УДК 519.8

С.О. МАЩЕНКО
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *s.o.mashchenko@gmail.com*.

МІНІМУМ НЕЧІТКИХ ЧИСЕЛ З НЕЧІТКОЮ МНОЖИНОЮ ОПЕРАНДІВ

Анотація. Досліджено операцію мінімізації з нечіткою множиною індексів операндів для нечітких чисел. Показано, що результатом цієї операції є нечітка множина типу-2, яка може бути розкладеною за вторинними ступенями належності на набір відповідних нечітких чисел. Такий розклад дає змогу представити результівну нечітку множину типу-2 у зручному для розуміння і застосування вигляді. Наведено ілюстративний приклад.

Ключові слова: нечітке число, нечітка множина, нечітка множина типу-2.

ВСТУП

У 1978 році у роботі [1] визначено нечітке число (НЧ) як нормальну і опуклу нечітку множину числової осі. У більш загальному випадку функція належності (ФН) НЧ може бути напівнеперервною зверху і квазіугнутою [2]. Оскільки НЧ адекватніше зображують фізичний світ, ніж звичайні числа, вони широко використовуються в комп'ютерних науках [3, 4]. Однією з найважливіших проблем теорії НЧ є їхнє упорядкування за допомогою операцій мінімум (min) і максимум (max). Ця проблема детально вивчалася в літературі, починаючи з піонерської роботи [5], в якій запропоновано концепцію операцій min і max для двох нечітких множин. У праці [6] було розвинено алгебру решіток для НЧ. У [7] вивчено і встановлено основні властивості операцій min і max, а також показано, що триплет $(\mathbb{R}, \min, \max)$ є дистрибутивною решіткою. Застосування операцій min і max розвинено в [8] для опуклих нечітких множин числової прямої з ФН, які необов'язково мають бути неперервними. У роботі [9] запропоновано підхід, який дає змогу полегшити реалізацію операцій min і max для двох НЧ з неперервними ФН. У статті [10] застосовано α-перерізи для побудови min і max для довільного набору НЧ з ФН загального вигляду. У роботі [11] запропоновано алгоритм обчислення min і max для будь-яких двох НЧ «трикутного» типу і візуалізації результівних ФН.

У цій роботі для НЧ досліджується операція min з нечіткою множиною операндів. Концепція математичних операцій з нечіткою множиною операндів вперше запропонована в [12] для перетину і об'єднання нечітких множин. Було показано, що результатом такої операції є нечітка множина типу-2. У роботі [13] запропоновано декомпозиційний підхід для реалізації перетину. Узагальнення операції підсумування «неперервних» і дискретних НЧ для нечітких множин операндів розглянуто у [14] і [15] відповідно. Ця стаття продовжує дослідження для операції min. Це актуально у разі, коли потрібно визначити мінімум не тільки на заданій множині НЧ, а й на деяких її підмножинах, зокрема визначених нечітко. Наприклад, припустимо, що $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ є сукупністю експертів, які оцінюють корисність деякої альтернативи a у вигляді

НЧ F_j, $j \in N$. Тоді гарантованою оцінкою a буде НЧ $F = \min_{j \in N} F_j$. Практичний інтерес становлять гарантовані оцінки, які відповідають нечітким множинам експертів, наприклад «Досвідчені експерти», «Незалежні експерти» тощо.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ ТА КОНЦЕПЦІЯ ДОСЛІДЖЕННЯ

Нехай на числовій прямій $\mathbb{R}$ задано n НЧ F_j, $j \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$, з відповідними носіями $X_j = \mathrm{supp}\,(F_j)$ та ФН $\mu_{F_j}(x_j)$, $x_j \in X_j$, $j \in N$.

Зауваження 1. Вважатимемо, що множини $X_j = [a_j, b_j]$, $j \in N$, є замкненими інтервалами на $\mathbb{R}$, а функції $\mu_{F_j}(x_j)$, $x_j \in X_j$, $j \in N$, є неперервними.

Насамперед розглянемо «звичайну» операцію min з чіткою множиною N індексів операндів для НЧ F_j, $j \in N$. Згідно з [7] мінімум $F = \min_{j \in N} F_j$ визначається як нечітке число $F = \{(z, \mu_F(z)) : z \in \mathbb{R}\}$ з ФН

$$\mu_F(z) = \sup_{x \in X \,:\, z = \min\limits_{j \in N} x_j} \min_{j \in N} \mu_{F_j}(x_j) = \max_{x \in X \,:\, z = \min\limits_{j \in N} x_j} \min_{j \in N} \mu_{F_j}(x_j), \;\; z \in \mathbb{R}$$

(тут max існує унаслідок зауваження 1), де $x = (x_1, \ldots, x_n)$ є вектором операндів та $X = \prod_{j \in N} X_j$ є множиною цих векторів.

Нехай I — деяка нечітка множина на N з ФН $\mu_I(j)$, $j \in N$. Далі називатимемо I нечіткою множиною індексів операндів. Визначимо і дослідимо мінімум НЧ F_j, $j \in N$, у разі, коли вони використовуються в операції мінімізації з відповідними ступенями належності $\mu_I(j)$, $j \in N$. Інакше кажучи, для НЧ F_j, $j \in N$, визначимо результат операції знаходження мінімуму з нечіткою множиною I індексів операндів. Узагальнимо мінімум $F = \min_{j \in N} F_j$ НЧ на випадок нечіткої множини I індексів операндів. Результатом такої операції буде множина $MIN = \min_{(j, \mu_I(j)) \in I} F_j$ з функцією належності

$$M_{MIN}(z) = \max_{x \in X \,:\, z = \min\limits_{(j, \mu_I(j)) \in I} x_j} \; \min_{(j, \mu_I(j)) \in I} \mu_{F_j}(x_j), \;\; z \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

