УДК 517.988

О.Ф. КАШПУР
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *olena.kashpur@gmail.com.*

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ ПОЛІНОМ ЕРМІТА ДЛЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Анотація. Розглянуто інтерполяційну задачу Ерміта в Евклідовому просторі у випадку, коли задано значення функції багатьох змінних та значення її диференціалів Гато першого та другого порядку у вузлах інтерполяції. Показано, що поставлена задача у скінченновимірному Евклідовому просторі має єдиний розв'язок мінімальної норми, породженої скалярним добутком із Гаусовою мірою. Одержано умови інваріантної розв'язуваності та єдиності розв'язку задачі.

Ключові слова: інтерполяційний поліном Ерміта, диференціал Гато, Гільбертів простір, Евклідів простір, мінімальна норма.

ВСТУП

Інтерполяція функцій багатьох змінних є важливою для теоретичних та прикладних задач. На практиці досить часто трапляються випадки, коли бракує інформації про досліджуваний об'єкт (чи процес), тобто задача є недовизначеною. У цій статті розглянуто розв'язання інтерполяційної задачі Ерміта в умовах недовизначеності.

У монографіях [1, 2] побудовано основи теорії інтерполяції операторів (у загальному випадку нелінійних): знайдено необхідні та достатні умови існування інтерполянтів Лагранжа, Ерміта та Ерміта–Біркхофа у Гільбертовому та векторному просторах; побудовано всю множину відповідних інтерполяційних поліномів, знайдено інтерполянт Лагранжа мінімальної норми, породженої скалярним добутком із Гаусовою мірою [3]. У роботі [4] у Гільбертовому просторі доведено теорему про існування інтерполяційного полінома Ерміта мінімальної норми та показано, що він має властивість асимптотичного збереження поліномів відповідного степеня тоді, коли задано значення нелінійного оператора у вузлах та його перших диференціалів Гато в них. Аналогічну задачу у скінченновимірному Евклідовому просторі E_k розглянуто у [5] та показано, що вона має єдиний розв'язок мінімальної норми в умовах недовизначеності. Водночас ця задача є інваріантно розв'язною, тобто має розв'язок для будь-яких значень оператора у вузлах та значень його перших диференціалів Гато. Ця стаття є продовженням роботи [5].

Зауважимо, що для побудови інтерполяційного полінома для функцій багатьох змінних у разі використання класичних інтерполяційних формул [6] можна застосувати такий підхід: спочатку будують інтерполянт степеня n за однією змінною, а решту змінних фіксують, далі у цей спосіб застосовують інтерполяційні формули за кожною змінною. В результаті у просторі E_k одержимо інтерполяційний поліном степеня k^n. Для єдиності розв'язку є необхідним виконання умови $m = \dfrac{(n+k)!}{n!\,k!}$, де m — кількість вузлів інтерполяції. При цьому виникають складнощі під час їхнього вибору. На відміну від класичних інтерполяційних формул [6] інтерполянти, побудовані в [1, 2, 4] мають степінь n. У роботах [1, 2] у Гільбертовому просторі степінь інтерполяційного полінома n та кількість вузлів m не пов'язані між собою, а в [5] зазначено, що у випадку недовизначеності для єдиності розв'язку потрібно виконання нерівності $2m \le \frac{(n+k)!}{n!\,k!}$ у скінченновимірному Евклідовому просторі E_k.

У цій статті в умовах недовизначеності розглянуто інтерполяційну задачу Ерміта, коли задано значення функції багатьох змінних та значення її диференціалів Гато першого та другого порядку. Показано, що поставлена задача у скінченновимірному Евклідовому просторі E_k має єдиний розв'язок мінімальної норми у разі виконання нерівності $3m \le \frac{(n+k)!}{n!\,k!}$. При цьому задача має розв'язок для будь-яких значень оператора у вузлах та значень його перших та других диференціалів Гато, тобто є інваріантно розв'язною. Наведемо допоміжні результати, які будуть використані в цій роботі.

ПОСТАНОВКА ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ЕРМІТА У ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

Нехай X, Y — Гільбертові простори (X — сепарабельний), B — кореляційний оператор міри μ на X, $\operatorname{Ker} B = \varnothing$, міра μ має перший момент, що дорівнює нулю, а другий є обмеженим, $B(u, v)$ — кореляційний оператор цієї міри відповідно, $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток у просторі X. Уведемо множину Π_n неперервних на X операторних поліномів степеня n:

$$\Pi_n(x) = \{P_n(x) = L_0 + L_1 x + L_2 x^2 + \ldots + L_n x^n\},$$

де $L_k(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — неперервний симетричний k-лінійний оператор, $L_k x^k = L_k(\underbrace{x, x, \ldots, x}_{k})$.

