УДК 519.6

В.Г. ПРИКАЗЧИКОВ
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *viktorprikazchikov@gmail.com.*

ЕФЕКТИВНІ ДВОСТОРОННІ ОЦІНКИ СПЕКТРА ДЕЯКИХ ЕЛІПТИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ

Анотація. За принципом максимуму отримано оцінки зверху та знизу для спектра деяких еліптичних операторів та їніх сіткових аналогів. З точних формул похибки власних чисел за методом скінченних різниць отримано точніші оцінки спектра диференціальних операторів. Двосторонні оцінки власних чисел різницевих аналогів спектральних задач визначають мажоранту і міноранту для похибки фазової швидкості сіткових хвиль в задачах коливань різноманітних об'єктів.

Ключові слова: еліптичні оператори, принцип максимуму, метод скінченних різниць, точні формули похибки власних чисел, двосторонні оцінки спектра, рівняння коливань, похибка фазових швидкостей сіткових хвиль.

Для обчислення спектра еліптичних операторів часто використовують дискретні аналоги, здобуті за методом скінченних різниць (МСР) або за методом скінченних елементів (МСЕ). Ці аналоги є алгебраїчними задачами на власні значення, які потребують значних комп'ютерних витрат. Однак іноді достатньо обмежитися двосторонніми оцінками власних чисел (в.ч.), які можна отримати менш трудомістким способом, як подано в цій даній роботі. Для дискретизації потрібно дослідити точність методу, з'ясувати, з якого боку в.ч. дискретної задачі наближаються до в.ч. вихідної задачі, знайти економічний спосіб знаходження двосторонніх оцінок тощо.

Точність МСР для деяких спектральних задач досліджено в [1–9]. Двосторонні оцінки в.ч. еліптичних операторів подано в [10–12]. У цій роботі отримано нові результати для деяких операторів. Із точних формул похибки в.ч. в МСР випливають точніші оцінки для в.ч. вихідних задач. Деякі результати подано в [13–19].

Зазначимо, що в МСЕ в.ч. наближаються до в.ч. вихідної задачі зверху, оскільки мінімакс відповідних функціоналів здійснюється на більш вузькому класі допустимих функцій порівняння [20].

Як приклад, із застосуванням двосторонніх оцінок в.ч. в МСР отримано вилки для похибки фазової швидкості сіткових хвиль у випадку дискретизації низки задач коливання різноманітних об'єктів.

1. У роботах [3, 9] досліджено МСР для спектральної задачі з оператором Лапласа за умови Діріхле на межі Γ довільної двовимірної опуклої області Ω:

$$\begin{gathered}\Delta u+\lambda u=0, \quad x=(x_1,x_2)\in\Omega,\\ u=0, \quad x\in\Gamma.\end{gathered} \tag{1}$$

Задача (1) еквівалентна мінімаксу функціонала

$$\Phi(u)=\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx, \quad \int\limits_{\Omega} u^2 dx=1.$$

Розглянемо $\Phi(u)$ на прямокутниках Π и Π^+, $\Pi\subset\Omega\subset\Pi^+$, з довжинами сторін $l_i, l_i^+, i=1,2$, відповідно. Оскільки на Π^+ клас допустимих функцій є ширшим, а на Π — вужчим, то мінімакс визначає

$$\left(\frac{\pi k_1}{l_1^+}\right)^2+\left(\frac{\pi k_2}{l_2^+}\right)^2\le\lambda_{k_1k_2}\le\left(\frac{\pi k_1}{l_1}\right)^2+\left(\frac{\pi k_2}{l_2}\right)^2,\ k_i\in\mathbb{N},\ i=1,2.$$

Різницева задача для квадратної сітки з кроком h має вигляд

$$\sum_{i=1}^{2}y_{\bar{t}_i\hat{t}_i}+\mu\,y=0,\ t=(t_1,t_2)\in\omega,$$

$$y=0,\quad t\in\gamma.$$

Тут і далі ω позначено вузли сітки всередині Ω, а γ — вузли сітки на Γ. Різницевий оператор є самоспряженим, попри те, що поблизу межі похідні записуються на нерівномірній сітці.

У роботі [21] для $u_k\in C^{(4)}(\Omega)$, а в [18] — для $u_k\in C^{(2)}(\Omega)$ одержано формулу

$$\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_k-\mu_k}{h^2}=\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}\right)^2dx+\int_{\Gamma}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial n}\right)^2\sin^2 2\varphi\,d\varphi, \tag{2}$$

де $\dfrac{\partial u_k}{\partial n}$ — похідна в напрямку зовнішньої нормалі, φ — кут між віссю Ox_1 і додатним напрямком дотичної до межі Γ. Для достатньо малого значення h з (2) випливає нерівність $\mu_k<\lambda_k$. Мінімакс сіткового аналога визначає

$$\mu^-_{k_1k_2}\le\mu_{k_1k_2}\le\mu^+_{k_1k_2},$$

де

$$\mu^-_{k_1k_2}=\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\pi k_i}{l_i^+}\frac{\sin\psi^+_{k_i}}{\psi^+_{k_i}}\right)^2,\quad \mu^+_{k_1k_2}=\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\pi k_i}{l_i}\frac{\sin\psi_{k_i}}{\psi_{k_i}}\right)^2,$$

$$\psi_{k_i}=\frac{\pi k_i h}{2l_i},\qquad \psi^+_{k_i}=\frac{\pi k_i h}{2l_i^+},\quad k_i=1,2,\ldots,\frac{l_i}{h}-1,\ i=1,2.$$

2. У роботі [11] досліджено МСР спектральної задачі для оператора зі змінними коефіцієнтами:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{p_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\lambda u=0,\quad & x\in\Omega,\\ u=0,\quad & x\in\Gamma,\end{aligned} \tag{3}$$

де $p_i\in C^{(2,\alpha)}(\Omega)$, $0<\alpha<1$, $0<c_1\le p_i(x_1,x_2)\le c_2$. Тут і далі Ω позначено прямокутник з довжинами сторін l_i, $i=1,2$, і межею Γ.