У формулі (1) вирази $\min_{(j, \mu_I(j)) \in I} x_j$ і $\min_{(j, \mu_I(j)) \in I} \mu_{F_j}(x_j)$ вказують на те, що значення відповідно x_j і $\mu_{F_j}(x_j)$, $j \in N$, застосовують в операції min з відповідними ступенями належності $\mu_I(j)$, $j \in N$, (тобто індекси $j \in N$ операндів операції min утворюють нечітку множину $I = \{(j, \mu_I(j)) : j \in N\}$). Для з'ясування сенсу (1) використаємо відомий підхід представлення нечіткої множини її α-перерізами з [16]. Позначимо

$$I_\alpha = \{j \in N : \mu_I(j) \ge \alpha\} \tag{2}$$

α-переріз, $\alpha \in (0, 1]$, нечіткої множини $I = \{(j, \mu_I(j)) : j \in N\}$ індексів операндів. Для фіксованого $z^* \in \mathbb{R}$ і заданого $\alpha \in (0, 1]$ також позначимо

$$G_\alpha(z^*) = \left\{ x \in X : \min_{j \in I_\alpha} x_j = z^* \right\} \tag{3}$$

множину векторів $x = (x_1, \ldots, x_n)$, у яких мінімальна компонента з індексом, що належить множині I_α, дорівнює z^*. Далі позначимо $G(z^*) = \{(G_\alpha(z^*), \alpha): \ \alpha \in (0,1]\}$ відповідну нечітку множину з ФН $\mu_{G(z^*)}(x) = \max\ \{\alpha \in (0,1]: x \in G_\alpha(z^*)\}$, $x \in X$. Оскільки $G_\alpha(z^*)$ є α-перерізом нечіткої множини $G(z^*)$ для кожного $\alpha \in (0,1]$, то відповідно до [16] отримаємо $G(z^*) = \left\{ (x, \mu_{G(z^*)}(x)): \ \min\limits_{(j, \mu_I(j)) \in I} x_j = z^*, x \in X \right\}$.

Зауваження 2. Нехай $A = \{\mu_I(j): j \in N\}$ є множиною значень $\mu_I(j)$, $j \in N$, ступенів належності нечіткої множини $I = \{(j, \mu_I(j)): j \in N\}$ індексів операндів. Оскільки ступені належності різних індексів операндів можуть збігатися, то $|A| \le n$. Зрозуміло, що для отримання різних α-перерізів $I_\alpha = \{j \in N: \mu_I(j) \ge \alpha\} \ne \varnothing$ нечіткої множини I, умову $\alpha \in (0,1]$ потрібно замінити на $\alpha \in A$. Далі називатимемо I_α множиною індексів операндів рівня α.

Зауваження 3. Зазначимо, що зауваження 1 дає змогу звузити область визначення величини z мінімуму до множини

$$Z = \left\{ z \in \mathbb{R}: z = \min_{j \in I_\alpha} x_j, x_j \in X_j, j \in I_\alpha, \alpha \in A \right\} = \left[\min_{\alpha \in A} \min_{j \in I_\alpha} a_j, \max_{\alpha \in A} \min_{j \in I_\alpha} b_j \right]$$

його можливих значень. Тому надалі вважатимемо, що $z \in Z$.

Для фіксованого значення $z^* \in Z$ і заданого $\alpha \in A$ розглянемо множину

$$D_\alpha(z^*) = \left\{ (x(\alpha), j(\alpha)): \mu_{F_{j(\alpha)}}(x_{j(\alpha)}(\alpha)) = \max_{x \in G_\alpha(z^*)} \min_{j \in I_\alpha} \mu_{F_j}(x_j) \right\} \tag{4}$$

оптимальних розв'язків максмінної задачі $\max\limits_{x \in G_\alpha(z^*)} \min\limits_{j \in I_\alpha} \mu_{F_j}(x_j)$. Вона складається з пар $(x(\alpha), j(\alpha))$, в яких вектор $x(\alpha) = (x_1(\alpha), \ldots, x_n(\alpha)) \in G_\alpha(z^*)$ максимізує функцію $\mu_{F_{j(\alpha)}}(x_{j(\alpha)})$ за $x = (x_1, \ldots, x_n) \in G_\alpha(z^*)$ та індекс $j(\alpha)$ мінімізує $\mu_{F_j}(x_j(\alpha))$ за $j \in I_\alpha$. Водночас оптимальне значення (максмін) дорівнює $\mu_{F_{j(\alpha)}}(x_{j(\alpha)}(\alpha))$.

Зауваження 4. Відповідно до зауваження 2 маємо $I_\alpha \ne \varnothing$. Із зауваження 1 випливає, що НЧ F_j, $j \in N$, мають компактні носії X_j, $j \in N$, і неперервні ФН $\mu_{F_j}(x_j)$, $x_j \in X_j$, $j \in N$. Звідси можна зробити висновок, що множина $X = \prod\limits_{j \in N} X_j$ векторів операндів і, отже, множина $G_\alpha(z^*) = \left\{ x \in X: \min\limits_{j \in I_\alpha} x_j = z^* \right\}$ є компактами. Тому якщо $G_\alpha(z^*) \ne \varnothing$, то множина $D_\alpha(z^*)$ оптимальних розв'язків максмінної задачі (1) не є порожньою, тобто $D_\alpha(z^*) \ne \varnothing$.

Для фіксованого $z^* \in Z$ вираз (1) можна класифікувати як максмінну задачу оптимізації (у певному сенсі) функції $\mu_{F_j}(x_j)$ на нечітких множинах $G(z^*)$ на X і I на N. Тому для побудови ФН нечіткої множини розв'язків цієї задачі потрібно кожній парі $(x, j) \in X \times N$ задати ступінь належності. Таким чином, розв'язком задачі (1) називатимемо нечітку множину $D(z^*)$ на $X \times N$ з ФН

$$\mu_{D(z^*)}(x, j) = \begin{cases} \max \{\alpha \in A : (x, j) \in D_\alpha(z^*)\}, & (x, j) \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} D_\alpha(z^*), \\ 0, & (x, j) \notin \bigcup\limits_{\alpha \in A} D_\alpha(z^*). \end{cases} \tag{5}$$

Нечіткому розв'язку $D(z^*)$ відповідає нечітка множина значень

$$M_{MIN}(z^*) = \max_{x \in X \,:\, z^* = \min\limits_{(j,\, \mu_I(j)) \in I} x_j} \; \min_{(j,\, \mu_I(j)) \in I} \mu_{F_j}(x_j) \tag{6}$$