Оператор $F : X \to Y$ (у загальному випадку нелінійний) заданий своїми значеннями $F(Bx_j)$, $j = \overline{1, m}$, та значеннями диференціалів Гато

$$F^{(i)}(Bx_j)Bv_{ji}^{(i)} \ldots Bv_{j1}^{(i)},\ i = \overline{0, k_j},\ j = \overline{1, m},$$

$$Bx_j,\ Bv_{ji}^{(i)} \in X,\ i = \overline{0, k_j},\ j = \overline{1, m}.$$

Для оператора $F(x)$ потрібно побудувати такий поліном $P_n(x) \in \Pi_n$, що задовольняє інтерполяційні умови

$$P_n^{(i)}(Bx_j)Bv_{ji}^{(i)} \ldots Bv_{j1}^{(i)} = F^{(i)}(Bx_j)Bv_{ji}^{(i)} \ldots Bv_{j1}^{(i)},\ i = \overline{0, k_j},\ j = \overline{1, m}. \tag{1}$$

Нехай Z — матриця, рядками якої є ортонормовані власні вектори симетричної матриці $H = \| H^{ls} \| = \| h_{ij}^{ls} \|_{i=\overline{0, k_l},\, j=\overline{0, k_s}}$ з нульовим власним числом

$$h_{ij}^{ls} = \frac{\partial^{i+j}}{\partial\alpha_1 \ldots \partial\alpha_i \partial\beta_1 \ldots \partial\beta_j} g^B\left(x_l + \sum_{p=1}^{i} \alpha_p v_{lp}^{(i)}, x_s + \sum_{p=1}^{j} \beta_p v_{sp}^{(j)} \right)\Bigg|_{\alpha_1 = \ldots = \alpha_i = \beta_1 = \ldots = \beta_j = 0},$$

$$g^B = g(Bu, v) = \sum_{p=0}^{n} (Bu, v)^p,\ Bu, v \in X,$$

а H^+ — псевдообернена матриця Мура–Пенроуза до матриці H [7]. Позначимо

$$\vec{F}_H = \{F^{(i)}(Bx_j)Bv_{ji}^{(i)} \ldots Bv_{j2}^{(i)} Bv_{j1}^{(i)},\ i = \overline{0, k_j}\}_{i=1}^{m},$$

$$\vec{Q}_H = \{Q^{(i)}(Bx_j)Bv_{ji}^{(i)} \ldots Bv_{j2}^{(i)}Bv_{j1}^{(i)},\ i = \overline{0, k_j}\}_{i=1}^{m},$$

$$\vec{g}_H = \left\{ \frac{\partial^i}{\partial \alpha_1 \ldots \partial \alpha_i} g\left(Bx_j + \sum_{p=1}^{i} \alpha_p Bv_{jp}^{(i)}, x \right) \Bigg|_{\alpha_1 = \ldots = \alpha_i = 0},\ i = \overline{0, k_j} \right\}_{j=1}^{m},$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i,\ \vec{a} = \{\alpha_i\}_{i=1}^{m},\ \vec{b} = \{\beta_i\}_{i=1}^{m},\ \alpha_i \in Y,\ \beta_i \in X.$$

У роботах [1, 2] доведено таку теорему.

Теорема 1. Для існування розв'язку інтерполяційної задачі Ерміта (1) у Гільбертовому просторі необхідним і достатнім є виконання умови

$$Z\vec{F}_H = \vec{0}. \tag{2}$$

Якщо умова (2) виконується, то формула

$$P_n(x) = Q(x) + \langle \vec{F}_H - \vec{Q}_H, H^+ \vec{g}_H(x) \rangle,\ Q(x) \in \Pi_n, \tag{3}$$

описує всю множину операторних поліномів Ерміта n-го степеня, що відповідають інтерполяційним умовам (1).

В [1] показано, що умова (2) еквівалентна рівності

$$(E - HH^+)\vec{F}_H = \vec{0}, \tag{4}$$

де E — одинична матриця розміру $\left(\sum_{i=1}^{m} k_i + m \right) \times \left(\sum_{i=1}^{m} k_i + m \right)$.

Уведемо на множині Π_n скалярний добуток

$$(P_1, P_2) = \sum_{k=0}^{n} \int_X \ldots \int_X (L_k^{(1)}(v_1, v_2, \ldots, v_k), L_k^{(2)}(v_1, v_2, \ldots, v_k))_Y \mu(dv_k) \cdots \mu(dv_2)\mu(dv_1)$$

та норму

$$\| P \| = \left(\sum_{k=0}^{n} \int_X \ldots \int_X \| L_k(v_1, v_2, \ldots, v_k) \|_Y^2 \mu(dv_k) \cdots \mu(dv_2)\mu(dv_1) \right)^{1/2}.$$

В останніх формулах $P_1, P_2, P \in \Pi_n$, $L_k^{(1)}, L_k^{(2)}, L_k$ — симетричні неперевні k-лінійні операторні форми поліномів P_1, P_2, P відповідно, $(\cdot,\cdot)_Y$ — скалярний добуток в Y. Позначимо Π_n^{IH} множину операторних інтерполяційних поліномів n-го степеня типу Ерміта. У [4] доведено таку теорему.

Теорема 2. Нехай виконується умова (2), $k_i = 1$, $i = \overline{1, m}$. Тоді поліном

$$P_n^*(x) = \langle \vec{F}_H, H^+ \vec{g}_H(x) \rangle \tag{5}$$

є розв'язком екстремальної задачі

$$\| P_n^* \| = \min \| Q_n \| = (\langle\langle H^+ \vec{F}_H, \vec{F}_H \rangle\rangle)^{1/2},\ Q_n \in \Pi_n^{IH}, \tag{6}$$

і цей розв'язок єдиний. Тут $\langle\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle\rangle = \sum_{i=1}^{2m} (\alpha_i, \beta_i)_Y$, $\alpha_i, \beta_i \in Y$, $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_{2m})$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2m})$.

Теорему 2 можна узагальнити на випадок, коли у вузлах інтерполяції задано диференціали Гато до будь-якого порядку.

Інтерполяційний поліном $P_n(x)$ будемо називати інтерполянтом мінімальної норми, якщо він є розв'язком екстремальної задачі (6).

Задачу інтерполяції назвемо інваріантно розв'язною, якщо вона має розв'язок для будь-яких значень вектора $\vec{F}_H$.

