УДК 519.21

Ю.В. ЖЕРНОВИЙ
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна,
e-mail: *yuriy.zhernovyy@lnu.edu.ua*.

МЕТОД ПОТЕНЦІАЛІВ ДЛЯ СИСТЕМ $M_n/G_n/1/r$ ТА $M_n/G_n/1/\infty$ З ТИПОВИМИ ЗАЛЕЖНОСТЯМИ ІНТЕНСИВНОСТІ ВХІДНОГО ПОТОКУ ВІД КІЛЬКОСТІ ЗАМОВЛЕНЬ

Анотація. Запропоновано застосування методу потенціалів для визначення стаціонарного розподілу кількості замовлень у системах обслуговування $M_n/G_n/1/r$ та $M_n/G_n/1/\infty$ з пороговими стратегіями функціонування. Розглянуто залежності інтенсивності вхідного потоку від кількості замовлень, що характерні як для замкнених систем (моделей теорії надійності), так і для систем обслуговування з випадковим розрідженням вхідного потоку. Стратегії керування інтенсивністю обслуговування побудовано за припущення, що інтенсивність може змінюватись у момент початку обслуговування замовлення. Отримано формули для перетворень Лапласа розподілу кількості замовлень у системі протягом періоду зайнятості та для обчислення його середньої тривалості.

Ключові слова: одноканальна система обслуговування, пуассонівський другого роду вхідний потік, залежність часу обслуговування від стану системи, метод потенціалів.

ВСТУП

Одержані за допомогою методу потенціалів [1–5] формули для обчислення стаціонарних імовірностей станів одноканальних систем обслуговування з пороговими стратегіями функціонування є зручними для практичних розрахунків. Вони дають змогу досліджувати системи типу $M_n/G_n/1/r$ з пуассонівським другого роду вхідним потоком [6], інтенсивність якого λ_n залежить від n — кількості замовлень у системі. Такі вхідні потоки характерні як для замкнених систем, що є моделями для визначення надійності відновлюваних систем [7], так і для систем з активним керуванням чергою випадковим розрідженням вхідного потоку [4, 8]. Метод потенціалів можна також застосувати для систем, в яких для зменшення довжини черги використовуються порогові стратегії керування інтенсивністю обслуговування, тобто час обслуговування залежить від кількості замовлень у системі [1–5]. Природною є стратегія, згідно з якою інтенсивність обслуговування збільшується зі зростанням кількості замовлень у системі. Для опису будь-якого варіанта залежності інтенсивності обслуговування від кількості замовлень достатньо ввести позначення: $F_n(x)$ — функція розподілу часу обслуговування одного замовлення, де n — кількість замовлень у системі в момент початку обслуговування замовлення ($n \in \{1, 2, \dots, r\}$), r — задане обмеження на довжину черги.

Нехай $\mathbf{P}_n$ — умовна ймовірність за умови, що в початковий момент часу в системі є n замовлень, $\eta(x)$ — кількість замовлень, які надійшли в систему за час $[0; x)$. Застосування методу потенціалів неможливе без виведення формул для ймовірностей $\mathbf{P}_n\{\eta(x) = j\}$, які є різними для різних варіантів залежностей інтенсивності вхідного потоку від кількості замовлень у системі.

У цій статті з'ясовуються особливості застосування методу потенціалів для визначення стаціонарних імовірностей станів систем обслуговування $M_n/G_n/1/r$ з пороговими стратегіями функціонування. Розглянемо найпоширеніші стратегії залежності інтенсивності вхідного потоку λ_n від кількості замовлень у системі:

1) усі інтенсивності λ_n різні для $n \in \{0, 1, \dots, r\}$;

2) $\lambda_n = \lambda$ для $n \in \{0, 1, \dots, h\}$; λ_n різні для $n \in \{h+1, h+2, \dots, r\}$, де h — задане порогове значення;

3) λ_n різні для $n \in \{0, 1, \ldots, h\}$; $\lambda_n = \tilde{\lambda}$ для $n \in \{h+1, h+2, \ldots, r\}$;

4) $\lambda_n = \lambda$ для $n \in \{0, 1, \ldots, h\}$; $\lambda_n = \tilde{\lambda}$ для $n \in \{h+1, h+2, \ldots, r\}$.

Кожна зі стратегій 1–4 зміни інтенсивності вхідного потоку може бути застосована в моделях систем обслуговування, в яких здійснюється випадкове відхилення замовлень (розрідження вхідного потоку) для запобігання перевантажень у системі [4, 8]. Окремі випадки стратегій 1–3 реалізовано у замкнених системах — моделях для визначення надійності відновлюваних систем: стратегія 1 відповідає моделі системи без резервування з послідовним або паралельним з'єднанням елементів [7, 9, 10], стратегія 2 — моделі системи з резервуванням і послідовним з'єднанням елементів [7, 9, 10], стратегія 3 — моделі системи з резервуванням і паралельним з'єднанням елементів, в якій резервні елементи вмикаються по одному, коли всі основні вийдуть з ладу. У цій системі після ремонту елемент вмикається лише за умови, що він єдиний справний або кількість несправних елементів не більша за m (кількість основних елементів).

Припускатимемо, що функція розподілу часу обслуговування одного замовлення $F_n(x)$ може змінюватись лише в момент початку обслуговування замовлення. Формули методу потенціалів є універсальними і можуть бути використані для будь-яких стратегій керування інтенсивністю обслуговування, у тому числі для найпростішого випадку, коли інтенсивність обслуговування не залежить від кількості замовлень у системі, тобто $F_n(x) = F(x)$ для $n \in \{1, 2, \ldots, r+1\}$.