з ФН $\mu_{M_{MIN}(z^*)}(u)$, $u \in [0, 1]$, де замкнений інтервал $[0, 1]$ є універсальною множиною нечіткої множини $M_{MIN}(z^*)$ значень максміна (1). Нечітка множина $M_{MIN}(z^*)$ є образом нечіткої множини $D(z^*)$ для відображення $(x, j) \to \mu_{F_j}(x_j)$ з $X \times N$ в $[0, 1]$. Згідно з принципом узагальнення Заде [16] отримаємо

$$\mu_{M_{MIN}(z^*)}(u) = \max_{(x, j) \in [\mu_{F_j}(x_j)]^{-1}(u)} \mu_{D(z^*)}(x, j),$$

де $[\mu_{F_j}(x_j)]^{-1}(u) = \{(x, j) \in X \times N : \mu_{F_j}(x_j) = u\}$, або в іншому вигляді

$$\mu_{M_{MIN}(z^*)}(u) =$$

$$= \begin{cases} \max\limits_{x \in X,\, j \in N} \{\mu_{D(z^*)}(x, j) : \mu_{F_j}(x_j) = u\}, & \exists (x, j) \in X \times N : \mu_{F_j}(x_j) = u, \\ 0 & \text{інакше}. \end{cases} \tag{7}$$

Підсумуємо сказане. З одного боку, відповідно до (1) $M_{MIN}(z)$ є ФН мінімуму $MIN = \min\limits_{(j,\, \mu_I(j)) \in I} F_j$ з нечіткою множиною $I = \{(j, \mu_I(j)) : j \in N\}$ індексів операндів для НЧ F_j, $j \in N$. З іншого боку, із формул (6) і (7) випливає, що для фіксованих $z^* \in Z$ значення $M_{MIN}(z^*)$ утворюють нечіткі множини на $[0, 1]$ з ФН $\mu_{M_{MIN}(z^*)}(u)$. Отже, маємо, що MIN є нечіткою множиною на $Z \subset \mathbb{R}$ з ФН, значення якої також утворюють нечіткі множини на $[0, 1]$. Тому згідно з [17] MIN є нечіткою множиною типу-2 (НМТ-2). З використанням формалізму вертикальних зрізів [18] НМТ-2 MIN на $Z \subset \mathbb{R}$ матимеме вигляд

$$MIN = \{(z, M_{MIN}(z)) : z \in Z\} = \{(z, \{(u, \mu_{M_{MIN}(z)}(u)) : u \in J_z\}) : z \in Z\},$$

де $\mu_{M_{MIN}(z)}(u)$, $u \in [0, 1]$, є ФН нечіткої множини $M_{MIN}(z) = \{(u, \mu_{M_{MIN}(z)}(u)) : u \in [0, 1]\}$ значень нечіткого ступеня належності елемента $z \in Z$ НМТ-2 MIN, а $J_z = \operatorname{supp}(M_{MIN}(z))$ є множиною первинних ступенів належності, де $\operatorname{supp}(M_{MIN}(z))$ є носієм нечіткої множини $M_{MIN}(z)$ для $z \in Z$. Згідно з [18] і [19] НМТ-2 MIN на $Z \subset \mathbb{R}$ можна також характеризувати ФН типу-2 (ФНТ-2)

$$\mu_{MIN}(z,u) = \begin{cases} \mu_{M_{MIN}(z)}(u), & u \in J_z, \\ 0, & u \notin J_z. \end{cases}$$

Тоді $MIN = \{((z,u), \mu_{MIN}(z,u)) : u \in [0,1], z \in Z\}$ і такий вигляд будемо використовувати далі.

МІНІМУМ З НЕЧІТКОЮ МНОЖИНОЮ ОПЕРАНДІВ

Висновок наприкінці попереднього розділу дає змогу ввести таке поняття.

Означення 1. Нехай на числовій прямій $\mathbb{R}$ задано НЧ F_j, $j \in N$, з відповідними носіями $X_j = \operatorname{supp}(F_j)$ та ФН $\mu_{F_j}(x_j)$, $x_j \in X_j$, $j \in N$. Також на множині N задано нечітку множину $I = \{(j, \mu_I(j)) : j \in N\}$ індексів операндів з ФН $\mu_I(j)$, $j \in N$. Мінімумом $\min\limits_{(j,\mu_I(j)) \in I} F_j$ з нечіткою множиною I індексів операндів для НЧ F_j, $j \in N$, називатимемо НМТ-2

$$MIN = \{((z,u), \mu_{MIN}(z,u)) : u \in [0,1], z \in Z\} \tag{8}$$

на $Z = \left[\min\limits_{\alpha \in A} \min\limits_{j \in I_\alpha} a_j, \max\limits_{\alpha \in A} \min\limits_{j \in I_\alpha} b_j \right]$ (див. зауваження 3) з ФНТ-2

$$\mu_{MIN}(z,u) = \begin{cases} \mu_{M_{MIN}(z)}(u), & u \in J_z, \\ 0, & u \notin J_z. \end{cases} \tag{9}$$

Тут для $z \in Z$ функція $\mu_{M_{MIN}(z)}(u)$ має вигляд (7), $I(\alpha) = \{j \in N : \mu_I(j) \ge \alpha\}$ є множиною індексів операндів рівня α, $\alpha \in A$, (див. (2) і зауваження 2) та

$$J_z = \operatorname{supp}(M_{MIN}(z)) \subseteq [0,1] \tag{10}$$

є множиною первинних ступенів належності $u \in [0,1]$ з додатними вторинними оцінками $\mu_{MIN}(z,u)$, де $\operatorname{supp}(M_{MIN}(z))$ є носієм нечіткої множини $M_{MIN}(z)$ значень максміна (1), $z \in Z$.

Зазначимо, що використовувати означення 1 для обчислень досить незручно, тому наведемо його в іншому вигляді. Позначимо

$$MIN(\alpha) = \{(z, \mu_{MIN(\alpha)}(z)) : z \in Z\} \tag{11}$$

нечітку множину з ФН

$$\mu_{MIN(\alpha)}(z) = \begin{cases} \max\limits_{x \in G_\alpha(z)} \min\limits_{j \in I_\alpha} \mu_{F_j}(x_j), & G_\alpha(z) \ne \varnothing, \\ 0, & G_\alpha(z) = \varnothing, \end{cases} \tag{12}$$

де згідно з (3) $G_\alpha(z) = \left\{ x \in X : \min\limits_{j \in I_\alpha} x_j = z \right\}$ є множиною векторів, у яких мінімальна компонента з індексом, що належить множині I_α, дорівнює $z \in Z$. З формул (2) і (3) випливає, що

$$MIN(\alpha) = \min_{j \in I_\alpha} F_j \tag{13}$$

є мінімумом НЧ F_j з індексами j з множини операндів I_α рівня $\alpha \in A$. Тому $MIN(\alpha)$ — нечітке число. Далі називатимемо його мінімумом рівня α. Доведемо таку теорему.