Перейдемо до викладу результатів цієї роботи.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ЕРМІТА У СКІНЧЕННОВИМІРНОМУ ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ E_k

На підставі результатів [3, 8] справджується рівність

$$B(u,v)=\int_X (x,u)(x,v)\mu(dx)=(Bu,v),\ \ u,v,x\in X. \tag{7}$$

Цю рівність застосуємо для простору E_k з Гаусовою мірою μ. Нехай $u=$ $=(u_1,u_2,\ldots,u_k)$, $v=(v_1,v_2,\ldots,v_k)$, $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_k)$, $g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$.

Тоді рівність (7) у цьому випадку можна записати у такий спосіб:

$$B(u,v)=\int_{E_k}(\gamma,u)(\gamma,v)\,\mu(d\gamma)=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}(u_1\gamma_1+u_2\gamma_2+\ldots+u_k\gamma_k)(v_1\gamma_1+v_2\gamma_2+\ldots$$

$$\ldots+v_k\gamma_k)\,g(\gamma_1)g(\gamma_2)\cdots g(\gamma_k)d\gamma_1 d\gamma_2\cdots d\gamma_k=$$

$$=(u_1v_1+u_2v_2+\ldots+u_kv_k)=(u,v)=(Iu,v).$$

Отже, у просторі E_k оператор B можна обрати одиничним I.

Не зменшуючи загальності міркувань, розглянемо Евклідів простір E_2 з Гаусовою мірою μ. Нехай p — розмірність простору поліномів степеня n в E_2, $p=(n+1)(n+2)/2$, $u=(u_1,u_2)$, $v=(v_1,v_2)$, $\gamma=(x,y)$. Нехай функція $f:E_2\to R_1$ задана своїми значеннями $f(\gamma_i)$, $i=\overline{1,m}$, у вузлах інтерполяції $\gamma_i=(x_i,y_i)$, $i=\overline{1,m}$, та значеннями похідних Гато першого та другого порядків $f'(\gamma_i)\delta_i^1$, $f''(\gamma_i)\delta_{i2}^2\delta_{i1}^2$, $i=\overline{1,m}$, у цих вузлах за напрямками $\delta_i^1=(v_i,h_i)$, $\delta_{i1}^2=(z_{i1}^1,z_{i2}^1)$, $\delta_{i2}^2=(z_{i1}^2,z_{i2}^2)$, $i=\overline{1,m}$, $3m\le p$.

Потрібно знайти такий поліном $P_n(\gamma)$, що відповідає інтерполяційним умовам

$$\begin{gathered}P_n(\gamma_j)=f(\gamma_j),\\ P_n'(\gamma_j)\delta_j^1=f'(\gamma_j)\delta_j^1,\\ P_n^{(2)}(\gamma_j)\delta_{j2}^2\delta_{j1}^2=f^{(2)}(\gamma_j)\delta_{j2}^2\delta_{j1}^2,\ \ j=\overline{1,m}.\end{gathered} \tag{8}$$

На підставі теореми 2 розв'язком задачі (8) є поліном мінімальної норми (5), при цьому матриця H набуває вигляду $H=\|H^{sl}\|_{l=\overline{1,m},\,s=\overline{1,m}}$, $H^{sl}=\|h_{ij}^{sl}\|_{i=\overline{0,2},\,j=\overline{0,2}}$,

де

$$h_{00}^{sl}=g(\gamma_s,\gamma_l),\ \ h_{01}^{sl}=\frac{\partial}{\partial\beta_1}g(\gamma_s,\gamma_l+\beta_1\delta_l^1)\Big|_{\beta_1=0},$$

$$h_{02}^{sl}=\frac{\partial^2}{\partial\beta_1\partial\beta_2}g\left(\gamma_s,\gamma_l+\sum_{i=1}^{2}\beta_i\delta_{li}^2\right)\Bigg|_{\beta_1=\beta_2=0},$$

$$h_{10}^{sl}=\frac{\partial}{\partial\alpha_1}g(\gamma_s+\alpha_1\delta_s^1,\gamma_l)\Big|_{\alpha_1=0},$$

$$h_{11}^{sl}=\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\beta_1}g(\gamma_s+\alpha_1\delta_s^1,\gamma_l+\beta_1\delta_l^1)\Big|_{\alpha_1=\beta_1=0},$$

$$h_{12}^{sl}=\frac{\partial^3}{\partial\alpha_1\partial\beta_1\partial\beta_2}g\left(\gamma_s+\alpha_1\delta_s^1,\gamma_{l+}\sum_{i=1}^{2}\beta_i\delta_{li}^2\right)\Bigg|_{\alpha_1=\beta_1=\beta_2=0},$$

$$h_{20}^{sl}=\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}g\left(\gamma_s+\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\delta_{si}^2,\gamma_l\right)\Bigg|_{\alpha_1=\alpha_2=0},$$

$$h_{21}^{sl}=\frac{\partial^3}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2\partial\beta_1}g\left(\gamma_s+\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\delta_{si}^2,\gamma_l+\beta_1\delta_l^1\right)\Bigg|_{\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=0},$$

$$h_{22}^{sl}=\frac{\partial^4}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2\partial\beta_1\partial\beta_2}g\left(\gamma_s+\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\delta_{si}^2,\gamma_l+\sum_{i=1}^{2}\beta_i\delta_{li}^2\right)\Bigg|_{\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_2=0},$$