Для системи $M_n / G_n / 1 / \infty$ без обмежень на довжину черги припускатимемо, що $F_n(x) = \tilde{F}(x)$ для $n \ge \tilde{h}$, і розглядатимемо такі залежності інтенсивності вхідного потоку λ_n від кількості замовлень у системі:

5) λ_n різні для $n \in \{0, 1, \ldots, h\}$; $\lambda_n = \tilde{\lambda}$ для $n \ge h+1$;

6) $\lambda_n = \lambda$ для $n \in \{0, 1, \ldots, h\}$; $\lambda_n = \tilde{\lambda}$ для $n \ge h+1$;

7) λ_n різні для $n \ge 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$;

8) $\lambda_n = \lambda$ для $n \in \{0, 1, \ldots, h\}$; λ_n різні для $n \ge h+1$, $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$.

ХАРАКТЕРИСТИКИ БАЗОВИХ ВИПАДКОВИХ БЛУКАНЬ

Для $n \in \{1, 2, \ldots, r+1\}$ покладемо:

$$f_n(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF_n(x), \ M_n = \int_0^\infty x dF_n(x) < \infty, \ \overline{F}_n(x) = 1 - F_n(x).$$

Для Re $s \ge 0$ і $n \in \{1, 2, \ldots, r+1\}$ розглянемо послідовності $\pi_{ni}(s)$ і $q_{ni}(s)$, які визначаються за допомогою співвідношень:

$$\pi_{ni}(s) = \frac{1}{f_n(s)} \int_0^\infty e^{-sx} \mathbf{P}_n\{\eta(x) = i+1\} dF_n(x), \ i \in \{-1, 0, 1, \ldots, r-n\};$$

$$q_{ni}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \mathbf{P}_n\{\eta(x) = i\} \overline{F}_n(x) dx, \ i \in \{0, 1, 2, \ldots, r+1-n\}.$$

Послідовність $\pi_{ni}(s)$ для $s > 0$ і фіксованого n можна тлумачити як розподіл стрибків деякого напівнеперервного знизу випадкового блукання S_n (його називатимемо базовим), яке відповідає функції розподілу $F_n(x)$ і ймовірностям $\mathbf{P}_n\{\eta(x) = i+1\}$. Функція $R_n(s) = \dfrac{1}{f_n(s)\pi_{n,-1}(s)}$ $(n \in \{1, 2, \ldots, r+1\})$ називається резольвентою, а стала $R_n = \lim\limits_{s \to +0} R_n(s)$ — потенціалом випадкового блукання S_n.

Нехай T_n — випадкова величина, розподілена показниково з параметром λ_n, T — випадкова величина, розподілена показниково з параметром λ, $\widetilde{T}$ — випадкова величина, розподілена показниково з параметром $\widetilde{\lambda}$. Після обчислення функцій розподілів скінченних сум незалежних випадкових величин отримаємо:

— для стратегії 1

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=0\}=\mathbf{P}\{T_n>x\}=e^{-\lambda_n x}, \quad n\in\{1,2,\ldots,r\};$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=j\}=\mathbf{P}\left\{\sum_{i=n}^{n+j-1}T_i<x<\sum_{i=n}^{n+j}T_i\right\}=\mathbf{P}\left\{\sum_{i=n}^{n+j}T_i>x\right\}-\mathbf{P}\left\{\sum_{i=n}^{n+j-1}T_i>x\right\}=$$

$$=(-1)^j\prod_{k=n}^{n+j-1}\lambda_k\sum_{i=n}^{n+j}\frac{e^{-\lambda_i x}}{\prod\limits_{\substack{s=n\\ s\neq i}}^{n+j}(\lambda_i-\lambda_s)}, \quad n\in\{1,2,\ldots,r-1\},\ j\in\{1,2,\ldots,r-n\};$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)\geq r+1-n\}=\mathbf{P}\left\{\sum_{i=n}^{r}T_i<x\right\}=(-1)^{r-n}\prod_{k=n}^{h}\lambda_k\sum_{i=n}^{r}\frac{1-e^{-\lambda_i x}}{\lambda_i\prod\limits_{\substack{s=n\\ s\neq i}}^{r}(\lambda_i-\lambda_s)},$$

$$n\in\{1,2,\ldots,r-1\};$$

$$\mathbf{P}_r\{\eta(x)=1\}=\mathbf{P}\{T_r<x\}=1-e^{-\lambda_r x};$$

— для стратегії 2

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=0\}=\mathbf{P}\{T>x\}=e^{-\lambda x}, \quad n\in\{1,2,\ldots,h\};$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=0\}=\mathbf{P}\{T_n>x\}=e^{-\lambda_n x}, \quad n\in\{h+1,h+2,\ldots,r\};$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=j\}=\mathbf{P}\left\{\sum_{i=n}^{n+j-1}T_i<x<\sum_{i=n}^{n+j}T_i\right\}=\mathbf{P}\left\{\sum_{i=n}^{n+j}T_i>x\right\}-\mathbf{P}\left\{\sum_{i=n}^{n+j-1}T_i>x\right\}=$$

$$=(-1)^j\prod_{k=n}^{n+j-1}\lambda_k\sum_{i=n}^{n+j}\frac{e^{-\lambda_i x}}{\prod\limits_{\substack{s=n\\ s\neq i}}^{n+j}(\lambda_i-\lambda_s)}, \quad n\in\{h+1,\ldots,r-1\},\ j\in\{1,2,\ldots,r-n\};$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)\geq r+1-n\}=\mathbf{P}\left\{\sum_{i=n}^{r}T_i<x\right\}=(-1)^{r-n}\prod_{k=n}^{r}\lambda_k\sum_{i=n}^{r}\frac{1-e^{-\lambda_i x}}{\lambda_i\prod\limits_{\substack{s=n\\ s\neq i}}^{r}(\lambda_i-\lambda_s)},$$

