+ \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T,\tau,\upsilon)[(\psi(T), \xi(T)) - \sigma^*(\psi(T))] \le 0\,. \tag{18}$$

Враховуючи співвідношення (6), отримуємо

$$\sigma(z(T)) = (\psi(T), \xi(T)) + \int_0^T (\psi(T), \pi\Omega(T,\tau)\varphi(\widetilde{u}_1(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(T,\tau))d\tau - \sigma^*(\psi(T))\,.$$

Додамо і віднімемо в цій рівності вираз

$$[(\psi(T), \xi(T)) - \sigma^*(T)]\left[\int_0^{t_*} \inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(T,\tau,\upsilon)\,d\tau + \int_{t_*}^T \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T,\tau,\upsilon)\,d\tau\right].$$

Тоді отримаємо

$$\sigma(z(T)) =$$

$$= [(\psi(T), \xi(T)) - \sigma^*(\psi(T))]\,h(t_*) + \int_0^{t_*} [(\psi(T), \pi\Omega(T,\tau)\varphi(\widetilde{u}_1(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(T,\tau)) +$$

$$+ \inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(T,\tau,\upsilon)[(\psi(T), \xi(T)) - \sigma^*(\psi(T))]]d\tau +$$

$$+ \int_{t_*}^T [(\psi(T), \pi\Omega(T,\tau)\varphi(\widetilde{u}_1(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(T,\tau)) +$$

$$+ \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T,\tau,\upsilon)[(\psi(T), \xi(T)) - \sigma^*(\psi(T))]]d\tau.$$

З урахуванням співвідношень (17), (18) це означає, що переслідувач може гарантувати в момент T виконання нерівності

$$\sigma(z(T)) \le [(\psi(T), \xi(T)) - \sigma^*(\psi(T))]\,h(t_*) \le \sigma(\xi(T))h(t_*) = 0\,.$$

Для випадку $\sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T,\cdot))) \le 0$ достатньо застосувати теорему 2, що завершує доведення теореми.

МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ. РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНІ ФУНКЦІЇ ДРУГОГО ТИПУ

Розглянемо багатозначне відображення

$$\mathfrak{A}(t,\tau) = \bigcap_{\upsilon \in V} \mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon)\,,\ \ (t,\tau) \in \Delta\,.$$

Умова 7. Виконана умова 4 і багатозначне відображення $\mathfrak{A}(t,\tau)$ не є порожнім на множині Δ.

Якщо умову 7 виконано, то розглянемо верхню і нижню скалярні розв'язувальні функції другого типу

$$\alpha^*(t,\tau) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t,\tau)\}\,,\ \alpha_*(t,\tau) = \inf\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t,\tau)\}\,,\ \tau \in [0, t]\,,\ \upsilon \in V.$$

Можна показати [2], що багатозначне відображення $\mathfrak{A}(t,\tau)$ замкнутозначне, $\mathfrak{L}$-вимірне за τ, $\tau\in[0,t]$, $\upsilon\in V$, а верхня і нижня розв'язувальні функції, будучи відповідно верхньою і нижньою опорною функцією багатозначного відображення $\mathfrak{A}(t,\tau)$ в напрямку $+1$, $\mathfrak{L}$-вимірні за τ, $\tau\in[0,t]$.

Зауваження 5. Якщо для деякої функції зсуву $\gamma(t,\tau)$ на множині Δ виконано умову 5, то $\sup\limits_{\upsilon\in V}\alpha_*(t,\tau,\upsilon)\in\mathfrak{A}(t,\tau)$, $\tau\in[0,t]$. Тоді виконана умова 7 і справедлива рівність $\sup\limits_{\upsilon\in V}\alpha_*(t,\tau,\upsilon)=\alpha_*(t,\tau)$, $\tau\in[0,t]$. Якщо для деякої функції зсуву $\gamma(t,\tau)$ на множині Δ виконано умову 6, то $\inf\limits_{\upsilon\in V}\alpha^*(t,\tau,\upsilon)\in\mathfrak{A}(t,\tau)$, $\tau\in[0,t]$. Тоді виконана умова 7 і справедлива рівність $\inf\limits_{\upsilon\in V}\alpha^*(t,\tau,\upsilon)=\alpha^*(t,\tau)$, $\tau\in[0,t]$.

Разглянемо множину

$$\mathrm{P}_*^2(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\left\{t\ge 0: \sigma(\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot)))\le 0, \int\limits_0^t\alpha_*(t,\tau)d\tau<1\right\}.$$

Якщо нерівності у фігурних дужках не виконуються ні для яких $t\ge 0$, то покладемо $\mathrm{P}_*^2(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\varnothing$.