Задача (3) еквівалентна мінімаксу функціонала

$$\Phi(u)=\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{p_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx,\qquad \int_{\Omega}u^2dx=1.$$

Беручи до уваги обмеженість p_i, дістаємо

$$\frac{1}{c_2}\Phi^0(u)\le\Phi(u)\le\frac{1}{c_1}\Phi^0(u), \tag{4}$$

де

$$\Phi^0(u)=\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2. \tag{5}$$

Мінімакс функціонала (5) еквівалентний спектральній задачі для оператора Лапласа. Тому з (4) випливає

$$\frac{1}{c_2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\pi k_i}{l_i}\right)^2 \le \lambda_{k_1 k_2} \le \frac{1}{c_1}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\pi k_i}{l_i}\right)^2, \quad k_i \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Точніші оцінки зверху та знизу для λ_k отримано за допомогою МСР. У роботі [11] запропоновано два сіткових аналоги на квадратній сітці з кроком h:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{y_{\bar{t}_i}}{\widetilde{a}_i}\right)_{t_i} + \mu y = 0, \quad t \in \omega, \\ y = 0, \quad t \in \gamma,\end{gathered} \tag{7}$$

де $\widetilde{a}_i = \left[p_i + \dfrac{h^2}{24}(p_i)_{\bar{t}_i t_i}\right](\widetilde{t}_i, t_{3-i}), \quad \widetilde{t}_i = t_i - \dfrac{h}{2}, \quad i = 1,2, \quad c_1^h \le \widetilde{a}_i \le c_2^h$;

і

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{2}\Lambda_i y - \frac{h^2}{12}\sum_{i=1}^{2}\Lambda_i(p_i \Lambda_i y) + \hat{\mu} y = 0, \quad t \in \omega, \\ y = \sum_{i=1}^{2}\Lambda_i y = 0, \quad t \in \gamma,\end{gathered} \tag{8}$$

де $\Lambda_i y = \left(\dfrac{y_{\bar{t}_i}}{a_i}\right)_{t_i}, \quad a_i = p_i(\widetilde{t}_i, t_{3-i}), \quad i = 1,2.$

Для (7) і (8) отримано відповідно формули

$$\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_k - \mu_k}{h^2} = \frac{1}{12}\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}p_i(L_i u_k)^2\,dx, \quad L_i u = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{p_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \quad i = 1,2. \tag{9}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\hat{\mu}_k - \lambda_k}{h^2} = \frac{1}{24}\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 p_i}{\partial x_i^2}\left(\frac{1}{p_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2 dx. \tag{10}$$

Для достатньо малого значення h з (9) і (10) випливають відповідно оцінки знизу та зверху:

$$\mu_k < \lambda_k < \hat{\mu}_k,$$

які є точнішими, ніж оцінки (6). Для оцінки зверху накладаємо умову

$$\frac{\partial^2 p_i}{\partial x_i^2} > 0, \quad x \in \Omega, \quad i = 1,2.$$

Мінімакс сіткового аналога (7) визначає

$$\mu_{k_1 k_2}^{-} \le \mu_{k_1 k_2} \le \mu_{k_1 k_2}^{+},$$

де

$$\mu_{k_1 k_2}^{-} = \frac{1}{c_2^h}\mu_{k_1 k_2}^{0}, \quad \mu_{k_1 k_2}^{+} = \frac{1}{c_1^h}\mu_{k_1 k_2}^{0},$$

$$\mu_{k_1 k_2}^{0} = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\pi k_i}{l_i}\frac{\sin\psi_{k_i}}{\psi_{k_i}}\right), \quad \psi_{k_i} = \frac{\pi k_i h}{2 l_i}, \quad k_i = 1,2,\ldots,\frac{l_i}{h} - 1.$$

3. У роботі [12] досліджено МСР спектральної задачі для оператора з мішаною похідною:

$$\Delta u + 2\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \lambda u = 0, \quad x \in \Omega, \quad |\alpha| < 1, \tag{11}$$

з природною крайовою умовою

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad x_1 = l_1 .$$

На трьох інших сторонах прямокутника $u = 0$. Задача (11) еквівалентна мінімаксу функціонала

$$\Phi(u) = \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx, \quad \int_\Omega u^2 dx = 1.$$

Вочевидь, що

$$(1 - |\alpha|)\, \Phi^0(u) \le \Phi(u) \le (1 + |\alpha|)\, \Phi^0(u), \tag{12}$$

де

$$\Phi^0(u) = \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx. \tag{13}$$