Теорема 1. НМТ-2 $MIN = \{((z,u), \mu_{MIN}(z,u)) : u \in [0,1],\ z \in Z\}$ має ФНТ-2

$$\mu_{MIN}(z,u) = \begin{cases} \max\limits_{\alpha \in A} \{\alpha : u = \mu_{MIN(\alpha)}(z)\}, & u \in J_z, \\ 0, & u \notin J_z, \end{cases} \tag{14}$$

де

$$J_z = \{u \in [0,1] \colon u = \mu_{MIN(\alpha)}(z), \alpha \in A\}. \tag{15}$$

Доведення. Спочатку перевіримо рівність (15). Для цього з урахуванням (10) достатньо показати, що для довільного $z \in Z$ нерівність $\mu_{M_{MIN}(z)}(u) > 0$ (див. (7)) виконується тоді й лише тоді, коли $\exists \alpha \in A$, для якого $u = \mu_{MIN(\alpha)}(z)$. Припустимо, що $\mu_{M_{MIN}(z)}(u) > 0$. Тоді з (7) випливає, що $\exists x \in X, \exists j \in N$, для яких

$$\mu_{F_j}(x_j) = u \tag{16}$$

і $\mu_{D(z)}(x,j) > 0$. Звідси з урахуванням (5) $\exists \alpha \in A$, для якого $(x,j) \in D_\alpha(z)$. Тоді згідно з (4) і (12) маємо $\mu_{F_j}(x_j) = \mu_{MIN(\alpha)}(z)$ і тому унаслідок (16) отримаємо $u = \mu_{MIN(\alpha)}(z)$. Далі нехай

$$\mu_{M_{MIN}(z)}(u) = 0. \tag{17}$$

Допустимо протилежне, що $\exists \alpha^* \in A$, для якого

$$u = \mu_{MIN(\alpha^*)}(z). \tag{18}$$

Із зауваження 2 випливає, що множина $I_{\alpha^*} \neq \varnothing$. Також з урахуванням зауваження 4 $D_{\alpha^*}(z) \neq \varnothing$. Тому з (12) випливає, що $\exists x \in X$ і $\exists j \in I_{\alpha^*}$, для яких $\mu_{F_j}(x_j) = \mu_{MIN(\alpha^*)}(z)$. Звідси, враховуючи (18), отримаємо рівність (16). Згідно з (7), (16) і (17) маємо $\mu_{D(z)}(x,j) = 0$. Тоді з (5) випливає $(x,j) \notin \bigcup\limits_{\alpha \in A} D_\alpha(z)$. Тому $\forall \alpha \in A$ виконується $\mu_{F_j}(x_j) \neq \mu_{MIN(\alpha)}(z)$ згідно з (4) і (12). Отже, унаслідок (16) маємо $\forall \alpha \in A$ $u \neq \mu_{MIN(\alpha)}(z)$. Отримали суперечність з (18). Формулу (15) доведено.

Далі перевіримо рівність (14). Нехай $z \in Z$. Припустимо, що $u^* \in J_z \neq \varnothing$. Нехай $\alpha^* = \max\limits_{\alpha \in A} \{\alpha : u^* = \mu_{MIN(\alpha)}(z)\}$. Значення α^* існує згідно із зауваженням 2 і рівністю (15). Покажемо, що з (7) випливає $\mu_{M_{MIN}(z)}(u) = \alpha^*$. Порівнюючи формулу (15) з (5) і (7), доведемо збіг множин $S_1 = \{\alpha \in [0,1] \colon u^* = \mu_{MIN(\alpha)}(z)\}$ та $S_2 = \{\alpha \in [0,1] \colon \mu_{F_j}(x_j) = u^*, (x,j) \in D_\alpha(z), x \in X, j \in N\}$. Спочатку перевіримо включення $S_1 \subseteq S_2$. Припустимо, що $a^* \in S_1$. Тоді $u^* = \mu_{MIN(\alpha^*)}(z)$. Звідси $\exists x(\alpha^*) \in X$ і $\exists j(\alpha^*) \in I_{\alpha^*}$, для яких $\mu_{F_j}(x_j) = \mu_{MIN(\alpha^*)}(z) = u^*$ згідно з (12) і $(x(\alpha^*), j(\alpha^*)) \in D_{\alpha^*}(z)$ відповідно до (4). Отже, $a^* \in S_2$. Тепер покажемо включення $S_2 \subseteq S_1$. Припустимо, що $a^* \in S_2$. Тоді $\exists x^* \in X$ і $\exists j^* \in I_{\alpha^*}$, для яких $\mu_{F_{j^*}}(x^*_{j^*}) = u^*$ і $(x^*, j^*) \in D_{\alpha^*}(z)$. Звідси $\mu_{MIN(\alpha^*)}(z) = u^*$ відповідно до (12) і тому $a^* \in S_1$. Отже, $S_1 = S_2$. Тоді з (14) випливає $\mu_{MIN}(z,u) = \alpha^*$.

Теорему 1 доведено.

Для зображення НМТ-2 MIN у більш зручному вигляді застосуємо декомпозиційний підхід. Використаємо відомі поняття вкладених нечітких множин типу 1 та типу 2 з [18] і формалізуємо їх для НМТ-2 $MIN = \{((z, u), \mu_{MIN}(z, u))$: $u \in [0, 1],\ z \in Z\}$.

Нехай для $\forall z \in Z$ задана єдина первинна ступінь належності $u_z \in [0, 1]$ НМТ-2 MIN, $MIN_2^e = \{((z, u_z), \mu_{MIN}(z, u_z)): z \in Z\}$, яку називатимемо вкладеною НМТ-2 в MIN.