$$n\in\{h+1,\ldots,r\};$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=j\}=\mathbf{P}\{jT<x<(j+1)T\}=\frac{(\lambda x)^j}{j!}e^{-\lambda x},\ n\in\{1,2,\ldots,h-1\},$$
$$j\in\{1,2,\ldots,h-n\};$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=h+1-n\}=\mathbf{P}\{(h+1-n)T+T_{h+1}>x\}-\mathbf{P}\{(h+1-n)T>x\}=$$

$$=1-\sum_{i=0}^{h-n}\frac{(\lambda x)^i}{i!}e^{-\lambda x}+\lambda_{h+1}\left(\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{h+1}}\right)^{h+1-n}\left(\frac{1-e^{-\lambda x}}{\lambda}-\frac{1-e^{-\lambda_{h+1}x}}{\lambda_{h+1}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{h-n}(\lambda-\lambda_{h+1})^i\left(\frac{1}{\lambda^{i+1}}-e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{i}\frac{x^j}{j!\,\lambda^{i+1-j}}\right)\right),\ n\in\{1,2,\dots,n\};$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=j\}=\mathbf{P}\left\{(h+1-n)T+\sum_{i=h+1}^{n+j}T_i>x\right\}-\mathbf{P}\left\{(h+1-n)T+\sum_{i=h+1}^{n+j-1}T_i>x\right\}=$$

$$=(-1)^{n+j-h}(g_{n,n+j-1}(x)+g_{n,n+j}(x)),$$

$$g_{n,m}(x)=\prod_{i=h+1}^{m}\lambda_i\sum_{v=h+1}^{m}\left(\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_v}\right)^{h-n+1}\frac{1}{\prod\limits_{\substack{k=h+1\\k\neq v}}^{m}(\lambda_v-\lambda_k)}\left(\frac{1-e^{-\lambda_v x}}{\lambda_v}-\right.$$

$$\left.-\sum_{s=0}^{h-n}\frac{(\lambda-\lambda_v)^s}{\lambda^{s+1}}\left(1-e^{-\lambda x}\sum_{u=0}^{s}\frac{(\lambda x)^u}{u!}\right)\right),\ n\in\{1,2,\dots,h\},$$

$$j\in\{h-n+2,h-n+3,\dots,r-n\};$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)\ge r+1-n\}=\mathbf{P}\left\{(h+1-n)T+\sum_{i=h+1}^{r}T_i<x\right\}=(-1)^{r-h+1}g_{n,r}(x),$$

$$n\in\{1,2,\dots,h\};$$

— для стратегії 3

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=0\}=\mathbf{P}\{T_n>x\}=e^{-\lambda_n x},\ n\in\{1,2,\dots,h\};$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=0\}=\mathbf{P}\{\widetilde{T}>x\}=e^{-\widetilde{\lambda}x},\quad n\in\{h+1,h+2,\dots,r\};$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=j\}=\mathbf{P}\{j\widetilde{T}<x<(j+1)\widetilde{T}\}=\frac{(\widetilde{\lambda}x)^j}{j!}e^{-\widetilde{\lambda}x},\ n\in\{h+1,\dots,r-1\},$$

$$j\in\{1,2,\dots,r-n\};$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)\ge r+1-n\}=\mathbf{P}\{(r+1-n)\widetilde{T}<x\}=1-\sum_{i=0}^{r-n}\frac{(\widetilde{\lambda}x)^i}{i!}e^{-\lambda x},\ n\in\{h+1,\dots,r\};$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=j\}=\mathbf{P}\left\{\sum_{i=n}^{n+j-1}T_i<x<\sum_{i=n}^{n+j}T_i\right\}=\mathbf{P}\left\{\sum_{i=n}^{n+j}T_i>x\right\}-\mathbf{P}\left\{\sum_{i=n}^{n+j-1}T_i>x\right\}=$$

$$=(-1)^j\prod_{k=n}^{n+j-1}\lambda_k\sum_{i=n}^{n+j}\frac{e^{-\lambda_i x}}{\prod\limits_{\substack{s=n\\s\neq i}}^{n+j}(\lambda_i-\lambda_s)},\ n\in\{1,2,\dots,h-1\},\ j\in\{1,2,\dots,h-n\};$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=h+1-n\}=\mathbf{P}\left\{\sum_{i=n}^{h}T_i+\widetilde{T}>x\right\}-\mathbf{P}\left\{\sum_{i=n}^{h}T_i>x\right\}=$$

$$=(-1)^{h-n}\prod_{k=n}^{h}\lambda_k\sum_{i=n}^{h}\frac{1-e^{-\lambda_i x}}{\lambda_i\prod\limits_{\substack{s=n\\ s\neq i}}^{h}(\lambda_i-\lambda_s)}+(-1)^{h-n}\widetilde{\lambda}\prod_{k=n}^{h}\lambda_k\left(\sum_{i=n}^{h}\frac{1-e^{-\lambda_i x}}{\lambda_i(\lambda_i-\widetilde{\lambda})\prod\limits_{\substack{s=n\\ s\neq i}}^{h}(\lambda_i-\lambda_s)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1-e^{-\widetilde{\lambda}x}}{\widetilde{\lambda}\prod\limits_{s=n}^{h}(\widetilde{\lambda}-\lambda_s)}\right),\ n\in\{1,2,\ldots,h\};$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=j\}=\mathbf{P}\left\{\sum_{i=n}^{h}T_i+(n+j-h)\widetilde{T}>x\right\}-\mathbf{P}\left\{\sum_{i=n}^{h}T_i+(n+j-h-1)\widetilde{T}>x\right\}=$$