$$g(u,v)=\sum_{p=0}^{n}(u,v)^p,\ u,v\in X,\ 0^0=1.$$

Позначимо

$$\vec{f}_H=\left\{\begin{matrix} f(\gamma_i)\\ f'(\gamma_i)\delta_i^1\\ f''(\gamma_i)\delta_{i2}^2\delta_{i1}^2\end{matrix}\right\}_{i=1}^{m},$$

$$\vec{g}_H(\gamma)=\left\{\begin{matrix}\sum_{p=0}^{n}(\gamma_i,\gamma)^p\\ \frac{\partial}{\partial\alpha_1}\sum_{p=0}^{n}(\gamma_i+\alpha_1\delta_i^1,\gamma)^p\Big|_{\alpha_1=0}\\ \frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}\sum_{p=0}^{n}\left(\gamma_i+\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\delta_{i2}^2,\gamma\right)^p\Big|_{\alpha_1=\alpha_2=0}\end{matrix}\right\}_{i=1}^{m}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\sum_{p=0}^{n}(\gamma_i,\gamma)^p\\ (\delta_i^1,\gamma)\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)(\gamma_i,\gamma)^p\\ (\delta_{i1}^2,\gamma)(\delta_{i2}^2,\gamma)\sum_{p=2}^{n}\frac{p!}{(p-2)!}(\gamma_i,\gamma)^{p-2}\end{matrix}\right\}_{i=1}^{m}. \qquad (9)$$

Доведемо таку теорему.

Теорема 3. Нехай функція $f:E_2\to R_1$ задана своїми значеннями $f(\gamma_i)$, $i=\overline{1,m}$, та значеннями перших та других диференціалів Гато $f'(\gamma_i)\delta_i^1$, $f''(\gamma_i)\delta_{i2}^2\delta_{i1}^2$, $i=\overline{1,m}$. Якщо вузли інтерполяції γ_i, $i=\overline{1,m}$, та напрямки перших і других диференціалів Гато $\delta_i^1=(v_i,h_i)$, $\delta_{i1}^2=(z_{i1}^1,z_{i2}^1)$, $\delta_{i2}^2=(z_{i1}^2,z_{i2}^2)$, $i=\overline{1,m}$, у (8) обрати так, щоб система векторів

$$\vec{\psi}_{3i-2} = (1, x_i, y_i, x_i^2, \sqrt{2}x_i y_i, y_i^2, x_i^3, \sqrt{3}x_i^2 y_i, \sqrt{3}x_i y_i^2, y_i^3, \ldots, y_i^n),$$

$$\vec{\psi}_{3i-1} = (0, \upsilon_i, h_i, 2x_i h_i, \sqrt{2}(x_i \upsilon_i + y_i h_i), 2y_i \upsilon_i, 3x_i^2 \upsilon_i,$$

$$\sqrt{3}x_i(2y_i \upsilon_i + x_i h_i), \sqrt{3}y_i(2x_i \upsilon_i + y_i h_i), 3y_i^2 \upsilon_i, \ldots, C_n^1 y_i^{n-1} \upsilon_i), \tag{10}$$

$$\vec{\psi}_{3i} = (0, 0, 0, 2z_{i1}^1 z_{i2}^2, \sqrt{2}(z_{i1}^1 z_{i2}^2 + z_{i2}^1 z_{i1}^2), 2z_{i2}^1 z_{i1}^2, 3x_i z_{i1}^1 z_{i2}^2,$$

$$\sqrt{3}(x_i(z_{i1}^1 z_{i2}^2 + z_{i2}^1 z_{i1}^2) + y_i z_{i1}^1 z_{i2}^2), \sqrt{3}(y_i(z_{i1}^1 z_{i2}^2 + z_{i2}^1 z_{i1}^2) + x_i z_{i2}^1 z_{i2}^2), \ldots$$

$$\ldots, C_n^1 y_i^{n-2} z_{i2}^1 z_{i2}^2), \; i = \overline{1, m},$$

була лінійно незалежною, то інтерполяційна задача Ерміта (8) для функції двох змінних є інваріантно розв'язною та має єдиний розв'язок мінімальної норми, що визначається формулою

$$P_n(\gamma) = \langle \vec{f}_H, H^{-1}\vec{g}_H(\gamma) \rangle \tag{11}$$

у випадку, коли $3m \le p$, де $p = (n+1)(n+2)/2$ — розмірність простору поліномів другого степеня в E_2.

Доведення. Обчислимо елементи матриці $H = || H^{sl} ||_{l=\overline{1,m}, s=\overline{1,m}}, H^{sl} = || h_{ij}^{sl} ||_{i=\overline{0,2}, j=\overline{0,2}}$. Отримаємо

$$h_{00}^{sl} = \sum_{p=0}^{n} (\gamma_s, \gamma_l)^p, \; h_{01}^{sl} = (\gamma_s, \delta_l) \sum_{p=0}^{n-1} (p+1)(\gamma_s, \gamma_l)^p, \tag{12}$$

$$h_{02}^{sl} = (\gamma_s, \delta_{l1}^2)(\gamma_s, \delta_{l2}^2) \sum_{p=2}^{n} \frac{p!}{(p-2)!} (\gamma_s, \gamma_l)^{p-2}, \tag{13}$$

$$h_{10}^{sl} = (\gamma_l, \delta_s) \sum_{p=0}^{n-1} (p+1)(\gamma_s, \gamma_l)^p, \tag{14}$$

$$h_{11}^{sl} = (\delta_s, \delta_l) \sum_{p=0}^{n-1} (p+1)(\gamma_s, \gamma_l)^p + (\delta_s, \gamma_l)(\delta_l, \gamma_s) \sum_{p=2}^{n} p(p-1)(\gamma_s, \gamma_l)^{p-2}, \tag{15}$$