Мінімакс функціонала (13) визначає в.ч. оператора Лапласа з природною крайовою умовою $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$, $x_1 = l_1$. Із (12) випливає оцінка

$$(1 - |\alpha|)\, \lambda^0_{k_1 k_2} \le \lambda_{k_1 k_2} \le (1 + |\alpha|)\, \lambda^0_{k_1 k_2}, \tag{14}$$

де $\lambda^0_{k_1 k_2} = \left[\frac{\pi (2k_1 + 1)}{2 l_1} \right]^2 + \left(\frac{\pi k_2}{l_2} \right)^2, \quad k_1 \in 0 \bigcup \mathbb{N}, \quad k_2 \in \mathbb{N}.$

Різницевий аналог на прямокутній сітці з кроками h_1 і h_2 має вигляд

$$\begin{gathered} y_{\bar{t}_1 t_1} + y_{\bar{t}_2 t_2} + 2\alpha y_{\overset{\circ}{t}_1 \overset{\circ}{t}_2} + \mu y = 0, \quad t \in \omega, \\ -\frac{2}{h_1} y_{\bar{t}_1} + 2\alpha y_{\bar{t}_1 \overset{\circ}{t}_2} + y_{\bar{t}_2 t_2} + \mu y = 0, \quad t \in \gamma^+, \\ y = 0, \quad t \in \gamma \setminus \gamma^+ . \end{gathered} \tag{15}$$

Мінімакс сіткового аналога (15) визнчає

$$\mu^-_{k_1 k_2} \le \mu_{k_1 k_2} \le \mu^+_{k_1 k_2},$$

де

$$\mu^-_{k_1 k_2} = (1 - |\alpha|)\, \mu^0_{k_1 k_2}, \quad \mu^+_{k_1 k_2} = (1 + |\alpha|)\, \mu^0_{k_1 k_2} .$$

$$\mu^0_{k_1 k_2} = \left[\frac{\pi (2k_1 + 1)}{2 l_1} \frac{\sin \psi_{k_1}}{\psi_{k_1}} \right]^2 + \left(\frac{\pi k_2}{l_2} \frac{\sin \psi_{k_2}}{\psi_{k_2}} \right)^2, \quad k_1 = 0, 1, \ldots, \frac{l_1}{h_1} - 1,$$

$$k_2 = 1, 2, \ldots, \frac{l_2}{h_2} - 1, \quad \psi_{k_1} = \frac{\pi (2k_1 + 1) h_1}{4 l_1}, \quad \psi_{k_2} = \frac{\pi k_2 h_2}{2 l_2}.$$

Тут $\mu^0_{k_1 k_2}$ — в.ч. такої сіткової задачі [12]:

$$y_{\bar t_1 t_1} + y_{\bar t_2 t_2} + \mu^0 y = 0, \quad t \in \omega,$$

$$-\frac{2}{h_1} y_{\bar t_1} + y_{\bar t_2 t_2} + \mu^0 y = 0, \ t \in \gamma^+,$$

$$y = 0, \quad t \in \gamma \setminus \gamma^+.$$

Для збуреного різницевого аналога на квадратній сітці з кроком h

$$y_{\bar t_1 t_1} + y_{\bar t_2 t_2} + 2\alpha y_{\overset{\circ}{t}_1 \overset{\circ}{t}_2} + \frac{h_2}{6}(1+2\alpha^2) y_{\bar t_1 t_1 \bar t_2 t_2} + \tilde\mu y = 0, \quad t \in \omega,$$

$$-\frac{2}{h}\left[y + \frac{h_2}{6}(1+2\alpha^2) y_{\bar t_2 t_2} \right]_{\bar t_1} + y_{\bar t_2 t_2} + \tilde\mu y = 0, \quad t \in \gamma^+,$$

$$y = 0, \quad t \in \gamma \setminus \gamma^+.$$

У роботі [12] одержано формулу

$$\lim_{h \to 0} \frac{\lambda_k - \tilde\mu_k}{h^2} = \frac{\lambda_k^2}{12} = \lim_{h \to 0} \frac{\tilde\mu_k^2}{12},$$

з якої для достатньо малого значення h випливають точніші, ніж (14), двосторонні оцінки для в.ч. задачі (11):

$$\tilde\mu_k < \lambda_k < \tilde\mu_k + \frac{h^2}{12} \tilde\mu_k^2.$$

Двосторонні оцінки в.ч. сіткової задачі (15) узгоджені з оцінками (14), оскільки $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin\psi}{\psi} = 1.$

4. У роботі [8] досліджено МСР для спектральної задачі з оператором лінійної теорії пружності:

$$\alpha \Delta \vec u + (\beta + \alpha) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec u + \lambda \vec u = 0, \quad x(_1, x_2, x_3) \in \Omega,$$

$$\vec u = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{16}$$

Тут $u = (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})$, Ω — тривимірний паралелепіпед з гранями Γ і довжинами ребер l_i, $i = 1,2,3$. Задача (16) еквівалентна мінімаксу функціонала

$$\Phi(\vec u) = \int_\Omega \left[\alpha \sum_{i=1}^{3} |\operatorname{grad} u^{(i)}|^2 + (\beta + \alpha)(\operatorname{div} \vec u)^2 \right] dx, \quad \int_\Omega |\vec u|^2 \, dx = 1. \tag{17}$$