$$=(-1)^{h-n}(G_{n,n+j-h-1}(x)-G_{n,n+j-h}(x)),\ n\in\{1,2,\ldots,h\},$$

$$j\in\{h-n+2,h-n+3,\ldots,r-n\};$$

$$G_{n,m}(x)=\prod_{i=n}^{h}\lambda_i\sum_{v=n}^{h}\left(\frac{\widetilde{\lambda}}{\widetilde{\lambda}-\lambda_v}\right)^m\frac{1}{\prod\limits_{\substack{k=n\\ k\neq v}}^{h}(\lambda_v-\lambda_k)}\left(\frac{1-e^{-\lambda_v x}}{\lambda_v}-\right.$$

$$\left.-\sum_{s=0}^{m-1}\frac{(\widetilde{\lambda}-\lambda_v)^s}{\lambda^{s+1}}\left(1-e^{-\lambda x}\sum_{u=0}^{s}\frac{(\widetilde{\lambda}x)^u}{u!}\right)\right);$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)\geq r+1-n\}=\mathbf{P}\left\{\sum_{i=n}^{h}T_i+(r-h)\widetilde{T}<x\right\}=(-1)^{h-n}G_{n,r-h}(x),$$
$$n\in\{1,2,\ldots,h\};$$

— для стратегії 4

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=0\}=\mathbf{P}\{T>x\}=e^{-\lambda x},\ n\in\{1,2,\ldots,h\};$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=0\}=\mathbf{P}\{\widetilde{T}>x\}=e^{-\widetilde{\lambda}x},\quad n\in\{h+1,h+2,\ldots,r\};$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=j\}=\mathbf{P}\{j\widetilde{T}<x<(j+1)\widetilde{T}\}=\frac{(\widetilde{\lambda}x)^j}{j!}e^{-\widetilde{\lambda}x},\ n\in\{h+1,\ldots,r-1\},$$
$$j\in\{1,2,\ldots,r-n\};$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)\geq r+1-n\}=\mathbf{P}\{(r+1-n)\widetilde{T}<x\}=1-\sum_{i=0}^{r-n}\frac{(\widetilde{\lambda}x)^i}{i!}e^{-\lambda x},\ n\in\{h+1,\ldots,r\};$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=j\}=\mathbf{P}\{jT<x<(j+1)T\}=\frac{(\lambda x)^j}{j!}e^{-\lambda x},\ n\in\{1,2,\ldots,h-1\},$$
$$j\in\{1,2,\ldots,h-n\};$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=h+1-n\}=\mathbf{P}\{(h+1-n)T+\widetilde{T}>x\}-\mathbf{P}\{(h+1-n)T>x\}=$$

$$=1-\sum_{i=0}^{h-n}\frac{(\lambda x)^i}{i!}e^{-\lambda x}+\tilde{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda-\tilde{\lambda}}\right)^{h+1-n}\left(\frac{1-e^{-\lambda x}}{\lambda}-\frac{1-e^{-\tilde{\lambda}x}}{\tilde{\lambda}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{h-n}(\lambda-\tilde{\lambda})^i\left(\frac{1}{\lambda^{i+1}}-e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{i}\frac{x^j}{j!\,\lambda^{i+1-j}}\right)\right),\ n\in\{1,2,\dots,h\};$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)=j\}=\mathbf{P}\{(h+1-n)T+(n+j-h)\tilde{T}>x\}-$$

$$-\mathbf{P}\{(h+1-n)T+(n+j-h-1)\tilde{T}>x\}=\alpha_{n,n+j-h-1}(x)-\alpha_{n,n+j-h}(x),$$

$$n\in\{1,2,\dots,h\},\ j\in\{h-n+2,h-n+3,\dots,r-n\};$$

$$\alpha_{n,m}(x)=\frac{\lambda^{h-n+1}\tilde{\lambda}^m}{(h-n)!(m-1)!(\tilde{\lambda}-\lambda)^{h-n+m}}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{h-1-n}(h-n+m-1-k)!\,C_{m-1}^k(\tilde{\lambda}-$$

$$-\lambda)^k\times\left(\sum_{i=0}^{h-n+m-1-k}\frac{(-1)^{i+1}(k+i)!(\tilde{\lambda}-\lambda)^i}{i!\,\lambda^{k+i+1}}\left(1-e^{-\lambda x}\sum_{s=0}^{k+i}\frac{(\lambda x)^s}{s!}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{k!}{\tilde{\lambda}^{k+1}}\left(1-e^{-\tilde{\lambda}x}\sum_{s=0}^{k}\frac{(\tilde{\lambda}x)^s}{s!}\right)\right);$$

$$\mathbf{P}_n\{\eta(x)\ge r+1-n\}=\mathbf{P}\{(h+1-n)T+(r-h)\tilde{T}<x\}=\alpha_{n,r-h}(x),\ n\in\{1,2,\dots,h\}.$$

Послідовності $\pi_{ni}=\lim_{s\to+0}\pi_{ni}(s)$, $q_{ni}=\lim_{s\to+0}q_{ni}(s)$ використовуватимемо для обчислення стаціонарного розподілу кількості замовлень у системі. Обчислюючи ці послідовності, необхідно враховувати, що

$$\lim_{s\to+0}f_n(s)=1,\qquad \lim_{s\to+0}\frac{1-f_n(s)}{s}=M_n,\quad n\in\{1,2,\dots,r+1\}.$$

РОЗПОДІЛ КІЛЬКОСТІ ЗАМОВЛЕНЬ У СИСТЕМІ З ОБМЕЖЕНОЮ ЧЕРГОЮ

Нехай $\xi(t)$ — кількість замовлень у системі в момент часу t і $\tau_r=\inf\{t\ge 0:\ \xi(t)=0\}$ позначає перший період зайнятості. Введемо позначення:

$$\varphi_n(t,k)=\mathbf{P}_n\{\xi(t)=k,\tau_r>t\},\ \Phi_n(s,k)=\int_0^\infty e^{-st}\varphi_n(t,k)dt,\ \mathrm{Re}\ s>0,$$
$$n,k\in\{1,2,\dots,r+1\}.$$

Вочевидь, що $\varphi_0(t,k)=0$. За допомогою формули повної ймовірності отримаємо рівності:

$$\varphi_n(t,k)=\sum_{j=0}^{r+1-n}\int_0^t\mathbf{P}_n\{\eta(x)=j\}\varphi_{n+j-1}(t-x,k)dF_n(x)+$$

$$+I\{n\le k\le r+1\}\mathbf{P}_n\{\eta(t)=k-n\}\bar{F}_n(t),\quad 1\le n\le r+1.$$

Тут $I\{A\}$ дорівнює 1 або 0 залежно від того, чи відбулась подія A.