Зауваження 5. Згідно з [18] кожен елемент (z, u) нечіткого набору типу-2 $MIN = \{((z, u), \mu_{MIN}(z, u)): u \in [0, 1],\ z \in Z\}$ розглядатимемо як підмножину, тому ця сукупність позначається як класичне об'єднання її елементів у сенсі «звичайних» нечітких множин типу-1. Повторювані елементи враховуються тільки один раз, як у будь-якому об'єднанні. Для елементів (z, u) з різними вторинними оцінками α' і α'' (див. (14)) у сукупності активується лише один член з максимальною вторинною оцінкою $\max\{\alpha', \alpha''\}$. Разом з тим елементи з нульовими вторинними оцінками вилучаються.

Вкладеною нечіткою множиною типу-1 в НМТ-2 MIN назвемо $MIN_1^e = \{(z, u_z): z \in Z\}$. Її ФН має вигляд $\mu_{MIN_1^e}(z) = u_z$, $z \in Z$.

Використаємо уведені вище поняття для окремого випадку НМТ-2, яку визначимо далі. Нехай A — скінченна множина додатних значень $\mu_I(j)$, $j \in N$, ступенів належності нечіткої множини $I = \{(j, \mu_I(j)): j \in N\}$ індексів операндів (див. зауваження 2). Згідно з (14) множина A містить в собі множину всіх можливих додатних значень вторинних оцінок для НМТ-2 MIN. Нехай також для $\forall z \in Z$ існує єдина первинна ступінь належності $u_z \in [0, 1]$ НМТ-2 MIN.

Означення 2. Будемо казати, що вкладена НМТ-2 $MIN_2^e = \{((z, u_z), \mu_{MIN}(z, u_z)): z \in Z\}$ в MIN має сталу вторинну оцінку $\alpha \in A$, якщо для $\forall z \in Z$ існує єдина первинна ступінь належності $u_z \in [0, 1]$, для якої $\mu_{MIN}(z, u_z) \equiv \alpha$.

Позначимо $MIN_2^e(\alpha) = \{((z, u_z), \alpha): z \in Z\}$ вкладену НМТ-2 зі сталою вторинною оцінкою $\alpha \in A$. Вочевидь, що для НМТ-2 $MIN_2^e(\alpha)$ існує єдина вкладена в неї нечітка множина типу-1 $MIN_1^e(\alpha) = \{(z, u_z): z \in Z\}$. Тому вкладену НМТ-2 $MIN_2^e(\alpha)$ зі сталою вторинною оцінкою $\alpha \in A$ можна завжди записувати у вигляді $MIN_2^e(\alpha) = \{(MIN_1^e(\alpha), \alpha)\}$. Подання MIN у вигляді сукупності вкладених НМТ-2 зі сталими вторинними оцінками обґрунтовує таке твердження.

Теорема 2. НМТ-2 MIN може бути представленою у вигляді сукупності $MIN = \{MIN_2^e(\alpha): \alpha \in A\}$ вкладених НМТ-2 $MIN_2^e(\alpha) = \{(MIN_1^e(\alpha), \alpha)\}$ зі сталими вторинними оцінками $\alpha \in A$, де вкладена нечітка множина типу-1 $MIN_1^e(\alpha) \equiv MIN(\alpha) = \min_{j \in I_\alpha} F_j$ є мінімумом рівня $\alpha \in A$. Інакше кажучи,

$$MIN = \{(MIN(\alpha), \alpha): \alpha \in A\}. \tag{19}$$

Доведення. Згідно з рівністю (8) НМТ-2 MIN має вигляд $MIN = \{((z, u), \mu_{MIN}(z, u)): u \in [0, 1],\ z \in Z\}$. Звідси, використовуючи (9), отримаємо

$$MIN = \left\{ \left\{ \left((z, u), \max_{\alpha \in A} \{\alpha : u = \mu_{MIN(\alpha)}(x)\} \right) : u \in J_z \right\} \cup \{((z, u), 0): u \notin J_z\} : z \in Z \right\}.$$

Оскільки зауваження 5 дає змогу не враховувати пар (x, u), які мають вторинну оцінку, що дорівнює нулю, то $MIN = \left\{ \left((z, u), \max_{\alpha \in A} \{\alpha : u = \mu_{MIN(\alpha)}(x)\} \right) : u \in J_z, z \in Z \right\}$. На підставі (15) цей вираз є еквівалентним $MIN = \{(z, \{(\mu_{MIN(\alpha)}(z), \alpha) : \alpha \in A\}) : z \in Z\}$. Зазначимо, що набір $\{(\mu_{MIN(\alpha)}(z), \alpha) : \alpha \in A\}$ є нечіткою множиною типу-1, яку утворено єдиним значенням $u = \mu_{MIN(\alpha)}(z)$ нечіткого ступеня належності значення $z \in Z$, якому можуть відповідати різні $\alpha \in A$. Тому

$$\{(\mu_{MIN(\alpha)}(z), \alpha) : \alpha \in A\} = \left\{ \left(u, \max_{\alpha \in A} \{\alpha : u = \mu_{MIN(\alpha)}(x)\} \right) \right\}.$$

Після перегрупування елементів $MIN = \{(z, \{(\mu_{MIN(\alpha)}(z), \alpha) : \alpha \in A\}) : z \in Z\}$ отримаємо

$MIN = \{(z, (\mu_{MIN(\alpha)}(z), \alpha)) : \alpha \in A, z \in Z\} = \{\{((z, \mu_{MIN(\alpha)}(z)), \alpha) : z \in Z\} : \alpha \in A\}$. Нарешті, використовуючи (11), отримаємо (19).

Теорему 2 доведено.

Таким чином, результівну НМТ-2 MIN можна розкласти за вторинними оцінками на набір відповідних їм НЧ, що спрощує побудову та інтерпретацію MIN.

