УДК 519.837

Л.В. БАРАНОВСЬКА
Навчально-науковий інститут прикладного системного аналізу КПІ
імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна,
e-mail: *lesia@baranovsky.org*

ЗАДАЧА ПЕРЕСЛІДУВАННЯ ДЛЯ ДРОБОВИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ З ЧИСТИМ ЗАПІЗНЮВАННЯМ

Анотація. Розглянуто задачу переслідування для лінійних дробових диференціальних систем з чистим запізнюванням. Розроблено схему методу розв'язувальних функцій для цих конфліктно-керованих процесів з використанням новітнього представлення формули Коші. Сформульовано достатні умови завершення гри та методику практичного знаходження розв'язувальних функцій.

Ключові слова: конфліктно-керований процес, диференціальні ігри, диференціальні ігри з дробовими похідними, ігри переслідування, теорія ігор.

ВСТУП

Згідно з Р. Айзексом [1] методи дослідження конфліктно-керованих процесів можна розділити на два типи. До першого типу належать методи побудови оптимальних стратегій гравців стосовно заданого критерію. Кожен з них пов'язаний з динамічним програмуванням, а саме з альтернативами Красовського [2, 3], із зворотними процедурами Понтрягіна–Пшеничного [4], із методом Айзекса, який стосується основного рівняння теорії динамічних ігор — рівняння типу Гамільтона–Якобі.

Другий тип методів дослідження забезпечує гарантований результат диференціальної гри. В них не ставиться питання оптимальності, а головним завданням є досягнення цілі, тобто виграшу в ігрі, що є природнішим. До цих методів належать правило екстремального прицілювання Красовського [2], перший прямий метод Понтрягіна [5] і метод розв'язувальних функцій Чикрія [6]. Ці методи ґрунтуються на відомих інженерам-проєктувальникам ракетної та космічної техніки методах погонної кривої Ейлера, переслідування за променем і паралельного переслідування.

У цій роботі використовується саме метод розв'язувальних функцій, який є теоретичним обґрунтуванням методу паралельного переслідування. Ключову роль тут відіграють обернені функціонали Мінковського [7, 8], за допомогою яких утворюються багатозначні спеціальні відображення і відповідні розв'язувальні функції. Зазвичай розв'язувальні функції технічно визначаються з певних квадратних рівнянь, тому така техніка виявилась зручним і універсальним засобом розв'язування конкретних задач.

Система, описана рівняннями з дробовими похідними [9], є одним із видів систем, які за Біркгофом не є динамічними, оскільки не відповідають властивості напівгрупи. Ця особливість є істотною перешкодою для розвитку умов оптимальності. Однак такі процеси можна вивчати за принципом гарантованого результату [6]. Робота Ейдельмана–Чикрія [10], на нашу думку, є однією з перших, в якій аналізувалися ігрові задачі для систем з дробовими похідними. Ґрунтовніші дослідження Чикрія–Ейдельмана [11] містять достатні умови для розв'язування задачі переслідування для систем з дробовими похідними довільного порядку α, $\alpha \in (0,1)$. При цьому розглянуто системи з дробовими похідними Рімана–Ліувілля та з регуляризованими похідними Джрбашяна–Нерсесяна. Використовуючи асимптотичні формули Джрбашяна для функцій Міттаг-Леффлера (Mittag–Leffler) [12], отримано достатні умови завершення гри для простої матричної системи. У Чикрія–Ейдельмана [12] ці результати отримано для систем довільного порядку α похідних Рімана–Ліувілля. Ключову роль у цьому дослідженні відіграють узагальнені матричні функції Міттаг-Леффлера, вперше введені у Чикрія–Ейдельмана [13].

Диференціальні ігри для систем з дробовими похідними Рімана–Ліувілля, Капуто, а також з послідовними похідними досліджено у роботі [14]. Наведено розв'язки таких систем із застосуванням узагальнених матричних функцій Міттаг-Леффлера. Використання асимптотичних представлень цих функцій стосовно методу розв'язувальних функцій дало змогу сформулювати достатні умови розв'язуваності відповідних ігрових задач.

Дослідження дробових диференціальних рівнянь з запізнюванням зумовлено численними описами процесів у механічних і технічних системах. Такі системи часто використовуються для моделювання явищ у науково-технічних задачах. Ці моделі застосовуються в теорії керування, комп'ютерній інженерії, в'язкопружних системах, дифузійних процесах, для аналізу сигналів, вимушених коливальних процесів, моделюванні захворювань та динаміці популяції, в галузі біології.