Увівши позначення $f_{(n)}(s,k,r) = I\{n \le k \le r+1\}\, q_{n,k-n}(s)$, одержимо систему рівнянь для відшукання функцій $\Phi_n(s,k)$:

$$\Phi_n(s,k) = f_n(s) \sum_{j=0}^{r+1-n} \pi_{n,j-1}(s)\, \Phi_{n+j-1}(s,k) + f_{(n)}(s,k,r), \ 1 \le n \le r+1;$$

$$\Phi_0(s,k) = 0. \qquad (1)$$

Для розв'язання системи рівнянь (1) використовуватимемо функції $\mathcal{R}_{ni}(s)$, які визначимо за допомогою рекурентних співвідношень:

$$\mathcal{R}_{n1}(s) = R_{n+1}(s);$$

$$\mathcal{R}_{n,j+1}(s) = R_{n+1}(s)\left(\mathcal{R}_{n+1,j}(s) - f_{n+1}(s) \sum_{i=0}^{j-1} \pi_{n+1,i}(s) \mathcal{R}_{n+1+i,j-i}(s) \right),$$

$$0 \le n \le r, \ 1 \le j \le r-n. \qquad (2)$$

Якщо інтенсивність обслуговування стала (не залежить від кількості замовлень у системі), то

$$F_n(x) = F(x), \ \ f_n(s) = f(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x), \ 1 \le n \le r+1.$$

Сталі $\mathcal{R}_{ni} = \lim_{s \to +0} \mathcal{R}_{ni}(s)$ обчислюватимемо за допомогою рекурентних співвідношень, які випливають з (2):

$$\mathcal{R}_{n1} = R_{n+1}; \ \ \mathcal{R}_{n,j+1} = R_{n+1}\left(\mathcal{R}_{n+1,j} - \sum_{i=0}^{j-1} \pi_{n+1,i} \mathcal{R}_{n+1+i,j-i} \right), \ 0 \le n \le r-1,$$

$$1 \le j \le r-1-n.$$

Оскільки рівняння (1) мають таку саму структуру, як і одержані в [2, 7], то наведені далі твердження випливають безпосередньо з цих публікацій.

Теорема 1. Для всіх $k \in \{1, 2, \dots, r+1\}$ і $\operatorname{Re} s > 0$ функції $\Phi_n(s,k)$ визначаються формулами:

$$\Phi_n(s,k) = \mathcal{R}_{n,r+1-n}(s) \Phi_{r+1}(s,k) - \sum_{i=1}^{r+1-n} \mathcal{R}_{ni}(s) f_{(n+i)}(s,k,r), \ 1 \le n \le r;$$

$$\Phi_{r+1}(s,k) = \frac{1}{\mathcal{R}_{0,r+1}(s)} \sum_{i=1}^{r+1} \mathcal{R}_{0i}(s) f_{(i)}(s,k,r).$$

Теорема 2. Середня тривалість періоду зайнятості $\mathbf{E}(\tau_r)$ і стаціонарний розподіл кількості замовлень у системі $p_n = \lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\{\xi(t) = n\}$, $0 \le n \le r+1$, визначаються формулами:

$$\mathbf{E}(\tau_r) = \sum_{k=1}^{r} \mathcal{R}_{0k} M_k - \sum_{k=1}^{r-1} \mathcal{R}_{1k} M_{k+1}; \ \ p_0 = \frac{1}{1 + \lambda_0 \mathbf{E}(\tau_r)};$$

$$p_n = \lambda_0 p_0 \left(\mathcal{R}_{0n} q_{n0} + \sum_{k=1}^{n-1} (\mathcal{R}_{0k} q_{k,n-k} - \mathcal{R}_{1k} q_{k+1,n-k-1}) \right), \ 1 \le n \le r;$$

$$p_{r+1} = \lambda_0 p_0 \left(\mathcal{R}_{0r} q_{r1} + \sum_{k=1}^{r-1} (\mathcal{R}_{0k} q_{k,r+1-k} - \mathcal{R}_{1k} q_{k+1,r-k}) \right). \qquad (3)$$

Якщо інтенсивність обслуговування стала, то $M_n = M$ $(1 \le n \le r+1)$ і

$$\mathbf{E}(\tau_r) = M\left(\mathcal{R}_{0r} + \sum_{k=1}^{r-1}(\mathcal{R}_{0k} - \mathcal{R}_{1k})\right).$$

СИСТЕМА БЕЗ ОБМЕЖЕНЬ НА ДОВЖИНУ ЧЕРГИ

Формули для ймовірностей $\mathbf{P}_n\{\eta(x) = j\}$ для стратегій 5–8 отримаємо, використавши відповідні співвідношення для стратегій 3, 4, 1 і 2, якщо покладемо в них $r \to \infty$ і вилучимо ймовірності $\mathbf{P}_n\{\eta(x) \ge r+1-n\}$, що втрачають сенс.

Припустимо, що $F_n(x) = \widetilde{F}(x)$ для $n \ge \widetilde{h}$ і введемо позначення:

$$H = \max\{h, \widetilde{h}\}, \quad \widetilde{M} = \int_0^\infty x d\widetilde{F}(x), \quad \rho_n = \lambda_n M_n, \quad \widetilde{p} = \widetilde{\lambda}\widetilde{M}.$$

Спираючись на теореми 3.5–3.7 [1], можемо сформулювати таке твердження.