Теорема 5. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2) з термінальним функціоналом $\sigma(z)$ виконана умова 7, для відповідної функції зсуву $\gamma(t,\tau)$ множина $\mathrm{P}_*^2(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ не є порожньою і $\mathrm{P}_*^2\in\mathrm{P}_*^2(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$. Тоді, якщо в співвідношенні (6) максимум досягається на деякому векторі $\psi(\mathrm{P}_*^2)$, гра може бути закінчена в момент P_*^2 з використанням керування вигляду (4).

Доведення. Нехай $\upsilon(\tau)$ — довільний вимірний селектор компакта V, $\tau\in[0,\mathrm{P}_*^2]$, $\psi(\mathrm{P}_*^2)$ — зазначений в умові теореми вектор. Наведемо спосіб вибору керування переслідувачем.

Розглянемо для $\tau\in[0,\mathrm{P}_*^2]$, $\upsilon\in V$ компактнозначне багатозначне відображення

$$U_*^2(\tau,\upsilon)=\{u\in U:(\pi\Omega(\mathrm{P}_*^2,\tau)\varphi(u,\upsilon)-\gamma(\mathrm{P}_*^2,\tau),\psi(\mathrm{P}_*^2))=$$
$$=C_*(W(\mathrm{P}_*^2,\tau,\upsilon)-\gamma(\mathrm{P}_*^2,\tau),\psi(\mathrm{P}_*^2))\}. \qquad (19)$$

З урахуванням властивостей параметрів процесу (1) і нижньої опорної функції $C_*(W(\mathrm{P}_*^2,\tau,\upsilon)-\gamma(\mathrm{P}_*^2,\tau),\psi(\mathrm{P}_*^2))$ компактнозначне багатозначне відображення $U_*^2(\tau,\upsilon)$ є $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-вимірним [2] для $\tau\in[0,\mathrm{P}_*^2]$, $\upsilon\in V$. Тому за теоремою про вимірний вибір селектора [9] багатозначне відображення $U_*^2(\tau,\upsilon)$ містить $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-вимірний селектор $u_*^2(\tau,\upsilon)$, який є суперпозиційно вимірною функцією [2].

Покладемо керування першого гравця $u_*^2(\tau)=u_*^2(\tau,\upsilon(\tau))$, $\tau\in[0,\mathrm{P}_*^2]$. Тоді з огляду на умову 7 для $\tau\in[0,\mathrm{P}_*^2]$ справедлива нерівність

$$(\psi(\mathrm{P}_*^2), \pi\Omega(\mathrm{P}_*^2, \tau)\varphi(u_*^2(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(\mathrm{P}_*^2, \tau)) +$$

$$+\alpha_*(\mathrm{P}_*^2, \tau)[(\psi(\mathrm{P}_*^2), \xi(\mathrm{P}_*^2)) - \sigma^*(\psi(\mathrm{P}_*^2))] \le 0\,. \tag{20}$$

Беручи до уваги співвідношення (6), отримуємо

$$\sigma(z(\mathrm{P}_*^2)) = (\psi(\mathrm{P}_*^2), \xi(\mathrm{P}_*^2)) +$$

$$+\int_0^{\mathrm{P}_*^2} (\psi(\mathrm{P}_*^2), \pi\Omega(\mathrm{P}_*^2, \tau)\varphi(u_*(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(\mathrm{P}_*^2, \tau))d\tau - \sigma^*(\psi(\mathrm{P}_*^2))\,.$$

Додавши і віднявши в цій рівності вираз

$$[(\psi(\mathrm{P}_*^2), \xi(\mathrm{P}_*^2)) - \sigma^*(\psi(\mathrm{P}_*^1))] \int_0^{\mathrm{P}_*^2} \alpha_*(\mathrm{P}_*^2, \tau)d\tau,$$

одержимо

$$\sigma(z(\mathrm{P}_*^2)) = [(\psi(\mathrm{P}_*^2), \xi(\mathrm{P}_*^2)) - \sigma^*(\psi(\mathrm{P}_*^2))]\left(1 - \int_0^{\mathrm{P}_*^2} \alpha_*(\mathrm{P}_*^2, \tau)d\tau\right) +$$

$$+\int_0^{\mathrm{P}_*^2} [(\psi(\mathrm{P}_*^2), \pi\Omega(\mathrm{P}_*^2, \tau)\varphi(u_*^2(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(\mathrm{P}_*^2, \tau)) +$$

$$+\alpha_*(\mathrm{P}_*^2, \tau, \upsilon(\tau))[(\psi(\mathrm{P}_*^2), \xi(\mathrm{P}_*^2)) - \sigma^*(\psi(\mathrm{P}_*^2))]]d\tau. \tag{21}$$