У 2003 р. Хусаїнов і Шуклін, а також PospЗsil навели корисні представлення запізнювальних експоненціальних матричних функцій, які використовують для знаходження розв'язків лінійних автономних систем із запізнюванням з комутативними і некомутативними матрицями [15–17]. На основі представлених аналогів формули Коші для конфліктно-керованих процесів, які описуються диференціально-різницевими системами, було знайдено достатні умови для розв'язування ігор зближення у роботах [18–23]. Модифікація методу розв'зувальних функцій для диференціально-різницевих ігор зближення сам-на-сам і для групи переслідувачів та одного втікача представлено у роботах [24, 25]. В основу методу розв'зувальних функцій покладено умову Понтрягіна, яка відображає перевагу в ресурсах керування переслідувача над втікачем. Але ця умова може не виконуватися для таких задач, наприклад, як задачі про м'яку зустріч об'єктів, задачі переслідування для коливальних процесів і систем з різною інерційністю тощо. Для таких випадків розроблено модифікацію умови Понтрягіна у роботі [26] та досліджено ігри із запізнюванням інформації в роботах [27–30]. Ігри зближення у разі відмови керувальних пристроїв розглянуто в роботах [31–33].

Наразі було представлено розв'язок лінійних дробових диференціальних рівнянь із запізнюванням. У 2017 р. Li та Wang [34], використовуючи запізнювальні матриці Міттаг-Леффлера, представили розв'язок лінійних однорідних дробових диференціальних систем з одним запізнюванням з порядком $\alpha \in (0,1)$. У 2018 р. вони отримали розв'язок лінійних неоднорідних дробових диференціальних систем [35]. У тому ж році Liang та інші [36] отримали розв'язок лінійної однорідної дробової диференціальної системи з одним запізнюванням з членом, який містить другі похідні Капуто з порядком $\alpha \in (0,1)$. У 2019 р. Махмудов [37] розширив ці результати і надав явні розв'язки, вводячи відстрочене збурення двопараметричної матричної функції типу Міттаг-Леффлера. У 2020 р. Гусейнов і Махмудов [38] розширили результати Махмудова і отримали явні розв'язки, вводячи запізнювальне збурення у вигляді матричної функції трипараметричного типу Міттаг-Леффлера. У 2021 р. Liu та інші [39] надали точні розв'язки для неоднорідного дробового рівняння коливань з чистим запізнюванням шляхом побудови двох функцій, отриманих унаслідок розширення функції Міттаг-Леффлера.

У 2021 р. у роботі Elshenhab та Wang [40] уведено нову запізнювальну матрицю типу Міттаг-Леффлера з двома запізнювальними матрицями Liu. Це дало змогу вперше представити розв'язок для лінійних дробових систем з декількома запізнюваннями із заданими комутативними і некомутативними матрицями. Саме останні здобутки представлення аналогів формули Коші формують основу цього дослідження.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Розглянемо конфліктно-керований процес

$$({}^C D_{0^+}^{\alpha} z)(t) = -Az(t-h) + f(u(t), v(t)), \ t \ge 0, \ h > 0, \tag{1}$$

$$z(t) \equiv \varphi(t), \ z'(t) \equiv \varphi'(t), \ -h \le t \le 0,$$

де ${}^C D_{0^+}^{\alpha}$ визначено як дробову похідну Капуто порядку $\alpha \in (1, 2)$ з нульовою нижньою межею; $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)^{\mathrm{T}} : [-h, \infty) \to \mathbb{R}^n$ є розв'язком, який задовольняє (1) для всіх $t \ge 0$; A є сталою дійсною ненульовою матрицею розміру $n \times n$; блок керування задається функцією $f : U \times V \to \mathbb{R}^n$, неперервною за сукупністю змінних; $U, V \in K(\mathbb{R}^n)$, де $K(\mathbb{R}^n)$ — сукупність непорожніх компактів у просторі $\mathbb{R}^n$; $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)^{\mathrm{T}} : [-h, 0] \to \mathbb{R}^n$ є довільною диференційовною функцією, яка визначає початкові мови.

Сформулюємо задачу переслідування, задану системою (1).

Термінальна множина є циліндричною і має вигляд

$$M^* = M_0 + M, \tag{2}$$

де M_0 — лінійний підпростір з $\mathbb{R}^n$, а M — непорожній компакт з ортогонального доповнення L до M_0 в $\mathbb{R}^n$.

Мета переслідувача (u) — вивести траєкторію процесу на термінальну множину M^* за найменший час. Мета втікача (v) — уникнути зустрічі або максимально відтермінувати момент потрапляння на термінальну множину M^*.