Теорема 3. Якщо $\widetilde{\rho} < 1$, то середня тривалість періоду зайнятості $\mathbf{E}(\tau_\infty)$ і стаціонарний розподіл кількості замовлень у системі $M_n / G_n / 1 / \infty$ з потоками замовлень, які відповідають стратегіям 5 і 6, визначаються формулами:

$$\mathbf{E}(\tau_\infty) = \sum_{k=1}^{H-1}\mathcal{R}_{0k}M_k - \sum_{k=1}^{H-2}\mathcal{R}_{1k}M_{k+1} +$$

$$+\frac{\widetilde{M}}{1-\widetilde{\rho}}\left(1 + \mathcal{R}_{01}(\widetilde{\rho} - 1) + \sum_{k=2}^{H-1}(\mathcal{R}_{0k} - \mathcal{R}_{1,k-1})(\rho_k - 1)\right);$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \lambda_0 \mathbf{E}(\tau_\infty)}; \qquad p_n = \lambda_0 p_0\left(\mathcal{R}_{0n}q_{n0} + \sum_{k=1}^{n-1}(\mathcal{R}_{0k}q_{k,n-k} - \mathcal{R}_{1k}q_{k+1,n-k-1})\right),$$
$$n \ge 1.$$

Для систем $M_n / G_n / 1 / \infty$ з потоками замовлень, які відповідають стратегіям 7 і 8 із затуханням інтенсивностей λ_n, стаціонарний розподіл кількості замовлень існує без додаткових умов на коефіцієнти завантаження ρ_n, і можна знайти наближені значення $\mathbf{E}(\tau_\infty)$ та ймовірностей p_n за допомогою формул, які випливають з (3):

$$\mathbf{E}(\tau_\infty) \approx \mathbf{E}(\tau_r) = \sum_{k=1}^{r}\mathcal{R}_{0k}M_k - \sum_{k=1}^{r-1}\mathcal{R}_{1k}M_{k+1}; \quad p_n \approx p_{n(r)}, \quad n \ge 0;$$

$$p_{0(r)} = \frac{1}{1 + \lambda_0 \mathbf{E}(\tau_r)};$$

$$p_{n(r)} = \lambda_0 p_{0(r)}\left(\mathcal{R}_{0n}q_{n0} + \sum_{k=1}^{n-1}(\mathcal{R}_{0k}q_{k,n-k} - \mathcal{R}_{1k}q_{k+1,\,n-k-1})\right), \quad n \ge 1. \quad (4)$$

ПРИКЛАДИ ОБЧИСЛЕННЯ СТАЦІОНАРНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Для систем з обмеженою чергою $(r = 9)$ розглянемо такі реалізації стратегій 1–4 зміни інтенсивності вхідного потоку:

1) $\lambda_n = 1.25 - 0.04n$, $n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$;
2) $\lambda_n = \lambda = 1.25$ для $n \in \{0, 1, \ldots, 5\}$; $\lambda_n = 0.25(10 - n)$ для $n \in \{6, 7, 8, 9\}$;
3) $\lambda_n = (6 - n)\lambda$ для $n \in \{0, 1, \ldots, 4\}$; $\lambda_n = \lambda = 0.75$ для $n \in \{5, 6, \ldots, 9\}$;
4) $\lambda_n = \lambda = 1.25$ для $n \in \{0, 1, \ldots, 5\}$; $\lambda_n = \widetilde{\lambda} = 0.9375$ для $n \in \{6, 7, 8, 9\}$.

Стратегії 1 і 4 реалізують випадкове розрідження вхідного потоку. Стратегія 2 відповідає моделі для визначення надійності системи з послідовним з'єднанням п'яти основних елементів і наявністю п'яти резервних елементів [7], стратегія 3 — моделі системи з паралельним з'єднанням шести елементів і чотирма резервними елементами, які вмикаються по одному, коли всі основні елементи вийдуть з ладу.

Розглянемо дві стратегії керування інтенсивністю обслуговування: 1) інтенсивність обслуговування не залежить від кількості замовлень у системі, середній час обслуговування одного замовлення $M = 1$; 2) інтенсивність обслуговування змінюється зі зміною кількості замовлень у системі, середній час обслуговування одного замовлення M_n визначається згідно з правилом: $M_n = 1,\ 1 \le n \le 5;\quad M_6 = 0.8;\quad M_7 = 0.6;\quad M_8 = 0.4;\quad M_9 = 0.2.$

Для розподілів часу обслуговування з середнім значенням $M = 1$ введемо позначення: E — показниковий розподіл з параметром $\mu = 1$, $U[0;2]$ — рівномірний розподіл на відрізку [0; 2], $\Gamma(V)$ і $W(V)$ — гамма-розподіл і розподіл Вейбулла відповідно з коефіцієнтом варіації V. Для розподілів часу обслуговування з середнім значенням M_n використовуємо ті самі позначення з додаванням індексу *n*. Зокрема, позначення U_n використовуємо для рівномірного розподілу на відрізку $[0;2M_n]$.

Для порівняння стаціонарних розподілів кількості замовлень для систем з непоказниковим і показниковим розподілами часу обслуговування використовуватимемо абсолютне відхилення $\Delta_e = \sum_{n=0}^{r+1} | p_n - p_{n(e)}|$, де p_n і $p_{n(e)}$ — стаціонарні ймовірності для випадків непоказникового і показникового розподілів часу обслуговування відповідно.

Уведемо позначення: N — середня кількість замовлень у системі. Значення стаціонарних характеристик систем з обмеженою чергою для різних розподілів часу обслуговування, обчислені за допомогою методу потенціалів, зведено у табл. 1.