Враховуючи співвідношення (19)–(21), переслідувач може гарантувати в момент P_*^2 виконання нерівності

$$\sigma(z(\mathrm{P}_*^2)) \le [(\psi(\mathrm{P}_*^2), \xi(\mathrm{P}_*^2)) - \sigma^*(\psi(\mathrm{P}_*^2))]\left(1 - \int_0^{\mathrm{P}_*^2} \alpha_*(\mathrm{P}_*^2, \tau)\, d\tau\right).$$

При цьому за визначенням P_*^2 справедливі співвідношення

$$(\psi(\mathrm{P}_*^2), \xi(\mathrm{P}_*^2)) - \sigma^*(\psi(\mathrm{P}_*^2)) \le \sigma(\xi(\mathrm{P}_*^2, g(\mathrm{P}_*^2), \gamma(\mathrm{P}_*^2, \cdot))) \le 0\,,$$

$$1 - \int_0^{\mathrm{P}_*^2} \alpha_*(\mathrm{P}_*^2, \tau)d\tau > 0\,.$$

Тому маємо

$$\sigma(z(\mathrm{P}_*^2)) \le \sigma(\xi(\mathrm{P}_*^2, g(\mathrm{P}_*^2), \gamma(\mathrm{P}_*^2, \cdot)))\left(1 - \int_0^{\mathrm{P}_*^2} \alpha_*(\mathrm{P}_*^2, \tau)d\tau\right) \le 0,$$

що завершує доведення теореми.

Зауваження 6. Якщо для деякої функції зсуву $\gamma(t, \tau)$, $\gamma : \Delta \to L$, на множині $\Delta \times V$ виконано умову 3, то $0 \in \mathfrak{A}(t, \tau)$, $\tau \in [0, t]$. Тому виконані умови 5, 7 і на множині Δ справедлива рівність $\sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(t, \tau, \upsilon) = \alpha_*(t, \tau) = 0$.

Розглянемо множину

$$\Theta(g(t), \gamma(\cdot, \cdot)) = \left\{ t \ge 0 : \int_0^t \alpha^*(t, \tau)\, d\tau \ge 1, \int_0^t \alpha_*(t, \tau)\, d\tau < 1 \right\}. \tag{22}$$

Якщо для деякого $t > 0$ маємо $\alpha^*(t, \tau) \equiv +\infty$ для $\tau \in [0, t]$, $\upsilon \in V$, то в такому разі значення відповідного інтеграла у фігурних дужках співвідношення (22) природно покласти рівним $+\infty$ і $t \in \Theta(g(t), \gamma(\cdot, \cdot))$, якщо для цього t справедлива інша нерівність у фігурних дужках співвідношення (22). У разі, коли нерівності співвідношення (22) не виконуються для всіх $t > 0$, покладемо $\Theta(g(t), \gamma(\cdot, \cdot)) = \varnothing$.

Теорема 6. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2) з термінальним функціоналом $\sigma(z)$ виконана умова 7, для відповідної функції зсуву $\gamma(\cdot, \cdot)$ множина $\Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не є порожньою і $\Theta \in \Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$. Тоді, якщо в співвідношенні (6) максимум досягається на деякому векторі $\psi(\Theta)$, гра може бути закінчена в момент Θ з використанням керування вигляду (4).

Доведення. Нехай $\upsilon(\tau)$ — довільний вимірний селектор компакта V, $\tau \in [0, \Theta]$, $\psi(\Theta)$ — зазначений в умові теореми вектор.

Розглянемо спочатку випадок $\sigma(\xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\Theta, \cdot))) > 0$ і запровадимо контрольну функцію

$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha^*(\Theta, \tau) d\tau - \int_t^\Theta \alpha_*(\Theta, \tau) d\tau, \ \ t \in [0, \Theta].$$

За визначенням Θ маємо

$$h(0) = 1 - \int_0^\Theta \alpha_*(\Theta, \tau)\, d\tau > 0, \ \ h(\Theta) = 1 - \int_0^\Theta \inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(\Theta, \tau)\, d\tau \le 0.$$

Внаслідок безперервності функції $h(t)$ існує такий момент часу t_*, $t_* \in (0, \Theta]$, що $h(t_*) = 0$. Зауважимо, що момент перемикання t_* не залежить від передісторії керування другого гравця $\upsilon_{t_*}(\cdot) = \{\upsilon(s) : s \in [0, t_*]\}$.