$$h_{12}^{sl} = (\gamma_s, \delta_{l2}^2)(\delta_s^1, \gamma_l)(\gamma_s, \delta_{l1}^2) \sum_{p=3}^{n} \frac{p!}{(p-3)!} (\gamma_s, \gamma_l)^{p-3} +$$

$$+ ((\delta_s^1, \delta_{l1}^2) + (\gamma_s, \delta_{l1}^2)) \sum_{p=2}^{n} (\gamma_s, \gamma_l)^{p-2}, \tag{16}$$

$$h_{20}^{sl} = (\delta_{s1}^2, \gamma_l)(\delta_{s2}^2, \gamma_l) \sum_{p=2}^{n} \frac{p!}{(p-2)!} (\gamma_s, \gamma_l)^{p-2}, \tag{17}$$

$$h_{21}^{sl} = (\gamma_l, \delta_{s2}^2)(\delta_l^1, \gamma_s)(\gamma_l, \delta_{s1}^2) \sum_{p=3}^{n} \frac{p!}{(p-3)!} (\gamma_s, \gamma_l)^{p-3} +$$

$$+ ((\delta_l^1, \delta_{s1}^2) + (\gamma_l, \delta_{s1}^2)) \sum_{p=2}^{n} (\gamma_s, \gamma_l)^{p-2}, \tag{18}$$

$$h_{22}^{sl} = ((\delta_{s1}^2, \delta_{l1}^2)(\delta_{s2}^2, \delta_{l2}^2) + (\delta_{s1}^2, \delta_{l2}^2)(\delta_{s2}^2, \delta_{l1}^2)) \sum_{p=2}^{n} \frac{p!}{(p-2)!} (\gamma_s, \gamma_l)^{p-3} +$$

$$+ ((\delta_{s1}^2, \delta_{l1}^2)(\delta_{s2}^2, \gamma_l)(\gamma_s, \delta_{l2}^2) + (\delta_{s2}^2, \delta_{l2}^2)(\gamma_s, \delta_{l1}^2)(\delta_{s1}^2, \gamma_l) +$$

$$+(\delta_{s1}^2,\delta_{l2}^2)(\delta_{s2}^2,\gamma_l)(\gamma_s,\delta_{l1}^2)+(\delta_{s2}^2,\delta_{l1}^2)(\delta_{s1}^2,\gamma_l)(\gamma_s,\delta_{l2}^2))\times$$

$$\times\sum_{p=3}^{n}\frac{p!}{(p-3)!}(\gamma_s,\gamma_l)^{p-3}. \qquad (19)$$

Використовуючи рівності (12)–(19), матрицю H представимо як $H = AA'$, де $A = \| A_i \|_{i=\overline{1,m}}$,

$$A_i =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & \sqrt{2}x_i y_i & y_i^2 & x_i^3 & \sqrt{3}x_i^2 y_i & \sqrt{3}x_i y_i^2 & y_i^3 & \dots \\ 0 & \upsilon_i & h_i & 2x_i h_i & \sqrt{2}(x_i\upsilon_i + y_i h_i) & 2y_i\upsilon_i & 3x_i^2\upsilon_i & \sqrt{3}x_i(2y_i\upsilon_i + x_i h_i) & \sqrt{3}y_i(2x_i\upsilon_i + y_i h_i) & 3y_i^2 h_i & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2z_{i1}^1 z_{i2}^2 & \sqrt{2}(z_{i1}^1 z_{i2}^2 + z_{i2}^1 z_{i1}^2) & 2z_{i2}^1 z_{i1}^2 & 3x_i z_{i1}^1 z_{i2}^2 & \sqrt{3}(x_i(z_{i1}^1 z_{i2}^2 + z_{i2}^1 z_{i1}^2) + y_i z_{i1}^1 z_{i2}^2) & \sqrt{3}(y_i(z_{i1}^1 z_{i2}^2 + z_{i2}^1 z_{i1}^2) + x_i z_{i2}^1 z_{i2}^2) & 3y_i z_{i2}^1 z_{i1}^2 & \dots \end{matrix} \right\|.$$

Враховуючи систему векторів (10), матрицю H можна надати у вигляді

$$H = \begin{pmatrix} (\vec{\psi}_1,\vec{\psi}_1) & \dots & (\vec{\psi}_1,\vec{\psi}_{3m}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\vec{\psi}_{3m},\vec{\psi}_1) & \dots & (\vec{\psi}_{3m},\vec{\psi}_{3m}) \end{pmatrix}, \ 3m \le p. \qquad (20)$$

Отже, матриця H є матрицею Грама. Матриця H буде невиродженою, якщо система векторів $\vec{\psi}_i$, $i=\overline{1,3m}$, $3m \le p$, є лінійно незалежною, тобто в цьому випадку $H^+ = H^{-1}$. З урахуванням формули (4) умови існування розв'язку інтерполяційної задачі Ерміта (8) набувають вигляду $(E - HH^{-1})\vec{f}_H = \vec{0}$, тобто виконуються для будь-яких значень функції $f(\gamma_i)$, $i=\overline{1,m}$, та її диференціалів Гато $f'(\gamma_i)\delta_i^1$, $f''(\gamma_i)\delta_{i2}^2\delta_{i1}^2$, $i=\overline{1,m}$, $3m \le p$. Це означає, що інтерполяційна задача Ерміта (8) є інваріантно розв'язною, а її розв'язок мінімальної норми (11) можна записати так:

$$P_n(x,y) = \left\langle \vec{f}_H, H^{-1}\left\{ \begin{matrix} \sum_{p=0}^{n}(x_i x + y_i y)^p \\ (\upsilon_i x + h_i y)\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)(x_i x + y_i y)^p \\ \prod_{k=1}^{2}(z_{i1}^k x + z_{i2}^k y)\sum_{p=2}^{n}\dfrac{p!}{(p-2)!}(x_i x + y_i y)^{p-2} \end{matrix} \right\}_{i=1}^{m} \right\rangle.$$

Теорему доведено.