Позначимо Ω_V сукупність вимірних за Лебегом функцій $v(t), \ v(t) \in V, \ t \ge 0$. Аналогічно визначають Ω_U. Відображення, яке діє з $\mathbb{R}^n$ в Ω_V, назвемо програмною стратегією втікача, а її конкретну реалізацію — програмним керуванням. Під час гри втікач використовує програмне керування $v(\cdot) \in \Omega_V$. Контркеруванням втікача назвемо функцію $u(t) = u(z^0(\cdot), \ t, v(t)), \ t \ge 0$, таку, що коли $v(\cdot) \in \Omega_V$, то $u(\cdot) \in \Omega_U$. Контркерування призначається стробоскопічною стратегією Хайєка [41].

Особливістю схеми методу розв'язувальних функцій є використання передісторії керування супротивника для побудови керування гравця. Зазначимо, що ця інформація потрібна лише до певного моменту перемикання, який відокремлює «активний» часовий інтервал від «пасивного» гри. Якщо гра відбувається на інтервалі $[0, T]$, то вважатимемо, що переслідувач вибирає керування у вигляді

$$u(t) = \begin{cases} u_1(z^0(\cdot), t, v(t)), \ t \in [0, t_*]; \\ u_2(z^0(\cdot), t, v(t)), \ t \in [t_*, T], \end{cases}$$

де $[0, t_*)$ — активний часовий інтервал, $[t_*, T]$ — пасивний, $t_* = t_*(\upsilon(\cdot))$ — момент перемикання з одного закону вибору контркерування на інший, який залежить від передісторії керування втікача. На першому інтервалі задіяно безпосередньо метод розв'язувальних функцій [6], на другому — перший прямий метод Понтрягіна [5].

Отже, в цілому керування переслідувача будуємо у вигляді $u(t) = u(z^0(\cdot), t, \upsilon_t(\cdot))$, $t \ge 0$, де $\upsilon_t(\cdot) = \{\upsilon(s): s \in [0, t], \upsilon(\cdot) \in \Omega_V\}$, причому $u(\cdot) \in \Omega_U$. У цьому разі говорять про використання квазістратегій [3].

За таких припущень, ставши на бік переслідувача, знайдемо достатні умови на параметри процесу (1) для приведення траєкторії на термінальну множину (2) за деякий гарантований час (локальна задача зближення).

РОЗВ'ЯЗОК ДРОБОВИХ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ З ЧИСТИМ ЗАПІЗНЮВАННЯМ

Означення 1 [40]. Двопараметрична функція Міттаг-Леффлера визначається за формулою

$$E_{\alpha,\gamma}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \gamma)}, \ \alpha, \gamma > 0, \ z \in \mathbb{C}.$$

Зокрема, якщо $\gamma = 1$, то

$$E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \ \alpha > 0, \ z \in \mathbb{C}.$$

Означення 2 [40]. Запізнювальні матричні функції типу Міттаг-Леффлера $\mathcal{H}_{h,\alpha}(At^\alpha)$, $\mathcal{M}_{h,\alpha}(At^\alpha)$ і $\mathcal{S}_{h,\alpha}(At^\alpha)$ визначаються за формулами

$$\mathcal{H}_{h,\alpha}(At^\alpha) = \begin{cases} \Theta, \ -\infty < t < -h, \\ E, \ -h \le t < 0, \\ E - A\dfrac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, 0 \le t < h, \\ \cdots \\ E - A\dfrac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + A^2 \dfrac{(t-h)^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + \ldots \\ \ldots + (-1)^k A^k \dfrac{(t-(k-1)h)^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)}, \quad (k-1)h \le t < kh; \end{cases}$$

$$\mathcal{M}_{h,\alpha}(At^\alpha) = \begin{cases} \Theta, \ -\infty < t < -h, \\ E(t+h), \ -h \le t < 0, \\ E(t+h) - A\dfrac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(2+\alpha)}, 0 \le t < h, \\ \cdots \\ E(t+h) - A\dfrac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(2+\alpha)} + A^2 \dfrac{(t-h)^{2\alpha+1}}{\Gamma(2+2\alpha)} + \ldots \\ \ldots + (-1)^k A^k \dfrac{(t-(k-1)h)^{k\alpha+1}}{\Gamma(2+k\alpha)}, \quad (k-1)h \le t < kh; \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_{h,\alpha}(At^{\alpha})=\begin{cases}\Theta, \ -\infty<t<-h,\\ E\dfrac{(t+h)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \ -h\le t<0,\\ E\dfrac{(t+h)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-A\dfrac{t^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}, \ 0\le t<h,\\ \ldots\\ E\dfrac{(t+h)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-A\dfrac{t^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}+A^2\dfrac{(t-h)^{3\alpha-1}}{\Gamma(3\alpha)}+\ldots\\ \ldots+(-1)^k A^k\dfrac{(t-(k-1)h)^{\alpha(k+1)-1}}{\Gamma(\alpha(k+1))}, \quad (k-1)h\le t<kh,\end{cases}$$