Розглянемо для $\tau \in [0, \Theta]$, $\upsilon \in V$ компактнозначне багатозначне відображення

$$\widetilde{U}_2(\tau, \upsilon) = \{u \in U : (\pi\Omega(\Theta, \tau)\varphi(u, \upsilon) - \gamma(\Theta, \tau), \psi(\Theta)) =$$
$$= C_*(W(\Theta, \tau, \upsilon) - \gamma(\Theta, \tau), \psi(\Theta))\}. \tag{23}$$

З урахуванням властивостей параметрів процесу (1) і нижньої опорної функції $C_*(W(\Theta, \tau, \upsilon) - \gamma(\Theta, \tau), \psi(\Theta))$ компактнозначне багатозначне відображення $\widetilde{U}_2(\tau, \upsilon)$ є $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірним [2] для $\tau \in [0, T]$, $\upsilon \in V$. Тому за теоремою про вимірний вибір селектора [9] багатозначне відображення $\widetilde{U}_2(\tau, \upsilon)$ містить $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірний селектор $\widetilde{u}_2(\tau, \upsilon)$, який є суперпозиційно вимірною функцією [2].

Покладемо керування першого гравця $\widetilde{u}_2(\tau) = \widetilde{u}_2(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [0, \Theta]$.

Відповідно до умови 7 з урахуванням співвідношення (23) для $\tau \in [0, t_*]$ справедлива нерівність

$$(\psi(\Theta), \pi\Omega(\Theta, \tau)\varphi(\widetilde{u}_2(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(\Theta, \tau)) +$$
$$+ \alpha^*(\Theta, \tau)[(\psi(\Theta), \xi(\Theta)) - \sigma^*(\psi(\Theta))] \le 0. \tag{24}$$

Згідно з умовою 7 для $\tau \in [t_*, T]$ виконана нерівність

$$(\psi(\Theta), \pi\Omega(\Theta, \tau)\varphi(\widetilde{u}_2(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(\Theta, \tau)) +$$

$$+\alpha_*(\Theta, \tau)[(\psi(\Theta), \xi(\Theta)) - \sigma^*(\psi(\Theta))] \le 0\,. \qquad (25)$$

Враховуючи співвідношення (6), отримуємо

$$\sigma(z(\Theta)) = (\psi(\Theta), \xi(\Theta)) +$$

$$+\int_0^{\Theta} (\psi(\Theta), \pi\Omega(\Theta, \tau)\varphi(\widetilde{u}_2(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(\Theta, \tau))d\tau - \sigma^*(\psi(\Theta))\,.$$

Додамо і віднімемо в цій рівності вираз

$$[(\psi(\Theta), \xi(\Theta)) - \sigma^*(\Theta)]\left[\int_0^{t_*} \alpha^*(\Theta, \tau)\, d\tau + \int_{t_*}^{\Theta} \alpha_*(\Theta, \tau)\, d\tau\right].$$

Тоді отримаємо

$$\sigma(z(\Theta)) = [(\psi(\Theta), \xi(\Theta)) - \sigma^*(\psi(\Theta))]\, h(t_*) +$$

$$+\int_0^{t_*} [(\psi(\Theta), \pi\Omega(\Theta, \tau)\varphi(\widetilde{u}_2(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(\Theta, \tau)) +$$

$$+\alpha^*(\Theta, \tau)[(\psi(\Theta), \xi(\Theta)) - \sigma^*(\psi(\Theta))]]d\tau +$$

$$+\int_{t_*}^{\Theta} [(\psi(\Theta), \pi\Omega(\Theta, \tau)\varphi(\widetilde{u}_2(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(\Theta, \tau)) +$$

$$+\alpha_*(\Theta, \tau)[(\psi(\Theta), \xi(\Theta)) - \sigma^*(\psi(\Theta))]]d\tau.$$

З урахуванням співвідношень (24), (25) це означає, що переслідувач може гарантувати в момент Θ виконання нерівності

$$\sigma(z(\Theta)) \le [(\psi(\Theta), \xi(\Theta)) - \sigma^*(\psi(\Theta))]\, h(t_*) \le \sigma(\xi(\Theta))h(t_*) = 0\,.$$

Для випадку $\sigma(\xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\Theta, \cdot))) \le 0$ достатньо застосувати теорему 5, що завершує доведення теореми.