Інтегруючи частинами з урахуванням крайової умови, дістанемо

$$\int_\Omega \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x_i} \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x_j} dx = \int_\Omega \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x_j} \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x_i} dx, \ i, j = 1,2,3. \tag{18}$$

Використовуючи (18) та очевидну нерівність $2ab \le a^2 + b^2$, виводимо нерівність

$$\int_\Omega (\operatorname{div} \vec u)^2 dx \le \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} |\operatorname{grad} u^{(i)}|^2 \, dx.$$

Отже, для функціонала (17) маємо оцінку

$$\alpha \Phi^0(\vec u) \le \Phi(\vec u) \le (\beta + 2\alpha) \Phi^0(\vec u), \tag{19}$$

де

$$\Phi^0(\vec{u}) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} |\operatorname{grad} u^{(i)}|^2 \, dx \,. \tag{20}$$

Мінімакс функціонала (20) є еквівалентним до задачі для системи незалежних рівнянь з оператором Лапласа:

$$\Delta u^{(i)} + \lambda^0 u^{(i)} = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u^{(i)} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad i = 1,2,3.$$

Тут $\lambda^0_{k_1 k_2 k_3} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\pi k_i}{l_i} \right)^2$, $k_i \in \mathbb{N}$. Отже, з (19) випливає явна оцінка для в.ч. задачі (16) :

$$\alpha \lambda_k^0 \le \lambda_k \le (\beta + 2\alpha) \lambda_k^0 .$$

Різницевий аналог (16) має вигляд

$$\alpha \Delta^h y^{(i)} + \frac{1}{2} (\alpha + \beta) [(d^- Y)_{t_i} (d^+ Y)_{\bar{t}_i}] + \mu y^{(i)} = 0, \quad t = (t_1, t_2, t_3) \in \omega,$$

$$y^{(i)} = 0, \quad t \in \gamma, \quad i = 1,2,3. \tag{21}$$

Тут ω — вузли сітки всередині Ω, γ — вузли сітки на Γ,

$$\Delta^h y^{(i)} = y^{(i)}_{\bar{t}_1 t_1} + y^{(i)}_{\bar{t}_2 t_2} + y^{(i)}_{\bar{t}_3 t_3} ,$$

$$d^- Y = y^{(1)}_{\bar{t}_1} + y^{(2)}_{\bar{t}_2} + y^{(3)}_{\bar{t}_3}, \quad d^+ Y = y^{(1)}_{t_1} + y^{(2)}_{t_2} + y^{(3)}_{t_3} .$$

Мінімакс сіткового аналога (21) визначає

$$\mu_k^- \le \mu_k \le \mu_k^+ ,$$

$$\mu_k^- = \alpha \mu_k^0, \quad \mu_k^+ = (\beta + 2\alpha) \mu_k^0, \quad \mu_k^0 = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\pi k_j}{l_j} \frac{\sin \psi_{k_j}}{\psi_{k_j}} \right)^2 ,$$

$$\psi_{k_j} = \frac{\pi k_j h_j}{2 l_j}, \quad k_j = 1, 2, \ldots, \frac{l_j}{h_j} - 1, \quad j = 1,2,3.$$

Для сіткового аналога на кубічній сітці з кроком h

$$\alpha \Delta^h y^{(1)} + \frac{1}{2} (\alpha + \beta) [(d^- Y)_{t_1} + (d^+ Y)_{\bar{t}_1}] +$$

$$+ \frac{h^2}{6} y^{(1)}_{\bar{t}_2 t_2 \bar{t}_3 t_3} + \widetilde{\mu} \left(y^{(1)} - \frac{h^2}{6} \Delta^h y^{(1)} \right) = 0, \quad t \in \omega,$$

$$y^{(i)} = 0, \quad t \in \gamma,$$

де два інші рівняння записано за допомогою циклічної заміни верхніх та нижніх індексів за схемою $1 \to 2 \to 3 \to 1$, виконується формула

$$\lim_{h \to 0} \frac{\lambda_k - \widetilde{\mu}_k}{h^2} = \frac{1}{12} \int_\Omega \left\{ \alpha \sum_{i=2}^{3} [(u^{(i)}_{11})^2 + (u^{(i)}_{22})^2 + (u^{(i)}_{33})^2 + (\Delta u^{(i)})^2] + \right.$$

$$+ (\alpha + \beta) \left[2 \sum_{i=1}^{3} (u^{(i)}_{ii})^2 + (u^{(1)}_{12} + u^{(2)}_{12})^2 + (u^{(2)}_{23} + u^{(3)}_{23})^2 + (u^{(3)}_{31} + u^{(1)}_{31})^2 + \right.$$

$$\left. \left. + (u^{(1)}_{23} + u^{(2)}_{13})^2 + (u^{(2)}_{31} + u^{(3)}_{21})^2 + (u^{(3)}_{12} + u^{(1)}_{32})^2 \right] \right\} dx. \tag{22}$$

Тут нижні індекси позначають похідні за відповідними змінними, наприклад $u_{23}^{(1)} = \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_2 \partial x_3}$. Циклічна заміна верхніх та нижніх індексів підтверджує рівноправність змінних x_1, x_2, x_3 в усіх формулах. Для достатньо малого значення h з (22) випливає $\tilde{\mu}_k < \lambda_k$. Усі вирази під знаком інтеграла є власною функцією, що відповідає λ_k.