де Θ, E — нульова та одинична $n\times n$-матриці відповідно, Γ — гамма–функція, $k=0,1,2\ldots$

Означення 3 [40]. Нехай $z\colon[-h,\infty)\to\mathbb{R}^n$ — функція порядку $\alpha\in(1,2)$. Тоді дробова похідна Капуто для z визначається таким чином:

$$({}^C D^{\alpha}_{0^+} z)(t)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^t\frac{z''(s)}{(t-s)^{\alpha-1}}ds, \ t>0\,.$$

Лема 1 [40]. Розв'язок системи (1) задається формулою

$$z(t)=\begin{cases}\varphi(t), \ -h\le t<0,\\ \mathcal{H}_{h,\alpha}(A(t-h)^{\alpha})\varphi(0)+\mathcal{M}_{h,\alpha}(A(t-h)^{\alpha})\varphi'(0)-\\ -A\int_{-h}^{0}\mathcal{S}_{h,\alpha}(A(t-2h-s)^{\alpha})\varphi(s)ds+\\ +\int_0^t\mathcal{S}_{h,\alpha}(A(t-h-s)^{\alpha})f(u(s),v(s))ds, \quad t\ge 0.\end{cases}$$

СХЕМА МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай π — оператор ортогонального проєктування з $\mathbb{R}^n$ в L. Розглянемо багатозначні відображення

$$W(t,v)=\pi\mathcal{S}_{h,\alpha}(A(t)^{\alpha})f(U,v), \ W(t)=\bigcap_{v\in V}W(t,v)\,.$$

У випадку, коли конфліктно-керований процес є лінійним, тобто $f(u,v)=u-v$,

$$W(t)=\pi\mathcal{S}_{h,\alpha}(A(t)^{\alpha})U \,\underline{*}\, \pi\mathcal{S}_{h,\alpha}(A(t)^{\alpha})V,$$

де $\underline{*}$ означає геометричну різницю Мінковського [6].

Розглянемо умову Понтрягіна: відображення $W(t)\ne\varnothing$ для всіх $t\ge 0$.

Оскільки унаслідок припущень на параметри процесу (1) та представлення функції $\mathcal{S}_{h,\alpha}(At^{\alpha})$ багатозначне відображення $W(t,v)$ неперервне на множині $[0,+\infty)\times V$, а у разі виконання умови Понтрягіна ефективна множина $\operatorname{dom} W(t)=[0;+\infty)$, відображення $W(t)$ напівнеперервне зверху, а отже, Борелеве і замкненозначне.

Згідно з теоремою про вимірний вибір [42] існує хоча б один Борелів селектор $g(t)$, $g(t)\in W(t)$, $t\ge 0$. Позначимо $G=\{g(\cdot)\colon g(t)\in W(t),\ t\ge 0\}$ сукупність Борелевих селекторів багатозначного відображення $W(t)$. Зафіксуємо деякий елемент $g(\cdot)\in G$ і покладемо

$$\xi(t, \varphi(\cdot), \gamma(\cdot)) = \pi[\mathcal{H}_{h,\alpha}(A(t-h)^{\alpha})\varphi(0) + \mathcal{M}_{h,\alpha}(A(t-h)^{\alpha})\varphi'(0)] -$$
$$-\pi A\int_{-h}^{0} \mathcal{S}_{h,\alpha}(A(t-2h-s)^{\alpha})\varphi(s)ds + \int_0^t g(s)ds. \tag{3}$$

Розглянемо функцію

$$\alpha(t, s, \varphi(\cdot), m, \upsilon, g(\cdot)) = \alpha_{W(t-h-s,\upsilon)-g(t-h-s)}(m - \xi(t, \varphi(\cdot), g(\cdot)))$$

для $t \ge s \ge 0,\ \upsilon \in V,\ g(\cdot) \in G,\ m \in M,\ z \in \mathbb{R}^n$.