ПРИКЛАД ПОБУДОВИ НМТ-2 *MIN*

Знайдемо НМТ-2 MIN для НЧ $F_1 = \tilde{8}$ (приблизно 8), $F_2 = \tilde{6}$ (приблизно 6) і $F_3 = \widetilde{10}$ (приблизно 10) «трикутного» типу відповідно з носіями $X_1 = [0, 16]$, $X_2 = [2, 10]$ і $X_3 = [4, 16]$ (згідно із зауваженням 1 тут $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $b_1 = b_3 = 16$, $b_2 = 10$) та функціями належності:

$$\mu_{F_1}(x) = \begin{cases} x / 8, & x \in [0, 8], \\ 2 - x / 8, & x \in [8, 16]; \end{cases} \quad \mu_{F_2}(x) = \begin{cases} (x-2) / 4, & x \in [2, 6], \\ (10 - x) / 4, & x \in [6, 10]; \end{cases}$$

$$\mu_{F_3}(x) = \begin{cases} (x-4) / 6, & x \in [4, 10], \\ (16 - x) / 6, & x \in [10, 16]. \end{cases}$$

На рис. 1 зображено графіки функцій $u = \mu_{F_1}(x)$, $u = \mu_{F_2}(x)$ і $u = \mu_{F_3}(x)$. Нехай $I = \{(1; 0.5), (2; 0.8), (3; 1.0)\}$ — задана нечітка множина на множині

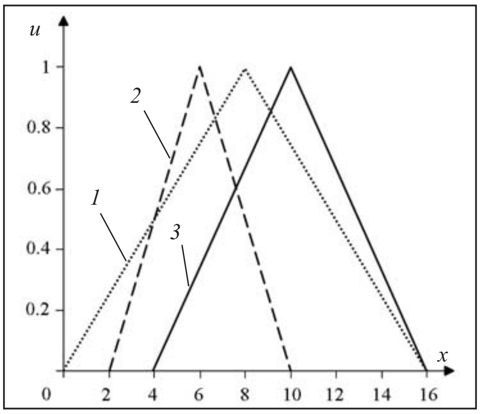

Рис. 1. Графіки ФН $u = \mu_{F_1}(x)$ (*1*), $u = \mu_{F_2}(x)$ (*2*), $u = \mu_{F_3}(x)$ (*3*)

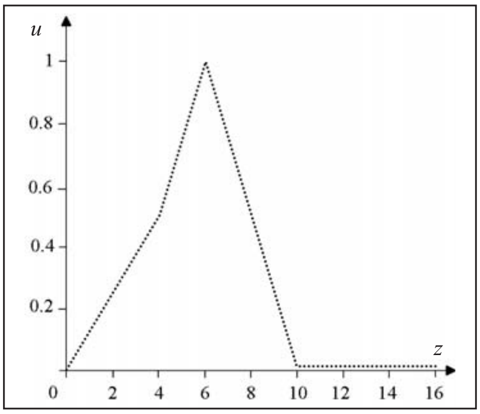

Рис. 2. Графік ФН $u = \mu_{MIN(0.5)}(z)$

$N = \{1, 2, 3\}$ індексів операндів з ФН $\mu_I(1) = 0.5$; $\mu_I(2) = 0.8$ і $\mu_I(3) = 1.0$. Множина значень ступенів належності нечіткої множини I індексів операндів згідно із зауваженням 2 має вигляд $A = \{0.5;\ 0.8;\ 1.0\}$. Сформуємо множину $Z = \left[\min\limits_{\alpha \in A} \min\limits_{j \in I_\alpha} a_j, \max\limits_{\alpha \in A} \min\limits_{j \in I_\alpha} b_j\right] = [0, 16]$ можливих значень мінімуму відповідно до зауваження 3.

Побудуємо множину $I_{0.5} = \{1, 2, 3\}$ рівня $\alpha = 0.5$ нечіткої множини I індексів операндів, використовуючи (2). За допомогою (13) знайдемо НЧ $MIN(0.5) = \min\limits_{j \in I_{0.5}} F_j = \min\{F_1, F_2, F_3\}$ — мінімум рівня $\alpha = 0.5$ у такий спосіб. Згідно з (3) множина векторів $x = (x_1, x_2, x_3)$, для яких мінімальна компонента з індексом з множини $I_{0.5} = \{1, 2, 3\}$ індексів операндів дорівнює $z \in Z$, має вигляд $G_{0.5}(z) = \varnothing$ для $z \in (10, 16]$ і вигляд

$$G_{0.5}(z) = \{x = (x_1, x_2, x_3) : \min\{x_1, x_2, x_3\} = z,\ x_1 \in [0, 16],\ x_2 \in [2, 10],\ x_3 \in [4, 16]\}$$

для $z \in [0, 10]$. Далі, використовуючи (12), сформуємо ФН $\mu_{MIN(0.5)}(z) = 0$, $z \in (10, 16]$, і

$$\mu_{MIN(0.5)}(z) = \max_{x \in G_{0.5}(z)} \min_{j \in I_{0.5}} \mu_{F_j}(x_j) = \max_{x \in G_{0.5}(z)} \min\{\mu_{F_1}(x_1), \mu_{F_2}(x_2), \mu_{F_3}(x_3)\},$$

$z \in [0, 10]$, для НЧ $MIN(0.5) = \{(z, \mu_{MIN(0.5)}(z)) : z \in [0, 16]\}$. Звідси остаточно отримаємо

$$\mu_{MIN(0.5)}(z) = \begin{cases} z / 8, & z \in [0, 4], \\ (z - 2) / 4, & z \in [4, 6], \\ (10 - z) / 4, & z \in [6, 10], \\ 0, & z \in (10, 16]. \end{cases}$$

Легко перевірити, що $MIN(0.5) = \min\{F_1, F_2, F_3\} = \min\{\tilde{8}, \tilde{6}\}$. Тому $MIN(0.5)$ назвемо мінімумом $\tilde{8}$ і $\tilde{6}$. На рис. 2 зображено графік функції $u = \mu_{MIN(0.5)}(z)$, $z \in [0, 16]$. Зазначимо, що можна використовувати й інші методи побудови ФН нечіткого числа $MIN(0.5) = \min\{F_1, F_2, F_3\}$, наприклад алгоритм, що був запропонований в роботі [10]. Аналогічно побудуємо $MIN(0.8) = \min\limits_{j \in I_{0.8}} F_j = \min\{F_2, F_3\}$ і $MIN(1.0) = \min\limits_{j \in I_{1.0}} F_j = F_3$ — мінімуми відповідно рівнів $\alpha = 0.8$ і $\alpha = 1.0$. Їхні ФН мають вигляд

$$\mu_{MIN(0.8)}(z) = \begin{cases} (z - 2) / 4, & z \in [2, 6], \\ (10 - z) / 4, & z \in [6, 10], \\ 0, & z \in [0, 2) \cup (10, 16]; \end{cases}$$

$$\mu_{MIN(1.0)}(z) = \begin{cases} (z - 4) / 6, & z \in [4, 10], \\ (16 - z) / 6, & z \in [10, 16], \\ 0, & z \in [0, 4). \end{cases}$$

На рис. 3 зображено графіки функцій $u = \mu_{MIN(0.8)}(z)$ і $u = \mu_{MIN(1.0)}(z)$. Неважко перевірити, що $MIN(0.8) = F_2 = \tilde{6}$ і $MIN(1.0) = F_3 = \widetilde{10}$.