ПОРІВНЯННЯ ГАРАНТОВАНИХ ЧАСІВ

Лема 1. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2) з термінальним функціоналом $\sigma(z)$ виконана умова 7, причому $\sigma(\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot))) > 0$. Тоді мають місце нерівності

$$\sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(t, \tau, \upsilon) \le \alpha_*(t, \tau)\,, \ \ (t, \tau) \in \Delta\,, \qquad (26)$$

$$\inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(t, \tau, \upsilon) \ge \alpha^*(t, \tau)\,, \ \ (t, \tau) \in \Delta\,. \qquad (27)$$

Якщо до того ж виконана умова 5, то нерівність (26) перетворюється в рівність. Якщо справедлива умова 6, то в рівність обертається нерівність (27).

Теорема 7. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2) з термінальним функціоналом $\sigma(z)$ виконана умова 7. Тоді мають місце включення

$$T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \supset \Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)), \ \mathrm{P}(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \supset \mathrm{P}_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \supset \mathrm{P}_*^2(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)).$$

Якщо до того ж виконані умови 5 і 6, то справедливі рівності

$$T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)), \ \mathrm{P}_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \mathrm{P}_*^2(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)).$$

Якщо виконана умова 3, то маємо

$$\mathrm{P}(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \mathrm{P}_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \mathrm{P}_*^2(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)),$$

причому, якщо виконана умова 2, як $\gamma(\cdot, \cdot)$ можна визначити певний селектор Понтрягіна [1].

Доказ леми 1 і теореми 7 безпосередньо випливає із конструкцій відповідних визначень, зауважень і теорем.

ВИСНОВКИ

У роботі розглядаються квазілінійні конфліктно-керовані процеси загального вигляду з термінальною функцією плати. Сформульовано достатні умови закінчення гри за кінцевий гарантований час у разі, коли умова Понтрягіна не виконується. Запропоновано дві схеми методу розв’язувальних функцій, що забезпечують завершення конфліктно-керованого процесу з термінальною функцією плати в класі екстремальних квазістратегій і контркерувань. Наведено порівняння гарантованих часів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Chikrii A. A. Conflict controlled processes. Dordrecht; Boston; London: Springer Science and Business Media, 2013. 424 p.
2. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. Т. 48, № 5. С. 40–64.
3. Chikrii A. A., Chikrii V. K. Image structure of multialued mappings in game problems of motion control. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48, N 3. P. 20–35.
4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. Москва: Наука, 1974. 455 с.
5. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Москва: Наука, 1988, Т. 2. 576 с.
6. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. Москва: Изд-во МГУ, 1984. 65 с.
7. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. Москва: Наука, 1981. 288 с.
8. Hajek O. Pursuit games. New York: Academic Press, 1975. Vol. 12. 266 p.

9. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-alued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.

10. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. Москва: Мир, 1973. 470 с.

11. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. Москва: Наука, 1974. 480 с.

12. Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов с терминальной функцией платы. *Проблемы управления и информатики*. 2016. № 2. С. 49–58. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i5.70.

13. Раппопорт И.С. О стробоскопической стратегии в методе разрешающих функций для игровых задач управления с терминальной функцией платы. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. Т. 52, № 4. С. 90–102. https://doi.org/10.1007/s10559-016-9860-z.

14. Раппопорт И.С. Достаточные условия гарантированного результата в дифференциальной игре с терминальной функцией платы. *Проблемы управления и информатики*. 2018. № 1. С. 72–84. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i2.20.

A.A. Chikrii, J.S. Rappoport

EXTREMUM STRATEGIES OF APPROACH OF CONTROLLED OBJECTS IN DYNAMIC GAME PROBLEMS WITH A TERMINAL PAYOFF FUNCTION

Abstract. The authors propose a method for solving the problem of approach of controlled objects in dynamic game problems with a terminal payoff function, which is reduced to the systematic use of the Fenhel-Moro ideas on the general scheme of the method of resolving functions. The essence of the method is that the resolving function can be expressed in terms of the function conjugate to the payoff function and, using the inclusiveness of the connection operator for a convex closed function, it is possible to obtain a guaranteed estimate of the terminal value of the payoff function represented by the payoff value at the initial instant of time and integral of the resolving function. A feature of the method is the cumulative principle used in the current summation of the resolving function to assess the quality of the game before reaching a certain threshold. The notion of the upper and lower resolving functions of two types is introduced and sufficient conditions of a guaranteed result in the differential game with the terminal payoff function are obtained in the case where Pontryagin's condition is not satisfied. Two schemes of the method of resolving functions with extremum strategies of approach of controlled objects are constructed and the guaranteed times are compared.

Keywords: terminal payoff function, quasilinear differential game, multi-valued mapping, measurable selector, extremum strategy, resolving function.

Надійшла до редакції 15.09.2021