Поклавши $\alpha(t, s, \varphi(\cdot), \upsilon, g(\cdot)) = \max\limits_{m \in M} \alpha(t, s, \varphi(\cdot), m, \upsilon, g(\cdot))$, отримаємо рівність

$$\alpha(t, s, \varphi(\cdot), \upsilon, g(\cdot)) = \alpha(t, s, \upsilon) =$$
$$= \sup\{\rho \ge 0: [W(t-h-s, \upsilon) - g(t-h-s)] \cap \tag{4}$$
$$\cap \rho[M - \xi(t, \varphi(\cdot), g(\cdot))] \ne \varnothing\}.$$

Функцію (4) назвемо розв’язувальною. Звідси випливає твердження: для того, щоб функція $\alpha(t, s, \upsilon) \in M$ дорівнювала $+\infty$ тотожно по $s \in [0, t],\ \upsilon \in V$, необхідно і достатньо, щоб $\xi(t, \varphi(\cdot), g(\cdot)) \in M$. Якщо $\xi(t, \varphi(\cdot), g(\cdot)) \notin M$, то розв’язувальна функція (4) приймає скінченні значення. Вважатимемо, що розв’язувальна функція суперпозиційно Борелева за $s \in [0, t],\ \upsilon \in V$.

Позначимо

$$T(\varphi(\cdot), g(\cdot)) = \inf \left\{ t \ge 0: \int_0^t \inf_{\upsilon \in V} \alpha(t, s, \varphi(\cdot), g(\cdot))\, ds \ge 1 \right\},\ g(\cdot) \in G. \tag{5}$$

Якщо нерівність в фігурних дужках не виконується для всіх $t \ge 0$, то покладатимемо $T(\varphi(\cdot), g(\cdot)) = +\infty$.

Теорема 1. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1) виконується умова Понтрягіна, множина M опукла, для початкового стану $\varphi(\cdot)$ і деякого селектора $g^0(\cdot) \in G$ $T = T(\varphi(\cdot), g^0(\cdot)) < +\infty$. Тоді траєкторія процесу (1) може бути приведена з початкового стану $\varphi(\cdot)$ на термінальну множину M^* в момент T з використанням відповідної квазістратегії.

Доведення. Нехай $\upsilon(s),\ \upsilon(s) \in V,\ s \in [0, T]$, — довільна вимірна функція. Розглянемо випадок, коли $\xi(T, \varphi(\cdot), \gamma(\cdot)) \notin M$. З використанням контрольної функції $h(t) = 1 - \int_0^t \alpha(T, s, \varphi(\cdot), \upsilon, \gamma(\cdot))ds,\ t \ge 0,$ знаходитимемо момент перекмикання $t_* = t_*(\upsilon(\cdot)),\ 0 < t_* \le T$, з активного проміжку часу $[0, t_*)$ на пасивний $[t_*, T]$ за умовою $h(t_*) = 0$. Опишемо спосіб вибору керування переслідувачем на кожному з цих проміжків часу. Розглянемо багатозначне відображення

$$U_1(s, \upsilon) = \{u \in U: \pi\mathcal{S}_{h,\alpha}(A(T-h-s)^{\alpha}) f(u, \upsilon) - g^0(T-h-s) \in$$
$$\in \alpha(T, s, \upsilon)[M - \xi(T, \varphi(\cdot), g^0(\cdot))]\}. \tag{6}$$

Унаслідок припущень на параметри процесу (1), а також і того, що розв’язувальна функція (4) Борелева, відображення $U_1(s, \upsilon)$ є Борелевим. Тоді його селектор $u_1(s, \upsilon) = \mathrm{lex}\min U_1(s, \upsilon)$ є Борелевою функцією за сукупністю змінних. Керування переслідувачем на проміжку $[0, t_*)$ покладемо рівним $u(s) = u_1(s, \upsilon(s))$. Воно є вимірною (за Лебегом) функцією як суперпозиція зовнішньої Борелевої та вимірної функції.

Покладемо $\alpha(T, s, \upsilon) = 0$ для $s \in [t_*, T]$. Тоді відображення

$$U_2(s, \upsilon) = \{u \in U: \pi\mathcal{S}_{h,\alpha}(A(T-h-s)^{\alpha}) f(u, \upsilon) - g^0(T-h-s) = 0\},$$

$s \in [t_*, T]$, $v \in V$, також є Борелевою функцією за сукупністю змінних і її селектор $u_2(s, v) = \text{lex} \min U_2(s, v)$ є Борелевою функцією.

Керування переслідувачем на проміжку часу $[t_*, T]$ покладемо

$$u(s) = u_2(s, v(s)). \tag{7}$$

Воно також є вимірною функцією.

Нехай $\xi(T, \varphi(\cdot), g^0(\cdot)) \in M$. Тоді керування переслідувачем на проміжку $[0, T]$ виберемо у вигляді (7).