Далі за формулою (14) обчислимо значення ФНТ-2 $\mu_{MIN}(z, u)$, $z \in Z$, $u \in J_z$. Для цього з урахуванням (15) побудуємо множину $J_z = \{u \in [0, 1]:$

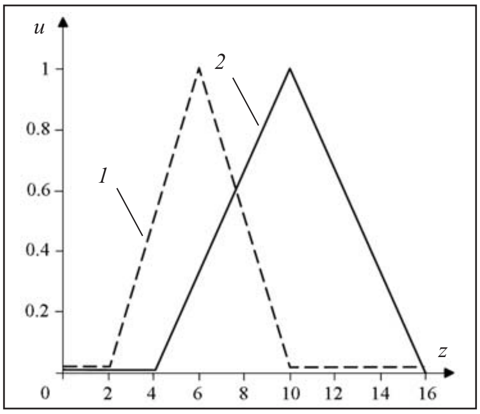

Рис. 3. Графіки ФН $u = \mu_{MIN\,(0.8)}(z)$ (*1*), $u = \mu_{MIN\,(1.0)}(z)$ (*2*)

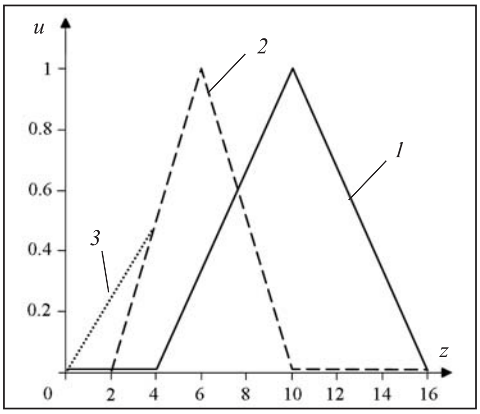

Рис. 4. Лінії рівня ФНТ-2 $\mu_{MIN}(z,u) = 1.0$ (*1*), $\mu_{MIN}(z,u) = 0.8$ (*2*), $\mu_{MIN}(z,u) = 0.5$ (*3*)

$u = \mu_{MIN(\alpha)}(z), \alpha \in A\}$, $z \in Z = [0, 16]$, первинних ступенів $u \in [0,1]$ зі строго додатними значеннями $\mu_{MIN}(z,u)$. Отримаємо $J_z = \{0, z/8\}$ для $z \in [0,2)$; $J_z = \{0, z/8, (z-2)/4\}$ для $z \in [2,4)$; $J_z = \{(z-2)/4, (z-4)/6\}$ для $z \in [4,6]$; $J_z = \{(10-z)/4, (z-4)/6\}$ для $z \in [6,10]$ і $J_z = \{0, (16-z)/6\}$ для $z \in (10,16]$. Отже, відповідно до (14) маємо

$$MIN = \{((z,u), \mu_{MIN}(z,u)) : u \in [0,1], z \in Z\} = \{((z, z/8); 0.5), ((z,0); 1.0) : z \in [0,2)\} \cup$$
$$\cup \{((z, z/8); 0.5), ((z, (z-2)/4); 0.8), ((z,0); 1.0) : z \in [2;4)\} \cup$$
$$\cup \{((z, (z-2)/4); 0.8), ((z, (z-4)/6); 1.0) : z \in [4;6]\} \cup$$
$$\cup \{((z, (10-z)/4); 0.8), ((z, (z-4)/6); 1.0) : z \in [6;10]\} \cup$$
$$\cup \{((z,0); 0.8), ((z, (16-z)/6); 1.0) : z \in (10;16]\}. \qquad (20)$$

Зазначимо, що згідно із зауваженням 5 в нечіткому наборі MIN типу-2 повторювані елементи враховуються лише один раз, як і в об'єднанні множин. Для елементів (z,u) з різними вторинними оцінками α' і α'' в сукупності активується тільки один член з максимальною вторинною оцінкою $\max\{\alpha', \alpha''\}$. Елементи з нульовими вторинними оцінками вилучаються. Тому в (20) вторинні ступені належності $\mu_{MIN}(z,u)$ визначаються за формулою (14) у такий спосіб:

$$\mu_{MIN}(z,0) = \max\{0.8;\ 1.0\} = 1.0 \text{ для } z \in [0;2);$$

$$\mu_{MIN}(z, (z-2)/4) = \max\{0.5;\ 0.8\} = 0.8 \text{ для } z \in [2;4);$$

$$\mu_{MIN}(z, (10-z)/4) = \max\{0.5;\ 0.8\} = 0.8 \text{ для } z \in [6;10);$$

$$\mu_{MIN}(38/5, 3/5) = \max\{0.8;\ 1.0\} = 1.0.$$

На рис. 4 рівні ФНТ-2 $\mu_{MIN}(z,u)$ НМТ-2 MIN представлено трьома лініями ($\mu_{MIN}(z,u) = 1.0$, $\mu_{MIN}(z,u) = 0.8$, $\mu_{MIN}(z,u) = 0.5$). Отриману НМТ-2 $MIN = \{((z,u), \mu_{MIN}(z,u)) : u \in [0,1], z \in Z\}$ можна інтерпретувати в такий спосіб.

Мінімум НЧ F_1, F_2 і F_3 з нечіткою множиною I операндів дорівнює z зі ступенем належності (первинним) u із вторинною оцінкою (ступенем істинності) $\mu_{MIN}(z,u)$. Наприклад, для $z \in [2;4)$ мінімум F_1, F_2 і F_3 з нечіткою множиною $I = \{(1;\ 0.5), (2;\ 0.8), (3;\ 1.0)\}$ операндів дорівнює z зі ступенями належності:

— $u = z / 8$ зі ступенем істинності $\mu_{MIN}(z, z / 8) = 0.5$;

— $u = (z - 4) / 6$ зі ступенем істинності $\mu_{MIN}(z, (z - 4) / 6) = 0.8$;

— $u = 0$ зі ступенем істинності $\mu_{MIN}(z, 0) = 1.0$.

