УДК 519.21

О.В. БОГДАНОВ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *oleksbogdanov@gmail.com.*

ОПТИМАЛЬНА СТРАТЕГІЯ ВАКЦИНАЦІЇ У СТОХАСТИЧНІЙ МОДЕЛІ ЕПІДЕМІЇ З ОБМЕЖЕНИМ ЛІКУВАННЯМ[1]

Анотація. У роботі розглядається стохастична модель епідемії SIR з використанням вакцинації та обмеженим лікуванням. Запропоновано метод пошуку оптимальної стратегії вакцинації для мінімізації функціонала ціни.

Ключові слова: стохастична модель, епідемія, оптимальна стратегія.

Унасідок пандемії COVID-19 постає проблема моделювання розвитку епідемій, а також пошуку оптимальних стратегій вакцинації та лікування населення. Однією з найпоширеніших моделей епідемій є модель SIR [1]. У цій роботі розглянуто стохастичну версію моделі SIR з використанням вакцинації та обмеженим лікуванням [2]. Задача полягає в пошуку оптимальної стратегії вакцинації для мінімізації функціонала ціни, що залежить від передбаченої кількості хворих та витрат, пов'язаних з вакцинацією.

Розглянемо стохастичну модель SIR з обмеженим лікуванням [2]. Нехай S — кількість вразливих до хвороби, I — кількість інфікованих. Опишемо динаміку цих величин рівняннями

$$dS(t) = \{S(t)(K - S(t)) - \beta S(t)I(t) - Y(S(t), I(t))\}dt - \varepsilon S(t)I(t)dW_1(t), \quad (1)$$

$$dI(t) = \left\{ \beta S(t)I(t) - \mu I(t) - \frac{rI(t)}{a + I(t)} \right\} dt + \varepsilon S(t)I(t)dW_2(t). \quad (2)$$

Тут K — ємність середовища, β — параметр швидкості передачі інфекції, $Y(t)$ — швидкість вакцинації, яка є керуванням задачі, ε — параметр дифузії, μ — параметр смертності/захворювання, r і a — параметри, пов'язані зі швидкістю лікування (r описує швидкість лікування, a — обмеження, пов'язані з місткістю лікувальних закладів).

Оскільки кількість осіб, що одужали, не належить до функціонала ціни та не впливає на динаміку інших величин завдяки набутому імунітету, рівняння, що описують цю величину, не розглядаються.

Рівняння (1) і (2) формують векторне стохастичне рівняння у вигляді

$$dx(t) = b(x(t), Y(t))dt + \sigma(x(t))dW(t), \quad (3)$$

де

$$b_1(x(t), Y(x(t))) = x_1(t)(K - x_1(t)) - \beta x_1(t)x_2(t) - Y(x(t)),$$

$$b_2(x(t), Y(x(t))) = \beta x_1(t)x_2(t) - \mu x_2(t) - \frac{rx_2(t)}{a + x_2(t)},$$

$$\sigma_{11}(x(t)) = -\varepsilon x_1(t)x_2(t),$$

$$\sigma_{22}(x(t)) = \varepsilon x_1(t)x_2(t),$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0.$$

---

[1] Робота виконана за підтримки Національного фонду досліджень України. Грант № 2020.02/0121.

© О.В. Богданов, 2022

Епідемія продовжується, доки є хоча б одна інфікована людина. Отже, ми розглядаємо процес x на множині

$$V = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x_i \le K;\ i = 1, 2\}.$$

Також маємо функціонал ціни [2]

$$\Psi_Y(x) = E_x \int_0^{\tau} f(x(t), Y(x(t)))dt = E_x \int_0^{\tau} \{m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t) + rY^2(x(t))\}dt,$$

де m_1 і m_2 — деякі сталі параметри, τ — момент завершення епідемії або виходу процесу x із області V.

Задача полягає у пошуку функції керування $Y(x)$, що мінімізує функціонал ціни $\Psi_Y(x)$. Характеристичний оператор процесу, визначеного в (3), має вигляд [3]

$$L = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{2} b_i(x, Y(x)) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

де

$$a_{ij}(x) = \frac{1}{2}(\sigma(x)\sigma^T(x))_{ij},$$

$$\sigma(x)\sigma^T(x) = \begin{pmatrix} -\varepsilon x_1 x_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon x_1 x_2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 x_1^2 x_2^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 x_1^2 x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$L = \frac{1}{2}\varepsilon^2 x_1^2 x_2^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right\} + \sum_{i=1}^{2} b_i(x, Y(x)) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Зазначимо деякі властивості рівняння (3).

Властивість 1. Функції $a_{ij}(x)$ обмежені на V.

Властивість 2. Функції $a_{ij}(x)$ ліпшицево неперервні на V. Дійсно,

$$\left|\frac{\partial a_{ii}}{dx_1}\right| = \varepsilon^2 x_1 x_2^2 \le \varepsilon^2 K^3,$$

$$\left|\frac{\partial a_{ii}}{dx_2}\right| = \varepsilon^2 x_1^2 x_2 \le \varepsilon^2 K^3,$$

$$|a_{ii}(x_1, x_2) - a_{ii}(x_1^*, x_2^*)| \le$$

$$\le |a_{ii}(x_1, x_2) - a_{ii}(x_1^*, x_2)| + |a_{ii}(x_1^*, x_2) - a_{ii}(x_1^*, x_2^*)| \le$$

$$\le |x_1 - x_1^*| \max_V \left|\frac{\partial a_{ii}}{dx_1}\right| + |x_2 - x_2^*| \max_V \left|\frac{\partial a_{ii}}{dx_2}\right| \le$$

$$\le \varepsilon^2 K^3 (|x_1 - x_1^*| + |x_2 - x_2^*|) \le 2\varepsilon^2 K^3 x - x^*.$$