Отже, визначено закон керування переслідувачем для довільної ситуації. Покажемо, що траєкторія процесу (1) в момент T попадає на термінальну множину (2) за довільних керувань втікача. За лемою 1 для системи (1) матимемо

$$\begin{gathered}\pi z(T) = \pi \mathcal{H}_{h,\alpha}(A(T-h)^\alpha)\varphi(0) + \pi \mathcal{M}_{h,\alpha}(A(T-h)^\alpha)\varphi'(0) - \\ -\pi A \int_{-h}^{0} \mathcal{S}_{h,\alpha}(A(T-2h-s)^\alpha)\varphi(s)ds + \\ +\pi \int_0^T \mathcal{S}_{h,\alpha}(A(T-h-s)^\alpha) f(u(s), v(s))ds.\end{gathered} \tag{8}$$

Проаналізуємо спочатку випадок, коли $\xi(T, \varphi(\cdot), g^0(\cdot)) \notin M$. Для цього додамо і віднімемо у правій частині рівності (8) величину $\int\limits_0^T g^0(T-h-s)ds$:

$$\begin{gathered}\pi z(T) = [\pi \mathcal{H}_{h,\alpha}(A(T-h)^\alpha)\varphi(0) + \pi \mathcal{M}_{h,\alpha}(A(T-h)^\alpha)\varphi'(0) - \\ -\pi A \int_{-h}^{0} \mathcal{S}_{h,\alpha}(A(T-2h-s)^\alpha)\varphi(s)ds + \int\limits_0^T g^0(T-h-s)ds] + \\ +\int_0^T [\pi \mathcal{S}_{h,\alpha}(A(T-h-s)^\alpha) f(u(s), v(s)) - g^0(T-h-s)]ds.\end{gathered}$$

З урахуванням (3), (4), (6) одержимо

$$\begin{gathered}\pi z(T) \in \xi(T, \varphi(\cdot), g^0(\cdot)) + \int_0^T \alpha(T, s, v)[M - \xi(T, \varphi(\cdot), g^0(\cdot))]ds = \\ = \xi(T, \varphi(\cdot), g^0(\cdot)) + \int_0^T \alpha(T, s, v) \cdot M ds - \int_0^T \alpha(T, s, v) \cdot \xi(T, \varphi(\cdot), g^0(\cdot))ds.\end{gathered}$$

Згідно із законом вибору керування за методом розв'язувальних функцій $\alpha(T, s, v) = 0$, $s \in [t_*, T]$, одержимо включення

$$\pi z(T) \in \xi(T, \varphi(\cdot), g^0(\cdot))(1 - \int_0^{t_*} \alpha(T, s, v)\, ds) + \int_0^{t_*} \alpha(T, s, v) M ds,$$

звідки, враховуючи рівність $\int_0^{t_*} \alpha(T, s, v)ds = 1$ і умову опуклості множини M, одержуємо включення $\pi z(T) \in M$, що рівносильно $z(T) \in M^*$.

Розглянемо випадок, коли $\xi(T, \varphi(\cdot), g^0(\cdot)) \in M$. Тоді керування переслідувачем виберемо у вигляді (7) і з (8) одержимо включення $\pi z(T) \in M$, що і треба було довести.

Для практичного знаходження розв'язувальних функцій розглянемо таку теорему.

Теорема 2. Нехай конфліктно-керований процес (1) лінійний, виконується умова Понтрягіна, існують неперервна додатна функція $r(t)$, $r: R^+ \to R^+$, і число $l \geq 0$ такі, що

$$\pi \mathcal{S}_{h,\alpha}(A(t-h-s)^\alpha)U = r(t)C, \ \ M = lC,$$

де C — одинична куля L з центром в нулі. Тоді розв'язувальна функція $\alpha(t, s, \varphi(\cdot), \upsilon, g(\cdot)), 0 \leq s \leq t, z \in \mathbb{R}^N$, $\upsilon \in V$, $g(\cdot) \in G$, для $\xi(t, \varphi(\cdot), g(\cdot)) \notin lC$ є більшим додатним коренем квадратного рівняння стосовно ρ:

$$\| \pi \mathcal{S}_{h,\alpha}(A(t-h-s)^\alpha)\upsilon + g(t-h-s) - \rho\xi(t, \varphi(\cdot), g(\cdot)) \| = \\ = r(t-h-s) + \rho l. \tag{9}$$

Доведення. З умови теореми 2 і виразу (4) випливає, що розв'язувальна функція для фіксованих значень аргументів є таким максимальним числом ρ, що

$$\{r(t-h-s)C - \pi \mathcal{S}_{h,\alpha}(A(t-h-s)^\alpha)\upsilon - g(t-h-s)\} \cap \\ \cap \rho\{lC - \xi(t, \varphi(\cdot), g(\cdot))\} \neq \varnothing;$$

це рівносильно включенню

$$\pi \mathcal{S}_{h,\alpha}(A(t-h-s)^\alpha)\upsilon + g(t-h-s) - \rho\xi(t, \varphi(\cdot), g(\cdot)) \in \\ \in [r(t-h-s) + \rho l]C.$$

Унаслідок лінійності за ρ лівої частини останнього включення для максимального ρ вектор $\pi \mathcal{S}_{h,\alpha}(A(t-h-s)^\alpha)\upsilon + g(t-h-s) - \rho\xi(t, \varphi(\cdot), g(\cdot))$ розташовуватиметься на межі кулі $[r(t-h-s) + \rho l]C$, що виражено рівністю (9). Теорему доведено.