Для систем без обмежень на довжину черги реалізуємо стратегії 5 і 6 зміни інтенсивності вхідного потоку у вигляді:

5) $\lambda_n = 1.25 - 0.04n,\quad n \in \{0,1,\ldots,9\};\ \lambda_n = \tilde{\lambda} = 0.89$ для $n \ge 9$;

6) $\lambda_n = \lambda = 1.25$ для $n \in \{0,1,\ldots,5\};\ \lambda_n = \tilde{\lambda} = 0.9375$ для $n \ge 6$.

Припустимо, що інтенсивність обслуговування змінюється зі зміною кількості замовлень у системі, і середній час обслуговування одного замовлення M_n визначається згідно з правилом: $M_n = 1,\ 1 \le n \le 5;\ M_6 = 0.8;\ M_7 = 0.6;\ M_8 = 0.4;\quad M_n = 0.2,\ n \ge 9.$

Для порівняння стаціонарних розподілів кількості замовлень для систем без обмежень на довжину черги і систем з обмеженою чергою використовуватимемо абсолютне відхилення $\Delta_r = \sum_{n=0}^{r+1} | p_n - p_{n(r)}|$, де p_n і $p_{n(r)}$ — стаціонарні ймовірності для випадків необмеженої і обмеженої черги відповідно.

Аналізуючи дані табл. 1, бачимо, що відхилення Δ_e збільшується зі збільшенням величини $|V - 1|$, де V — коефіцієнт варіації розподілу часу обслуговування; середня тривалість періоду зайнятості $\mathbf{E}(\tau_r)$ і середня кількість замовлень у системі N зменшуються зі збільшенням коефіцієнта варіації V розподілу часу обслуговування. Порівнюючи значення $\mathbf{E}(\tau_r)$ і N для одної стратегії зміни інтенсивності вхідного потоку і різних стратегій керування інтенсивністю обслуговування, наведені у табл. 1, робимо висновок, що

Т а б л и ц я 1. Значення стаціонарних характеристик систем $M_n / G_n / 1 / r$ з різними розподілами часу обслуговування

Найменування розподілу	Номер стратегії зміни λ_n	$\mathbf{E}(\tau_r)$	N	Δ_e
$\Gamma(0.1)$	1	45.8534	5.8755	0.1925
$U[0;2]$	1	27.3414	5.6507	0.1330
E	1	15.5959	5.5456	–
$W(1.5)$	1	9.1029	5.4361	0.1741
$\Gamma_n(0.1)$	1	29.8806	4.4016	0.2682
U_n	1	18.5807	4.4024	0.1626
E_n	1	11.2169	4.4091	–
$W_n(1.5)$	1	6.9432	4.4604	0.1998
$\Gamma(0.1)$	2	76.5135	5.5026	0.3322
$U[0;2]$	2	36.4566	5.3963	0.1903
E	2	18.0299	5.2763	–
$W(1.5)$	2	9.7025	5.1877	0.2075
$\Gamma_n(0.1)$	2	58.4388	4.9412	0.3339
U_n	2	28.7117	4.8227	0.1949
E_n	2	14.6647	4.7041	–
$W_n(1.5)$	2	8.1220	4.6400	0.2258
$\Gamma(0.1)$	3	36257.4969	5.4638	0.3283
$U[0;2]$	3	760.8433	5.6458	0.1810
E	3	166.1570	5.8906	–
$W(1.5)$	3	42.8902	6.1371	0.1789
$\Gamma_n(0.1)$	3	30136.2328	4.9987	0.3195
U_n	3	617.8550	5.0948	0.1898
E_n	3	133.0581	5.2704	–
$W_n(1.5)$	3	34.6400	5.5226	0.2069
$\Gamma(0.1)$	4	97.6067	6.2664	0.2698
$U[0;2]$	4	45.5622	6.1496	0.1621
E	4	21.6740	5.9717	–
$W(1.5)$	4	11.1529	5.7835	0.1966
$\Gamma_n(0.1)$	4	58.7984	4.9890	0.3373
U_n	4	29.1475	4.8997	0.1975
E_n	4	14.9756	4.8220	–
$W_n(1.5)$	4	8.2987	4.7921	0.2213

використання стратегії збільшення інтенсивності обслуговування зі збільшенням кількості замовлень у системі приводить до зменшення $\mathbf{E}(\tau_r)$ і N.

У табл. 2 наведено значення $\mathbf{E}(\tau_\infty)$, Δ_r і різниць $\mathbf{E}(\tau_\infty) - \mathbf{E}(\tau_r)$ для систем без обмежень на довжину черги з різними розподілами часу обслуговування. Тут $\mathbf{E}(\tau_r)$ — середня тривалість періоду зайнятості для відповідної системи

Т а б л и ц я 2. Значення стаціонарних характеристик систем $M_n / G_n / 1 / \infty$ з різними розподілами часу обслуговування

Найменування розподілу	Номер стратегії зміни λ_n	$\mathbf{E}(\tau_\infty)$	$\mathbf{E}(\tau_\infty) - \mathbf{E}(\tau_r)$	Δ_r
$\Gamma_n(0.1)$	5	30.0367	0.1561	0.0051
U_n	5	18.7156	0.1349	0.0069
E_n	5	11.3681	0.1512	0.0177
$W_n(1.5)$	5	7.1309	0.1876	0.0530
$\Gamma_n(0.1)$	6	59.5333	0.7349	0.0123
U_n	6	29.5666	0.4191	0.0138
E_n	6	15.2882	0.3126	0.0259
$W_n(1.5)$	6	8.5903	0.2916	0.0646

з обмеженою чергою. Згідно з даними табл. 2 середня тривалість періоду зайнятості $\mathbf{E}(\tau_\infty)$ зменшується, а Δ_r збільшується зі збільшенням коефіцієнта варіації V розподілу часу обслуговування. Бачимо, що $\mathbf{E}(\tau_\infty) > \mathbf{E}(\tau_r)$ і значення $\mathbf{E}(\tau_\infty) - \mathbf{E}(\tau_r)$ зменшується зі збільшенням V для стратегії 6 зміни інтенсивності вхідного потоку.