Результати теореми 3 можна узагальнити для функцій багатьох змінних. Нехай E_k — k-вимірний Евклідів простір, $\gamma = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $\gamma_i = (x_{1_i}, x_{2_i}, \dots, x_{k_i})$, $\delta_i^1 = (h_{1_i}, h_{2_i}, \dots, h_{k_i}) \in E_k$, $\delta_{i1}^2 = (z_{i1}^1, z_{i2}^1, \dots, z_{ik}^1)$, $\delta_{i2}^2 = (z_{i1}^2, z_{i2}^2, \dots, z_{ik}^2) \in E_k$, Π_{kn} — простір поліномів k змінних степеня n, розмірність простору Π_{kn} дорівнює $p = \dfrac{(n+k)!}{n!\,k!}$.

Функція $f: E_k \to R_1$ задана своїми значеннями $f(\gamma_i)$, $i=\overline{1,m}$, та значеннями диференціалів Гато першого та другого порядку $f'(\gamma_i)\delta_i^1$, $f''(\gamma_i)\delta_{i2}^2\delta_{i1}^2$, $i=\overline{1,m}$. У цьому випадку система векторів (10) набуває вигляду

$$\vec{\psi}_{3i-2} = \left\{ \left(\frac{j!}{j_1!\,j_2!\cdots j_k!} \right)^{1/2} x_{i_1}^{j_1} x_{i_2}^{j_2} \cdots x_{i_k}^{j_k},\ j_1 + j_2 + \dots + j_k = j,\ 0! = 1 \right\}_{j=0}^{n},$$

$$\vec{\psi}_{3i-1}=(0, h_{1_i}, \dots, h_{k_i}, 2x_{1_i}h_{1_i}, \dots, 2x_{k_i}h_{k_i}\sqrt{2}(x_{1_i}h_{2_i}+x_{2_i}h_{1_i}), \dots$$
$$\dots, \sqrt{2}(x_{(k-1)_i}h_{k_i}+x_{k_i}h_{(k-1)_i}), 3x_{1_i}^2 h_{1_i}, \dots, 3x_{k_i}^2 h_{k_i}, \sqrt{3}x_{1_i}(2x_{2_i}h_{1_i}+x_{1_i}h_{2_i}), \dots$$
$$\dots, \sqrt{3}x_{(k-1)_i}(2x_{k_i}h_{(k-1)_i}+x_{(k-1)_i}h_{k_i}), \dots, C_n^1 x_{k_i}^{n-1}h_{k_i}), \tag{21}$$
$$\vec{\psi}_{3i}=(\underbrace{0, \dots, 0}_{k+1}, 2z_{i1}^1 z_{i2}^2, \dots, 2z_{ik}^1 z_{i(k-1)}^2, \dots, \sqrt{2}(z_{i1}^1 z_{i2}^2+z_{i2}^1 z_{i1}^2), \dots$$
$$\dots, 3x_{i_1}z_{i1}^1 z_{i2}^2, \dots, 3x_{i_k}z_{ik}^1 z_{i(k-1)}^2, \sqrt{3}(x_{1_i}(z_{i1}^1 z_{i2}^2+z_{i2}^1 z_{i1}^2)+x_{2_i}z_{i1}^1 z_{i2}^2), \dots$$
$$\dots, C_n^1 x_{k_i}^{n-2}z_{ik}^1 z_{ik}^2), \ i=\overline{1, m},$$

при цьому матрицю H запишемо у спосіб, наведений вище: $H=AA'$, $A=||A_i||_{i=1}^m$,

$$A_i=\begin{Vmatrix} \vec{\psi}_{3i-2} \\ \vec{\psi}_{3i-1} \\ \vec{\psi}_{3i} \end{Vmatrix}.$$

Отже, H можна подати у вигляді (20), де вектори $\vec{\psi}_i$, $i=\overline{1, 3m}$, визначаються за допомогою формул (21). Інтерполяційний поліном Ерміта мінімальної норми (11), що є розв'язком задачі Ерміта (8) у просторі E_k можна записати у такому вигляді

$$P_n(x_1, x_2, \dots, x_k)=\langle \vec{f}_H, H^{-1}\vec{g}_H(x_1, x_2, \dots, x_k)\rangle, \tag{22}$$

де

$$\vec{g}_H(x_1, \dots, x_k)=$$
$$=\begin{Bmatrix} \sum_{p=0}^n (x_1 x_{1_i}+\dots+x_k x_{k_i})^p \\ (x_1 h_{1_i}+\dots+x_k h_{k_i})\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)(x_1 x_{1_i}+\dots+x_k x_{k_i})^p \\ \prod_{j=1}^2 (x_1 z_{i1}^j+\dots+x_k z_{ik}^j)\sum_{p=2}^n \dfrac{p!}{(p-2)!}(x_1 x_{1_i}+\dots+x_k x_{k_i})^p \end{Bmatrix}_{i=1}^m. \tag{23}$$

Тепер сформулюємо узагальнення теореми 3 для багатовимірного Евклідового простору E_k у вигляді такої теореми.