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто ігри переслідування, процес яких описано дробовими диференціальними системами з чистим запізнюванням. Побудовано схему методу розв'язувальних функцій із застосуванням аналога формули Коші для цих систем, сформульовано достатні умови закінчення гри та представлено методику практичної реалізації. Надалі планується розвинути схеми методів розв'язувальних функцій та першого прямого методу Понтрягіна для процесів, які описуються дробовими диференціальними системами з декількома запізнюваннями за заданими комутативними і некомутативними матрицями, а також розглянути аналогічні ігри переслідування для групи переслідувачів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Isaacs R. Differential games. New York: John Wiley, 1965. 480 p.
2. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. Москва: Наука, 1970. 420 с.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. Москва: Наука, 1974. 455 с.
4. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Т. 2. Москва: Наука, 1988. 575 с.
5. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. Москва: Изд-во МГУ, 1984. 65 с.
6. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Springer Science and Business Media, 2013. 424 p.

7. Baranovskaya L.V., Chikrij A.A., Chikrij Al.A. Inverse Minkowski functional in a non-stationary problem of group pursuit. *Izvestiya Akademii Nauk. Teoriya i Sistemy Upravleniya.* 1997. N 1. P. 109–114.

8. Baranovskaya L.V., Chikrii A.A., Chikrii Al.A. Inverse Minkowski functional in a non-stationary problem of group pursuit. *Journal of Computer and Systems Sciences International.* 1997. Vol. 36, N 1. P. 101–106.

9. Samko S.G., Kilbas A.A. and Marychev O.I. Fractional order integrals and derivatives, and some its applications. Minsk: Nauka i tekhnika, 1987. 688 p. (in Russian).

10. Chikrij A.A. and Eidelman S.D. Generalized Mittag–Leffler matrix functions in game problems for evolutionary equations of fractional order. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2000. Vol. 36, N 3. P. 315–338. https://doi.org/10.1007/BF02732983.

11. Chikrii A.A., Eidelman S.D. Control game problems for quasilinear systems with Riemann–Liouville fractional derivatives. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2001. Vol. 37, N 6. P. 836–864.

12. Dzhrbashyan M.M. Integral transformations and function representations in complex plane. Moscow: Nauka, 1966. 671 p.

13. Eidelman S.D., Chikrii A.A. Game problems for systems with Volterra evolution. Fractal games. *J. Game Theory and Appl.* 2000. N 6. P. 21–58.

14. Chikrii A., Matychyn I. Riemann–Liouville, Caputo, and sequential fractional derivatives in differential games. *Annals of the International Society of Dynamic Games.* 2011. Vol. 11. P. 61–81. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8089-3_4.

15. Khusainov D.Ya., Shuklin G.V. Linear autonomous time-delay system with permutation matrices solving. *Stud. Univ. Zilina Math. Ser.* 2003. Vol. 17. P. 101–108.

16. Posp3šil M. Representation of solutions of systems of linear differential equations with multiple delays and nonpermutable variable coefficients. *Mathematical Modeling and Analysis.* 2020. Vol. 25, N 2. P. 303–322.

17. Posp3šil M., Jaroš F. On the representation of solutions of delayed differential equations via Laplace transform. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations.* 2016. N 117. P. 1–13. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2016.1.117.

18. Baranovska L.V. Group pursuit differential games with pure time-lag. *Understanding Complex Systems.* 2021. P. 475–488. https://doi.org/10.1007/978-3-030-50302-4_23.

19. Baranovska L.V. Quasi-linear differential-difference game of approach. *Understanding Complex Systems.* 2019. P. 505–524. https://doi.org/10.1007/978-3-319-96755-4_26.

20. Baranovska L.V. Pursuit differential-difference games with pure time-lag. *Discrete and Continuous Dynamical Systems* — B. 2019. Vol. 24, N 3. P. 1021–1031. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2019004.

21. Baranovska L.V. On quasilinear differential-difference games of approach. *J. of Automation and Information Sciences.* 2017. Vol. 49, N 8. P. 53–67. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v49.i8.40.