5. У роботах [2, 6, 15, 16, 19, 10] досліджено МКР стосовно задачі

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 M_3}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2} = \lambda u, \quad x \in \Omega, \tag{23}$$

у випадку різноманітних крайових умов на межі Γ прямокутника Ω. Тут

$$M_1 = p_1 w_1 + p_0 w_2, \quad M_2 = p_0 w_1 + p_2 w_2, \quad M_3 = p_3 w_3,$$

$$w_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \quad w_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad w_3 = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad p_i(x_1, x_2) \in C^{(2)}(\Omega), \quad i = 0,1,2,3,$$

$$0 < c_1 \le p_i \le c_2, \quad i = 1,2,3; \quad 0 < c_0 \le p_1 p_2 - p_0^2.$$

Задача (23) еквівалентна мінімаксу функціонала

$$\Phi(u) = \int_\Omega (p_1 w_1^2 + 2p_0 w_1 w_2 + p_2 w_2^2 + 2p_3 w_3^2) dx, \quad \int_\Omega u^2 dx = 1.$$

Використовуючи нерівність

$$\theta_1 (w_1^2 + w_2^2) \le p_1 w_1^2 + 2p_0 w_1 w_2 + p_2 w_2^2 \le \theta_2 (w_1^2 + w_2^2),$$

де $\theta_1 = c_2 - \sqrt{c_2^2 - c_0}$, $\theta_2 = c_2 + \sqrt{c_2^2 - c_0}$, та співвідношення $\int_\Omega w_3^2 dx = = \int_\Omega w_1 w_2 dx$, одержане інтегруванням частинами з урахуванням крайових умов, дістанемо оцінку

$$\theta_1^* \Phi^*(u) \le \Phi(u) \le 2\theta_2 \Phi^0(u),$$

$$\theta_1^* = \min\{c_1, \theta_1\}, \quad \Phi^*(u) = \int_\Omega (w_1 + w_2)^2 dx, \quad \Phi^0(u) = \int_\Omega (w_1^2 + w_2^2) dx. \tag{24}$$

Якщо на межі Γ задано умову

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \tag{25}$$

то мінімакс $\Phi^*(u)$ еквівалентний задачі з бігармонічним оператором:

$$\Delta^2 u = \lambda^* u,$$

а мінімакс $\Phi^0(u)$ еквівалентний задачі з оператором, що дає змогу відокремлення змінних:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = \lambda^0 u. \tag{26}$$

Отже, з (24) отримуємо оцінку в.ч. задачі (23):

$$\theta_1^* \lambda_k^* \le \lambda_k \le 2\theta_2 \lambda_k^0. \tag{27}$$

Мінімакс $\Phi^*(u)$ за умов $u = \Delta u = 0$ на Γ визначає квадрати в.ч. оператора Лапласа, оскільки клас допустимих функцій порівняння є ширшим за клас з умовами (25). Тому

$$\left[\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\pi k_i}{l_i}\right)^2\right]^2 \le \lambda^*_{k_1k_2}, \quad k_i \in \mathbb{N}. \tag{28}$$

Відокремлення змінних в (26) визначає

$$\lambda^0_{k_1k_2} = \lambda_{k_1} + \lambda_{k_2}, \tag{29}$$

де λ_{k_i} — в.ч. одновимірних задач

$$\frac{d^4u^{(i)}}{dx_i^4} = \lambda^{(i)}u^{(i)}, \; x_i \in (0, l_i),$$

$$u^{(i)} = \frac{du^{(i)}}{dx_i} = 0, \quad x_i = 0, \quad x_i = l_i; \quad i = 1,2. \tag{30}$$

Власні функції та в.ч. задачі (30) мають вигляд

$$u_{k_i}(x_i) = (\cos(\phi_{k_i}l_i) - \operatorname{ch}(\phi_{k_i}l_i))(\sin(\phi_{k_i}x_i) - \operatorname{sh}(\phi_{k_i}x_i)) +$$

$$+(\operatorname{sh}(\phi_{k_i}x_i) - \sin(\phi_{k_i}l_i))(\cos(\phi_{k_i}x_i) - \operatorname{ch}(\phi_{k_i}x_i)), \quad i = 1, 2, \quad \lambda_{k_i} = \phi^4_{k_i},$$

де ϕ_{k_i} — відомі [22, с. 468] корені рівняння $\cos(\phi l_i)\operatorname{ch}(\phi l_i) = 1$.