Теорема 4. Нехай функція $f: E_k \to R_1$ задана своїми значеннями $f(\gamma_i)$, $i=\overline{1, m}$, та значеннями диференціалів Гато $f'(\gamma_i)\delta_i^1$, $f''(\gamma_i)\delta_{i2}^2\delta_{i1}^2$, $i=\overline{1, m}$. Якщо вузли інтерполяції γ_i, $i=\overline{1, m}$, та напрямки перших та других диференціалів Гато δ_i^1, δ_{i2}^2, δ_{i1}^2, $i=\overline{1, m}$, у (8) обрати так, щоб система векторів (21) була лінійно незалежною, то інтерполяційна задача Ерміта (8) для функції багатьох змінних є інваріантно розв'язною та має єдиний розв'язок мінімальної норми (22) на просторі Π_{kn} у випадку, коли $3m \le p$, де p — розмірність простору Π_{kn}.

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ПОЛІНОМИ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ЕРМІТА У СКІНЧЕННОВИМІРНОМУ ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ E_k

Розглянемо розв'язок інтерполяційної задачі Ерміта (8) у вигляді інтеполянта мінімальної норми (22) в Евклідовому просторі E_k. Подамо його у вигляді

$$P_n(\gamma)=\langle \vec{f}_H, H^{-1}\vec{g}_H(\gamma)\rangle=$$
$$=\sum_{i=1}^m (f(\gamma_i)l_{0i}(\gamma)+f'(\gamma_i)\delta_i^1 l_{1i}(\gamma)+f''(\gamma_i)\delta_{i2}^2\delta_{i1}^2 l_{2i}(\gamma)). \tag{24}$$

Позначимо:

$$\vec{l}(\gamma)=H^{-1}g_H(\gamma)=\begin{Vmatrix} l_{0i}(\gamma) \\ l_{1i}(\gamma) \\ l_{2i}(\gamma) \end{Vmatrix}_{i=1}^m. \tag{25}$$

Теорема 5. Нехай виконуються умови теореми 4. Тоді елементи вектора $\vec{l}(\gamma)$, що визначаються формулою (25), є фундаментальними поліномами інтерполяційної задачі Ерміта (8) у скінченновимірному Евклідовому просторі E_k.

Доведення. Покажемо, що елементи вектора $\vec{l}(\gamma)$ є фундаментальними поліномами інтерполяційної задачі Ерміта (8) у просторі E_k, тобто для його елементів виконуються такі рівності:

$$l_{0i}(\gamma_k)=\delta_{ik},\ l_{1i}(\gamma_k)=0,\ l_{2i}(\gamma_k)=0,\ i,k=\overline{1,m}, \tag{26}$$

$$l'_{0i}(\gamma_k)\delta_k^1=0,\ l'_{1i}(\gamma_k)\delta_k^1=\delta_{ik},\ l'_{2i}(\gamma_k)\delta_k^1=0,\ i,k=\overline{1,m}, \tag{27}$$

$$l''_{0i}(\gamma_k)\delta_{k2}^2\delta_{k1}^2=0,\ l''_{1i}(\gamma_k)\delta_{k2}^2\delta_{k1}^2=0,\ l''_{2i}(\gamma_k)\delta_{k2}^2\delta_{k1}^2=\delta_{ik},\ i,k=\overline{1,m}, \tag{28}$$

де δ_{ik} — символ Кронекера.

Для цього знайдемо значення $\vec{l}(\gamma_j)$, $j=\overline{1,m}$, у вузлах інтерполяції та значення перших та других диференціалів Гато $\vec{l}'(\gamma_j)\delta_j^1$, $\vec{l}''(\gamma_j)\delta_{j2}^2\delta_{j1}^2$, $j=\overline{1,m}$, у цих вузлах. Нехай вектори $\vec{e}_{3i-2}, \vec{e}_{3i-1}, \vec{e}_{3i}$ складаються з нулів, а компоненти цих векторів з індексами $3i-2$, $3i-1$ та $3i$ відповідно дорівнюють одиниці. Враховуючи вигляд вектора $\vec{g}_H(\gamma)$, що визначається формулою (23), та матриці H, елементи якої мають вигляд (12)–(19), одержимо

$$\vec{l}(\gamma_j)=H^{-1}\vec{g}_H(\gamma_j)=$$

$$=H^{-1}\left\{\begin{array}{c}\sum_{p=0}^{n}(\gamma_i,\gamma_j)^p\\ \dfrac{\partial}{\partial\alpha_1}\sum_{p=0}^{n}(\gamma_i+\alpha_1\delta_i^1,\gamma_j)^p\Big|_{\alpha_1=0}\\ \dfrac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}\sum_{p=0}^{n}\left(\gamma_i+\sum_{k=1}^{2}\alpha_k\delta_{ik}^2,\gamma_j\right)^p\Big|_{\alpha_1=\alpha_2=0}\end{array}\right\}_{i=1}^{m}=$$

$$=H^{-1}H\vec{e}_{3j-2}=\vec{e}_{3j-2},\ j=\overline{1,m}.$$

Це означає, що виконується рівність (26). Аналогічно знайдемо $\vec{l}'(\gamma_j)\delta_j^1$, $j=\overline{1,m}$:

$$\vec{l}'(\gamma_j)\delta_j^1=H^{-1}\vec{g}'_H(\gamma_j)\delta_j^1=$$

$$=H^{-1}\left\{\begin{array}{c}\sum_{p=0}^{n}\dfrac{\partial}{\partial\beta_1}(\gamma_i,\gamma_j+\beta_1\delta_j^1)^p\Big|_{\beta_1=0}\\ \dfrac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\beta_1}\sum_{p=0}^{n}(\gamma_i+\alpha_1\delta_j^1,\gamma_j+\beta_1\delta_j^1)^p\Big|_{\alpha_1=\beta_1=0}\\ \dfrac{\partial^3}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2\partial\beta_1}\sum_{p=0}^{n}\left(\gamma_i+\sum_{k=1}^{2}\alpha_k\delta_{ik}^2,\gamma_j+\beta_1\delta_j^1\right)^p\Big|_{\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=0}\end{array}\right\}_{i=1}^{m}=$$

$$=H^{-1}H\vec{e}_{3j-1}=\vec{e}_{3j-1},\ j=\overline{1,m},$$

тобто рівність (27) також виконується. Перевіримо рівність (28). Маємо

$$\vec{l}''(\gamma_j)\delta_{j2}^2\delta_{j1}^2=H^{-1}\vec{g}''_H(\gamma_j)\delta_{j2}^2\delta_{j1}^2,$$

де вектор

$$\vec{g}''_H(\gamma_j)\delta_{j2}^2\delta_{j1}^2=$$

$$
= \left\{ \begin{array}{c} \sum_{p=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial\beta_1 \partial\beta_2} \left(\gamma_i, \gamma_j + \sum_{k=1}^{2} \beta_k \delta_{jk}^2 \right)^p \Bigg|_{\beta_1=\beta_2=0} \\ \frac{\partial^3}{\partial\alpha_1 \partial\beta_1 \partial\beta_2} \sum_{p=0}^{n} \left(\gamma_i + \alpha_1 \delta_i^1, \gamma_j + \sum_{k=1}^{2} \beta_k \delta_{jk}^2 \right)^p \Bigg|_{\alpha_1=\beta_1=\beta_2=0} \\ \frac{\partial^4}{\partial\alpha_1 \partial\alpha_2 \partial\beta_1 \partial\beta_2} \sum_{p=0}^{n} \left(\gamma_i + \sum_{k=1}^{2} \alpha_k \delta_{ik}^2, \gamma_j + \sum_{k=1}^{2} \beta_k \delta_{jk}^2 \right)^p \Bigg|_{\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_2=0} \end{array} \right\}_{i=1}^{m} .
$$

Остаточно отримаємо

$$
\vec{l}\,''(\gamma_j)\delta_{j2}^2 \delta_{j1}^2 = H^{-1} H \vec{e}_{3j} = \vec{e}_{3j}, \;\; j = \overline{1, m}.
$$

Отже, рівність (28) виконується. Теорему доведено.

Зауваження 1. Результати цієї роботи можна перенести на інтерполяційну задачу Ерміта–Біркхофа, тобто на випадок, коли в умовах (8) значення деяких диференціалів Гато першого чи другого порядку у вузлах інтерполяції відсутні. Для того, щоб побудувати розв'язок цієї задачі, потрібно у матриці H викреслити ті рядки та стовбці, що відповідають диференціалам Гато, пропущеним в умовах (8). Для векторів, наявних у формулі (22), виконуємо аналогічні викладки: викреслюємо з них ті елементи, що відповідають пропущеним диференціалам.

ВИСНОВКИ

Одержано умови інваріантної розв'язуваності інтерполяційної задачі Ерміта у скінченновимірному Евклідовому просторі E_k у випадку, коли задано значення функції та її диференціалів Гато першого та другого порядків у цих вузлах. Показано, вона має єдиний розв'язок мінімальної норми, породженої скалярним добутком із Гаусовою мірою у випадку недовизначеності вихідних даних. Доведено, що фундаментальні поліноми інтерполяційної задачі Ерміта (8) входять до складу інтерполянта мінімальної норми (22).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Основы теории полиномиального операторного интерполирования. Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. Т. 24. 278 с.
2. Makarov V.L., Khlobystov V.V., Yanovich L.A. Methods of operator interpolation. Київ: Ін-т математики НАН України, Т. 83. 2010. 516 с.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процесов. Т. 1. Москва: Наука, 1971. 664 с.
4. Хлобистов В.В., Кашпур О.Ф. Операторний інтерполянт типу Ерміта в гільбертовому просторі, що є асимптотично точним на поліномах. *Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки*. 2005. № 2. С. 437–448.
5. Кашпур О.Ф. Розв'язання інтерполяційної задачі Ерміта у скінченновимірному Евклідовому просторі. *Кібернетика та системний аналіз*. 2022. Т. 58, № 2. С. 118–127.
6. Бабенко К.И. Основы численного анализа. Москва; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 848 с.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Москва: Физматлит, 2010. 558 с.
8. Егоров А.Д., Соболевский П.И., Янович Л.А. Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. Минск: Наука и техника, 1985. 310 с.

O.F. Kashpur

HERMITE INTERPOLATION POLYNOMIAL FOR MANY-VARIABLE FUNCTIONS

Abstract. In this paper we consider solving of the Hermite interpolation problem in Euclidean space, in the case whetr the values of the many-variable function and the values of its Gateaux differential of the first and second order at the interpolation nodes are given. It is shown that the problem has a unique solution of minimum norm generated by a scalar product with a Gaussian measure. The conditions of invariant solvability and uniqueness of the solution of the problem are obtained.

Keywords: Hermit interpolation polynomial, Gateaux differential, Hilbert space, Euclidean space, minimum norm.

Надійшла до редакції 27.12.2021