22. Baranovska L., Hyriavets D., Dovzhanytsia K., Mukhin V. Visualization of pursuit differential game on a plane. *CEUR Workshop Proceedings,* 2021. P. 99–113. http://ceur-ws.org/Vol-2859/paper9.pdf.

23. Baranovska G.G., Baranovska L.V. Group pursuit in quasilinear differential-difference games. *J. of Automation and Information Sciences.* 1997. Vol. 29, N 1. P. 55–62. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v29.i1.70.

24. Baranovskaya L.V. A method of resolving functions for one class of pursuit problems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.* 2015. Vol. 2, N 4. P. 4–8. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2015.39355.

25. Baranovska L.V. Method of resolving functions for the differential-difference pursuit game for different-inertia objects. *Studies in Systems, Decision and Control.* 2016. Vol. 69. P. 159–176. https://doi.org/10.1007/978-3-319-40673-2_7.

26. Chikrii A.A., Chikrii G.T. Matrix resolving functions in game problems of dynamics. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2015. Vol. 291. P. 56–65. https://doi.10.1134/ S0081543815090047.

27. Chikrii G.T. Using the effect of information delay in differential pursuit games. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2007. Vol. 43, N 2. P. 233–245. https://doi.10.1007/s10559-007-0042-x

28. Chikrii G.T. Principle of time stretching in evolutionary games of approach. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2016. Vol. 48, N 5. P. 12–26. https://doi.10.1615/JAutomatInfScien.v48.i5.20.

29. Chikrii G.T. On one problem of approach for damped oscillations. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2009. Vol. 41, N 10. P. 1–9. https://doi.10.1615/JAutomatInfScien.v41.i10.10.

30. Chikriy A.A., Baranovskaya L.V., Chikriy Al.A. An approach game problem under the failure of controlling devices. *J. of Automation and Information Sciences.* 2000. Vol. 32, N 5. P. 1–8. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v32.i5.10.

31. Chikrij A.A., Baranovskaya L.V., Chikrij Al.A. The game problem of approach under the condition of failure of controlling devices. *Problemy Upravleniya i Informatiki (Avtomatika).* 1997. N 4. P. 5–13. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v32.i5.10.

32. Baranovskaya L.V., Chikrii Al.A. Game problems for a class of hereditary systems. *J. of Automation and Information Sciences.* 1997. Vol. 29, N 2. P. 87–97. https://doi.org/10.1615/ JAutomatInfScien.v29.i2-3.120.

33. Li M., Wang J.R. Finite time stability of fractional delay differential equations. *Appl. Math. Lett.* 2017. Vol. 64. P. 170–176.

34. Li M., Wang J.R. Exploring delayed Mittag–Leffler type matrix functions to study finite time stability of fractional delay differential equations. *Applied Mathematics and Computation.* 2018. Vol. 324. P. 254–265.

35. Liang C., Wang J.R., O'Regan D. Representation of solution of a fractional linear system with pure delay. *Appl. Math. Lett.* 2018. Vol. 77. P. 72–78.

36. Mahmudov N.I. Delayed perturbation of Mittag–Leffler functions and their applications to fractional linear delay differential equations. *Math. Meth. Appl. Sci.* 2019. Vol. 42. P. 5489–5497.

37. Huseynov I.T., Mahmudov N.I. Delayed analogue of three-parameter Mittag–Leffler functions and their applications to Caputo-type fractional time delay differential equations. *Math. Meth. Appl. Sci.,* 2020. P. 1–25. https://doi.org/10.1002/mma.6761.

38. Liu L., Dong Q., Li G. Exact solutions and Hyers–Ulam stability for fractional oscillation equations with pure delay. *Appl. Math. Lett.* 2021. Vol. 112. P. 1–7. https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106666.

39. Ahmed M. Elshenhab, Xing Tao Wang. Representation of solution for linear fractional systems with pure delay and multiple delays. *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* 2021. Vol. 44. P. 12835–12850. https://doi.org/10.1002/mma.7585.

40. Hajek O. Pursuit games. New York: Academic Press. 1975. Vol. 12. 266 p.

41. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.

L.V. Baranovska

PURSUIT PROBLEM FOR FRACTIONAL DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH PURE DELAY

Abstract. In this paper, we consider the pursuit problem for linear fractional differential systems with pure delay. A scheme of the method of resolving functions for such conflict-controlled processes has been developed using the latest representation of the Cauchy formula. Sufficient conditions for the completion of the game and the method of practical finding of resolving functions are formulated.

Keywords: conflict-controlled process, differential games, fractional differential games, pursuit games, game theory.

Надійшла до редакції 14.01.2022