Отже, з (27) внаслідок (28) і (29) дістанемо

$$\theta_1^*\left[\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\pi k_i}{l_i}\right)^2\right]^2 \le \lambda_k \le 2\theta_2(\phi^4_{k_1} + \phi^4_{k_2}), \quad k_i \in \mathbb{N}.$$

Різницевий аналог задачі (23), (25) на квадратній сітці з кроком h має вигляд

$$(M_1^h)_{\bar{t}_1t_1} + 2(M_3^h)_{t_1t_2} + (M_2^h)_{\bar{t}_2t_2} = \mu y, \quad t = (t_1, t_2) \in \omega, \tag{31}$$

$$y = y_{\overset{\circ}{t_1}}\cos(n, x_1) + y_{\overset{\circ}{t_2}}\cos(n, x_2) = 0, \quad t \in \gamma, \tag{32}$$

де

$$M_1^h = a_1 y_{\bar{t}_1t_1} + a_0 y_{\bar{t}_2t_2}, \quad M_2^h = a_0 y_{\bar{t}_1t_1} + a_2 y_{\bar{t}_2t_2}, \quad M_3^h = a_3 y_{\overline{t_1t_2}},$$

$$a_j = p_j(t_1, t_2), \quad j = 0,1,2; \quad a_3 = p_3(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2), \quad \tilde{t}_i = t_i - \frac{h}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Мінімакс задачі (31) визначає

$$\mu_k^- \le \mu_k \le \mu_k^+,$$

$$\mu^-_{k_1k_2} = \theta_1^*\left[\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\pi k_i}{l_i}\frac{\sin\psi_{k_i}}{\psi_{k_i}}\right)^2\right]^2, \quad \psi_{k_i} = \frac{\pi k_i h}{2l_i},$$

$$\mu^+_{k_1k_2} = 2\theta_2\sum_{i=1}^{2}\mu_{k_i}, \quad k_i = 1, 2, \ldots, \frac{l_i}{h} - 1.$$

Тут μ_{k_i} — в.ч. одновимірних сіткових задач

$$y_{\overline{t_i t_i} t_i t_i} = \mu^{(i)} y, \quad t_i \in (0, l_i),$$

$$y = y_{\overset{\circ}{t_1}} = 0, \quad t_i = 0, \quad t_i = l_i, \quad i = 1{,}2.$$

У праці [15] для сіткового аналога задачі з бігармонічним оператором та умовами (25) на межі доведено формулу

$$\lim_{h\to 0} \frac{\lambda_k - \mu_k}{h^2} = \frac{1}{6} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx, \qquad (33)$$

з якої для достатньо малого значення h випливає $\mu_k < \lambda_k$.

У роботах [16, 19] для задачі (31) з різноманітними крайовими умовами одержано формулу

$$\lim_{h\to 0} \frac{\lambda_k - \mu_k}{h^2} = \frac{1}{6} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial w_1}{\partial x_1} \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_3}{\partial x_1} \frac{\partial M_3}{\partial x_1} + \frac{\partial w_3}{\partial x_2} \frac{\partial M_3}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} \frac{\partial M_2}{\partial x_2} \right] dx. \quad (34)$$

Усі вирази під знаком інтеграла в (33) і (34) є власною функцією, що відповідає в.ч. λ_k.

Формули (33) і (34) доведено незалежно. Однак (33) випливає з (34) за умови

$$p_1 = p_2 = 1, \quad p_0 = \sigma, \quad p_3 = 1 - \sigma, \quad 0 < \sigma < 1,$$

внаслідок співвідношень

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \frac{\partial w_2}{\partial x_1} dx = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w_3}{\partial x_1} \right)^2 dx, \quad \int_{\Omega} \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \frac{\partial w_2}{\partial x_2} dx = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w_3}{\partial x_2} \right)^2 dx,$$

які отримано за допомогою інтегрування частинами з урахуванням умов (25).

Для збуреної схеми за умови (32)

$$(\widetilde{M}_1^h)_{\bar{t}_1 t_1} + 2(\widetilde{M}_3^h)_{t_1 t_2} + (\widetilde{M}_2^h)_{t_2 t_2} = \widetilde{\mu} y, \quad t \in \omega,$$

$$\widetilde{M}_1^h = \widetilde{a}_1 y_{\bar{t}_1 t_1} + \widetilde{a}_0 y_{\bar{t}_2 t_2}, \quad \widetilde{M}_2^h = \widetilde{a}_0 y_{\bar{t}_1 t_1} + \widetilde{a}_2 y_{\bar{t}_2 t_2}, \quad \widetilde{M}_3^h = \widetilde{a}_3 y_{\overline{t_1 t_2}},$$

$$\widetilde{a}_1 = a_1 + \frac{h^2}{12} [(p_0)_{\bar{t}_2 t_2} - (p_1)_{\bar{t}_1 t_1}], \quad \widetilde{a}_2 = a_2 + \frac{h^2}{12} [(p_0)_{\bar{t}_1 t_1} - (p_2)_{\bar{t}_2 t_2}],$$

$$\widetilde{a}_3 = a_3 - \frac{h^2}{12} [(p_3)_{\bar{t}_1 t_1} + (p_1)_{\bar{t}_2 t_2}], \quad \widetilde{a}_0 = a_0 - \frac{h^2}{12} [(p_0)_{\bar{t}_1 t_1} + (p_0)_{\bar{t}_2 t_2}],$$

в [16] одержано формулу

$$\lim_{h\to 0} \frac{\lambda_k - \widetilde{\mu}_k}{h^2} = \frac{1}{6} \int_{\Omega} \left\{ p_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} \right)^2 + p_2 \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_1} \right)^2 + (p_3 - p_0) \left[\left(\frac{\partial w_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \right.$$

$$\left. + 2 p_0 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} \frac{\partial w_3}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} \frac{\partial w_3}{\partial x_1} \right) \right\} dx. \qquad (35)$$

Якщо $p_1 > p_0$, $p_2 > p_0$, $p_3 > 2 p_0$, то квадратична форма під знаком інтеграла є додатно визначеною, а отже, для достатньо малого h виконується нерівність $\widetilde{\mu}_k < \lambda_k$. Ця оцінка знизу є точнішою, ніж оцінка в (27).