Для систем без обмежень на довжину черги розглянемо стратегії 7 і 8 зміни інтенсивності вхідного потоку у вигляді:

7) $\lambda_n = \dfrac{\lambda}{n+1}, \quad n \ge 0;$

8) $\lambda_n = \lambda$ для $n \in \{0, 1, \dots, h\}; \quad \lambda_n = \dfrac{\lambda}{n+1}$ різні для $n \ge h+1$.

У випадку показникового розподілу часу обслуговування з параметром μ для стратегії 7 кількість замовлень у системі розподілена за законом Пуассона з параметром $\rho = \lambda / \mu$, тобто

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho}, \quad n \ge 0; \tag{5}$$

а для стратегії 8 стаціонарний розподіл кількості замовлень у системі є таким:

$$p_n = \rho^n p_0, \quad 0 \le k \le h+1; \qquad p_n = (h+1)! \frac{\rho^n}{n!} p_0, \quad k \le h+2; \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu};$$

$$p_0 = \left((h+1)! \, e^{\rho} + \sum_{k=0}^{h+1} \rho^k \left(1 - \frac{(h+1)!}{k!} \right) \right)^{-1}. \tag{6}$$

Порівняння стаціонарних розподілів кількості замовлень, отриманих для стратегій 7 і 8 за допомогою наближених формул (4), з точними розподілами (5) і (6) для значень параметрів $\lambda = 2$, $\mu = 1$, $h = 4$, $r = 9$ дало такі результати: $\Delta_r = 8.3 \cdot 10^{-6}$ для стратегії 7 і $\Delta_r = 9.5 \cdot 10^{-5}$ для стратегії 8.

ВИСНОВКИ

У цій праці за допомогою методу потенціалів одержано зручні для числової реалізації формули для відшукання стаціонарних імовірностей станів одноканальних систем обслуговування з пороговими стратегіями функціонування. Розглянуто залежності інтенсивності вхідного потоку від кількості замовлень у системі, що характерні як для замкнених систем (моделей теорії надійності), так і для систем обслуговування з випадковим розрідженням вхідного потоку. На прикладах з’ясовано характер залежностей усереднених характеристик стаціонарного розподілу кількості замовлень у системі від коефіцієнта варіації розподілу часу обслуговування. Показано, що використання стратегії збільшення інтенсивності обслуговування зі збільшенням кількості замовлень у системі приводить до зменшення навантаження на канал обслуговування.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Жерновый Ю., Жерновый К. Метод потенциалов для пороговых стратегий обслуживания. Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2015. 164 с.
2. Zhernovyi Yu.V., Zhernovyi K.Yu. Method of potentials for a closed system with queue length dependent service times. *Journal of Communications Technology and Electronics.* 2015. Vol. 60, N 12. P. 1341–1347. https://doi.org/10.1134/S1064226915120219.
3. Zhernovyi Yu., Kopytko B. The potentials method for a closed queueing system with hysteretic strategy of the service time change. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics.* 2015. N 14(2). P. 131–143. https://doi.org/10.17512/jamcm.2015.2.14.
4. Zhernovyi Yu.V., Zhernovyi K.Yu. Potentials method for M/G/1/m systems with threshold operating strategies. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2016. Vol. 52, N 3. P. 481–491. https://doi.org/10.1007/s10559-016-9849-7.
5. Zhernovyi Yu.V. Potentials method for M/G/1/m systems with hysteretic operating strategies. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2016. Vol. 52, N 5. P. 770–781. https://doi.org/10.1007/s10559-016-9878-2.
6. Печинкин А.В. Система M_k/G/1 с ненадежным прибором. *Автоматика и телемеханика.* 1996. № 9. С. 100–110.
7. Zhernovyi Yu.V. Reliability of a series system with redundancy and threshold recovery strategies. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2021. Vol. 57, N 4. P. 629–637. https://doi.org/10.1007/s10559-021-00388-0.
8. Жерновый Ю.В., Жерновый К.Ю. Метод потенциалов для системы M/G/1/m с активным управлением очередью. *Информационные процессы.* 2015. Т. 15, № 1. С. 66–77.
9. Ushakov I. Probabilistic reliability models. Hoboken: John Wiley & Sons, 2012. 232 p.
10. Жерновий Ю.В. Імітаційні моделі надійності: Практикум з використання GPSS World. Житомир: ДП «Житомир-Poligraf», 2020. 168 с.

Yu.V. Zhernovyi

POTENTIALS METHOD FOR THE $M_n / G_n / 1 / r$ AND $M_n / G_n / 1 / \infty$ QUEUEING SYSTEMS WITH TYPICAL DEPENDENCES OF THE INPUT FLOW INTENSITY ON THE NUMBER OF CUSTOMERS

Abstract. The application of the potential method to finding the stationary distribution of the number of customers in the $M_n / G_n / 1 / r$ and $M_n / G_n / 1 / \infty$ queueing systems with threshold operation strateges is proposed. The dependences of the input flow intensity on the number of customers are considered, which are characteristic both for closed systems, which are models of the reliability theory, and for queueing systems with random rarefaction of the input flow. Service intensity control strategies are constructed on the assumption that the intensity can vary at the time a customer starts servicing. Formulas to determine Laplace transforms of the distribution of the number of customers in the system during the busy period and for calculating the average duration of the busy period are obtained.

Keywords: single-channel queueing system, Poisson input stream of the second kind, dependence of the service time on the state of the system, method of potentials.

Надійшла до редакції 27.10.2021