Більш наочну інтерпретацію НМТ-2 *MIN* гарантує декомпозиційний підхід. Оскільки згідно із виконаними розрахунками $MIN(1.0) = \widetilde{10}$, $MIN(0.8) = \widetilde{6}$ і $MIN(0.5) = \min\{\widetilde{8}, \widetilde{6}\}$, то з теореми 2 випливає представлення $MIN = \{(MIN(0.5); 0.5), (MIN(0.8); 0.8), (MIN(1.0); 1.0)\}$. Тому отриману НМТ-2 *MIN* можна інтерпретувати в такий спосіб. Мінімум трьох НЧ F_1, F_2 і F_3 з нечіткою множиною I індексів операндів дорівнює $\widetilde{10}$ зі ступенем істинності (цього висловлювання) 1.0; $\widetilde{6}$ зі ступенем істинності 0.8; $\min\{\widetilde{8}, \widetilde{6}\}$ зі ступенем істинності 0.5.

ВИСНОВКИ

Зазначимо, що аналогічні результати можна отримати також стосовно операції max з нечіткою множиною індексів операндів. Результатом такої операції буде НМТ-2 (позначимо її *MAX*). Аналогічно тому, як це було показано для НМТ-2 *MIN*, нечітка множина типу-2 *MAX* може бути також розкладеною за вторинними ступенями належності на сукупність відповідних НЧ. Оскільки операції максимум і мінімум є базовими в нечіткій математиці, то можна сподіватися на їхнє широке застосування як у теорії нечітких множин, так і на практиці.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Dubois D., Prade H. Operations on fuzzy numbers. *International Journal of Systems Science*. 1978. Vol. 9, N 6. P. 613–626. https://doi.org/10.1080/00207727808941724.
2. Heilpern S. Representation and application of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*. 1997. Vol. 9. P. 259–268. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(97)00146-2.
3. Semenova N.V., Kolechkina L.N., Nagirna A.M. Vector optimization problems with linear criteria over a fuzzy combinatorial set of alternatives. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2011. Vol. 47, N 2. P. 250–259. https://doi.org/10.1007/s10559-011-9307-5.
4. Ivohin E.V. Formalization of influence processes of fuzzy time flow on the solution to time resource distribution problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2021. Vol. 57, N 3. P. 363–373. https://doi.org/10.1007/s10559-021-00361-x.
5. Ambrosio R., Martini G.B. Maximum and minimum between fuzzy symbols in noninteractive and weakly non-interactive situations. *Fuzzy Sets and Systems.* 1984. Vol. 12. P. 27–35. https://doi.org/10.1016/0165-0114(84)90048-4.
6. Kun-lun Zhang, Kaoru Hirota. On fuzzy number lattice $(\widetilde{R}, \leq)$. *Fuzzy Sets and Systems*. 1997. Vol. 92. P. 113–122.
7. Klir G.J., Yuan B. Fuzzy sets and fuzzy logic: Theory and applications. New Jersey: Prentice-Hall PTR, 1995. 574 p.
8. Hooman T., A.G.B. Tettamanzi, Degli A.G., Visconti A. On the calculation of extended max and min operations between convex fuzzy sets of the real line. *Fuzzy Sets and Systems*. 2009. Vol. 160. P. 3103–3114. https://doi.org/10.1016/j.fss.2009.06.005.

9. Chiu C.H., Wang W.J. A simple computation of MIN and MAX operations for fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*. 2002. Vol. 126. P. 273–276. https://doi.org/10.1016/S0165-0114 (01)00041-0.

10. Chih-Hui Chiu, Wen-June Wang. A simple computation of Min and Max operations for fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*. 2002. Vol. 126. P. 273–276.

11. Shirin S., Saha G. Graphical representations of membership functions of maximum and minimum of two fuzzy numbers using computer program. *GANIT: Journal of Bangladesh Mathematical Society*. 2012. Vol. 31. P. 105–115. https://doi.org/10.3329/ganit.v31i0.10313.

12. Mashchenko S. Intersections and unions of fuzzy sets of operands. *Fuzzy Sets and Systems*. 2018. Vol. 352. P. 12–25. https://doi.org/10.1016/j.fss.2018.04.006.

13. Mashchenko S.O., Kapustian D.O. Decomposition of intersections with fuzzy sets of operands. In: Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems. Sadovnichiy V.A., Zgurovsky M.Z. (Eds.). Cham: Springer, 2020. P. 417–432. URL: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-50302-4.

14. Mashchenko S.O. Sums of fuzzy set of summands. *Fuzzy Sets and Systems*. 2020. Vol. 417. P. 140–151. https://doi.org/10.1016/j.fss.2020.10.006.

15. Mashchenko S.O. Sum of discrete fuzzy numbers with fuzzy set of summands. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2021. Vol. 57, N 3. P. 374–382. https://doi.org/10.1007/s10559-021-00362-w.

16. Zadeh L. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning — I. *Inform. Sci*. 1975. Vol. 8. P. 199–249. https://doi.org/10.1016/0020-0255(75)90036-5.

17. Zadeh L.A. Quantitative fuzzy semantics. *Inform. Sci*. 1971. Vol. 3. P 159–176. https://doi.org/ 10.1016/S0020-0255(71)80004-X.

18. Mendel J.M., John R.I. Type-2 fuzzy sets made simple. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. 2002. Vol. 10. P. 117–127. https://doi.org/10.1109/91.995115.

19. Harding J., Walker C., Walker E. The variety generated by the truth value algebra of T2FS. *Fuzzy Sets and Systems*. 2010. Vol. 161. P. 735–749. https://doi.org/10.1016/j.fss.2009.07.004.

S.O. Mashchenko

MINIMUM OF FUZZY NUMBERS WITH A FUZZY SET OF OPERANDS

Abstract. The operation of minimization with a fuzzy set of operand indices for fuzzy numbers is investigated. It is shown that the result of this operation is a type-2 fuzzy set, which can be decomposed by secondary degrees of membership into a collection of corresponding fuzzy numbers. This decomposition helps to represent the resulting type-2 fuzzy set in a form that is easy to understand and use. An illustrative example is given.

Keywords: fuzzy number, fuzzy set, type-2 fuzzy set.

Надійшла до редакції 10.09.2021