Із співвідношень

$$\int_\Omega \frac{\partial w_1}{\partial x_1}\frac{\partial w_3}{\partial x_2}\,dx=\int_\Omega\left(\frac{\partial w_3}{\partial x_1}\right)^2 dx,\ \int_\Omega \frac{\partial w_2}{\partial x_2}\frac{\partial w_3}{\partial x_2}\,dx=\int_\Omega\left(\frac{\partial w_3}{\partial x_2}\right)^2 dx$$

з (35) так само, як із (34), випливає формула (33).

6. Як приклад, застосування оцінок зверху і знизу в.ч. для сіткових аналогів додатно визначених еліптичних операторів, одержують двосторонні оцінки похибки фазової швидкості хвиль у задачах коливання різноманітних об'єктів. Розглянемо рівняння коливань

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+LT=0,\quad u=u(x,t),\quad x\in\Omega,\quad t>0, \tag{36}$$

із заданими початковими та крайовими умовами. Тут L — еліптичні оператори, розглянуті вище, Ω — обмежена область у просторі двох або трьох змінних. Розв'язок рівняння подамо у вигляді

$$T=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)e^{i\omega_k t}, \tag{37}$$

де $u_k(x)$ — власна функція номера k оператора L, тобто

$$Lu_k=\lambda_k u_k,\quad \lambda_k>0,$$

з однорідними крайовими умовами на межі Γ області Ω.

Підставляючи (37) в (36), дістаємо

$$\sum_{k=1}^{\infty}(i^2\omega_k^2 u_k e^{i\omega_k t}+\lambda_k u_k e^{i\omega_k t})=0.$$

Тоді $\lambda_k=\omega_k^2$. Формула фазової швидкості хвилі $u_k(x)e^{i\omega_k t}$ має вигляд

$$\upsilon_k=\frac{\omega_k}{\sqrt{\lambda_k}}=1.$$

Запишемо різницевий аналог (36) на сітці зі сталими кроками τ і h:

$$T^h_{\bar{t}t}+\Lambda T^h=0, \tag{38}$$

де Λ — сітковий аналог оператора L, $T^h_{\bar{t}t}=\dfrac{T^h_{n+1}-2T^h_n+T^h_{n-1}}{\tau^2}$.

Розв'язок рівняння (38) подамо у вигляді

$$T^h=\sum_{k=1}^{N}y_k(x_i)q_k^{n\tau}, \tag{39}$$

де y_k — власна функція оператора Λ, тобто $\Lambda y_k=\mu_k y_k$, $\mu_k>0$. Підставляючи (39) в (38), дістаємо

$$\sum_{k=1}^{N}\left(y_k\frac{q_k^{(n+1)\tau}-2q_k^{n\tau}+q_k^{(n-1)\tau}}{\tau^2}+\mu_k y_k q_k^{n\tau}\right)=0.$$

Звідси

$$q_k^{2\tau}-2\left(1-\frac{\mu_k\tau^2}{2}\right)q_k^{\tau}+1=0. \tag{40}$$

Рівняння (40) має такі корені:

$$(q_k^\tau)^\pm = 1 - \frac{\mu_k \tau^2}{2} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\mu_k \tau^2}{2}\right)^2 - 1}.$$

Накладемо умову стійкості розв'язку рівняння (38) за початковими даними:

$$|q_k^\tau| \le 1 \text{ або } \left|1 - \frac{\mu_k \tau^2}{2}\right| \le 1.$$

Позначимо

$$1 - \frac{\mu_k \tau^2}{2} = \cos\varphi_k = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi_k}{2}.$$

Отже,

$$\varphi_k = 2\arcsin\frac{\tau\sqrt{\mu_k}}{2},$$

$$(q_k^\tau)^\pm = \cos\varphi_k \pm i\sin\varphi_k = e^{\pm i\varphi_k}, \quad (q_k^{n\tau})^\pm = (\cos\varphi_k \pm i\sin\varphi_k)^n = e^{\pm i\frac{\varphi_k}{\tau}n\tau}.$$

Тут $\dfrac{\varphi_k}{\tau}$ — сітковий аналог частоти ω_k. Фазова швидкість сіткової хвилі номера k має вигляд

$$v_{k,\tau} = \frac{\varphi_k}{\tau\sqrt{\mu_k}} = \frac{\arcsin\xi_k}{\xi_k}, \quad \xi_k = \frac{\tau\sqrt{\mu_k}}{2}.$$

За формулою Тейлора маємо

$$v_{k,\tau} = 1 + \frac{\xi_k^2}{6} + \frac{3}{40}\xi_k^4 + \ldots$$

Похибка фазових швидкостей

$$\delta_k = v_{k,\tau} - v_k = \frac{\arcsin\xi_k}{\xi_k} - 1.$$

Оскільки в усіх розглянутих задачах одержано оцінки μ_k^- и μ_k^+ для в.ч. сіткових аналогів, то для похибки δ_k справджуються нерівності

$$\frac{\arcsin\xi_k^-}{\xi_k^-} - 1 \le \delta_k \le \frac{\arcsin\xi_k^+}{\xi_k^+} - 1, \quad \xi_k^- = \frac{\tau\sqrt{\mu_k^-}}{2}, \quad \xi_k^+ = \frac{\tau\sqrt{\mu_k^+}}{2}.$$