Властивість 3. Для будь-яких x, $\lambda_i \in R$ матимемо

$$\mu \sum_{i=1}^{2} \lambda_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\lambda_i \lambda_j \le \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{2} \lambda_i^2, \ \mu = \text{const} > 0.$$

Дійсно,
$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2}\varepsilon^2 x_1^2 x_2^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2).$$

Для $\varepsilon \ge 1$

$$\frac{1}{4K\varepsilon^2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \le \frac{1}{2}\varepsilon^2 x_1^2 x_2^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \le 4K\varepsilon^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2).$$

Для $\varepsilon \le 1$
$$\frac{1}{4K}\varepsilon^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \le \frac{1}{2}\varepsilon^2 x_1^2 x_2^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \le \frac{4K}{\varepsilon^2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2).$$

Нехай допустимі стратегії $Y(x)$ належать деякому відрізку $[0, c]$ (оскільки максимальна кількість вакцин обмежена). Нехай $\mathfrak{A}$ — клас допустимих стратегій. Тоді рівняння (3) має таку властивість.

Властивість 4. Функції $b_i(x, Y)$ обмежені та неперервні на $V \times C$.

Для рівнянь із властивостями 1–4 у роботі [4] запропоновано таку теорему.

Теорема 1. В області V існує єдиний розв'язок $u^*(x)$ рівняння

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \max_{y \in [0, c]} \left\{ \sum_{i=1}^{2} b_i(x, y)\frac{\partial u}{\partial x_i} - f(x, y) \right\} = 0 \tag{4}$$

з нульовими граничними умовами, де

$$f(x, y) = m_1 x_1 + m_2 x_2 + r y^2.$$

Також існує оптимальна допустима стратегія $Y^*(x)$, тобто така, що

$$Y^*(x) \ge Y(x), \ Y \in \text{A}, x \in V,$$

і для неї існує $\Psi_{Y^*}(x) = u^*(x)$. Будь-яка допустима стратегія $Y(x)$, що максимізує для всіх $x \in V$ вираз

$$\sum_{i=1}^{2} b_i(x, Y(x))\frac{\partial u^*}{\partial x_i} - f(x, Y(x)),$$

є оптимальною.

Розглянемо рівняння (4). Маємо

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2 x_1 x_2^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) +$$

$$+ \max_{y \in [0, c]} \left\{ [(x_1(K - x_1) - \beta x_1 x_2 - y]\frac{\partial u}{\partial x_1} + \right.$$

$$\left. + \left[\beta x_1 x_2 - \mu x_2 - \frac{r x_2}{a + x_2} \right] \frac{\partial u}{\partial x_2} - m_1 x_1 - m_2 x_2 - r y^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon^2 x_1 x_2^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + \max_{y\in[0,\,c]} \{g(x,\ y, u(x))\} = 0\,, \tag{5}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -2ry - \frac{\partial u}{\partial x_1}\,,\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -2r < 0\,. \tag{6}$$

Із (6) випливає, що $\max\limits_{y\in[0,\,c]} \{g(x,\ y, u(x))\}$ досягається для $y = -\frac{1}{2r}\frac{\partial u}{\partial x_1}$, якщо $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in [-2cr, 0]$; для $y = 0$, якщо $\frac{\partial u}{\partial x_1} > 0$, та для $y = c$, якщо $\frac{\partial u}{\partial x_1} < -2cr.$

Отже, рівняння (5) набуває вигляду

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2 x_1 x_2^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + [(x_1(K - x_1) - \beta x_1 x_2]\frac{\partial u}{\partial x_1} +$$

$$+\left[\beta x_1 x_2 - \mu x_2 - \frac{r x_2}{a + x_2} \right] \frac{\partial u}{\partial x_2} - m_1 x_1 - m_2 x_2 +$$

$$+\left(-c\frac{\partial u}{\partial x_1} - rc^2 \right) 1_{\left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1} < -2cr \right\}} + \frac{1}{4r}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 1_{\left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1} \in [-2cr, 0] \right\}} = 0\,.$$

Пошук розв'язків зазначеного рівняння може бути здійснено за допомогою чисельних методів.

Отже, маємо метод пошуку оптимальної стратегії вакцинації, завдяки якому можлива мінімізація витрат внаслідок епідемії в умовах обмеженого лікування.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Bogdanov O., Knopov P. Stochastic models in the problems of predicting the epidemiological situation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2022. Vol. 58, No. 1. P. 58–64.
2. Ishikawa M. Optimal vaccination strategy under saturated treatment using the stochastic SIR model. *Transactions of the Institute of Systems, Control and Information Engineers*. 2013. Vol. 26, N 11. P. 382–388.
3. ∅ksendal B. Stochastic differential equations: an introduction with applications, 6th edition, 2010. Springer: Berlin: Heidelberg. 379 p.
4. Flemming W.H. Some Markovian Optimization Problems. *Journal of Mathematics and Mechanics*. 1963. vol. 12, N. 1. P. 131–140.

O. Bogdanov

OPTIMAL VACCINATION STRATEGY IN THE STOCHASTIC EPIDEMIC LIMITED-TREATMENT MODEL

Abstract. The author analyzes the stochastic SIR epidemic model with vaccination and limited treatment. A method to obtain the optimal vaccination strategy minimizing the cost functional is proposed.

Keywords: stochastic model, epidemic, optimal strategy.

Надійшла до редакції 01.02.2022