Отримані результати дають змогу оцінити частоти та фазові швидкості хвиль для дискретизації завдань коливання різних явищ фізики, механіки, хімії у математичному формулюванні.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Приказчиков В.Г. Разностная задача на собственные значения для эллиптического оператора. *Журн. вычислительной математики и математической физики.* 1965. Т. 5, № 4. С. 648–657.
2. Приказчиков В.Г. Разностная задача на собственные значения для эллиптического оператора 4-го порядка. *Журн. вычислительной математики и математической физики.* 1977. Т. 17, № 6. С. 1432–1442.
3. Приказчиков В.Г. Консервативная разностная схема для задачи на собственные значения в области с гладкой границей. *Дифференциальные уравнения.* 1980. Т. 16, № 7. С. 1303–1307.
4. Приказчиков В.Г. Разностная задача на собственные значения для эллиптического оператора 2-го порядка со смешанными краевыми условиями. *Журн. вычислительной математики и математической физики.* 1982. Т. 22, № 3. С. 655–662.

5. Макаров В.Л., Приказчиков В.Г. О точности метода сеток в задачах на собственные значения. *Дифференциальные уравнения.* 1982. Т. 18, № 7. С. 1240–1244.
6. Приказчиков В.Г., Химич А.Н. Разностная задача на собственные значения для эллиптического оператора 4-го порядка со смешанными краевыми условиями. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 1985. Т. 25, № 10. С. 1486–1494.
7. Приказчиков В.Г., Семчук А.Р. Точность разностной схемы для спектральной задачи с разрывными коэффициентами. *Дифференциальные уравнения*. 1988. Т. 24, № 7. С. 1244–1249.
8. Приказчиков В.Г. Точность дискретного аналога спектральной задачи для оператора линейной теории упругости. *Дифференциальные уравнения.* 1999. Т. 35, № 2. С. 1–7.
9. Майко Н.В., Рябичев В.Л., Приказчиков В.Г. Точность разностной схемы решения задачи на собственные значения для оператора Лапласа. *Кибернетика и системный анализ.* 2011. Т. 47, № 5. С. 183–190.
10. Приказчиков В.Г. Оценка собственных чисел разностной задачи для пластины. *Прикладная механика*. 1973. Т. 9, № 3, С. 90–95.
11. Приказчиков В.Г. Двусторонняя аппроксимация собственных чисел некоторых эллиптических операторов. *Дифференциальные уравнения.* 2004. Т. 40, № 7. С. 1–5.
12. Приказчиков В.Г. Двусторонняя аппроксимация собственных чисел эллиптического оператора. *Дифференциальные уравнения*. 2003. Т. 39, № 7. С. 1–8.
13. Приказчиков В.Г., Майко Н.В. Точность разностной аппроксимации задачи на собственные значения. *Кибернетика и системный анализ.* 2003. Т. 39, № 3. С. 159–168.
14. Химич А.Н. О сходимости разностного метода в задаче на собственные значения. *Оптимизация вычислений и численный анализ*. Киев: ИК АН УССР, 1980. С. 60–65.
15. Приказчиков В.Г. Асимптотическая оценка точности дискретной спектральной задачи для уравнения 4-го порядка. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 1991. Т. 3, № 3. С. 26–32.
16. Приказчиков В.Г. Главное слагаемое в разложении собственных значений дискретного аналога эллиптического оператора 4-го порядка. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 1992. Т. 32, № 7. С. 1016–1024.
17. Приказчиков В.Г. Главное слагаемое в разложении погрешности собственных значений дискретного аналога эллиптического оператора 2-го порядка. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1992. Т. 32, № 10. С. 1671–1676.
18. Приказчиков В.Г., Майко Н.В. Предельная характеристика погрешности дискретной спектральной проблемы. *Кибернетика и системный анализ.* 2016. Т. 52, № 3. С. 134–140.
19. Приказчиков В.Г., Химич А.Н. Асимптотическая оценка точности собственных чисел эллиптического оператора 4-го порядка со смешанными краевыми условиями. *Кибернетика и системный анализ.* 2017. Т. 53, № 3. С. 90–95.
20. Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях. Москва: Мир, 1970. 328 с.
21. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. Москва: ИЛ, 1963. 488 с.
22. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. Москва: Наука, 1968. 504 с.

V. Prikazchikov

EFFICIENT TWO-SIDED ESTIMATES FOR THE SPECTRUM OF SOME ELLIPTIC OPERATORS

Abstract. Using the minimax principle, we establish the upper and lower bounds for the spectrum of some elliptic operators and their grid analogs. From the exact formulas for the error of the finite-difference method for the eigenvalues, more accurate estimates of the spectrum of differential operators follow. Two-sided estimates of the eigenvalues of differences analogs of spectral problems give a majorant and a minorant for the error of the phase velocities of grid waves in vibration problems of various objects.

Keywords: elliptic operators, minimax principle, finite-difference method, exact formulas for errors of eigenvalues, two-sided estimates of a spectrum, oscillation equations, errors of phase velocities of grid waves.

Надійшла до редакції 07.11.2021