

В.М. БУЛАВАЦЬКИЙ

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАНУ, Київ, Україна,
e-mail: v_bulav@ukr.net.

В.О. БОГАЄНКО

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАНУ, Київ, Україна,
e-mail: sevab@ukr.net.

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІЙНОЇ ЗА ПРОСТОРОМ І ЧАСОМ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ В ТРІЩИНУВАТО-ПОРИСТОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Анотація. Одержано замкнені розв'язки деяких нестационарних крайових задач фільтраційної динаміки в тріщинувато-пористих пластах, що поставлені в рамках дробово-диференційних математичних моделей з урахуванням просторово-часової нелокальності процесу. Математичні моделі аномальної фільтраційної динаміки сформульовано з використанням похідних Хільфера або Капуто за часовою змінною та Рімана–Ліувілля за геометричною змінною. Разом з прямими задачами фільтрації розглянуто обернену крайову задачу щодо визначення невідомої функції джерела, залежної лише від геометричної змінної. Наведено умови існування регулярних розв'язків цих задач.

Ключові слова: математичне моделювання, дробово-диференційна динаміка фільтраційних процесів, тріщинувато-пористі середовища, неklasичні моделі, похідні Хільфера, Капуто та Рімана–Ліувілля, крайові задачі, замкнені розв'язки, чисельні розв'язки.

ВСТУП

Зростання обсягів промислового виробництва, широкий розвиток меліорації, будівництва підземних споруд та комунікацій, а також розуміння важливості процесів, які відбуваються в приповерхневих шарах земної кори, зумовили актуалізацію досліджень ґрунтово-гідрогеологічних систем і явищ масо- та теплопереносу в них. Для управління водними ресурсами та прогнозування їхньої динаміки, розвитку і впливу на екологічний стан довкілля важливе значення мають методи теоретичного дослідження особливостей перебігу геофільтраційних процесів, зокрема методи їхнього математичного і комп'ютерного моделювання [1–5]. Математичне моделювання закономірностей та особливостей динаміки фільтраційних процесів переносу в складних гідрогеологічних умовах є актуальним напрямком геоінформатики і геоматематики. Зазначимо, що більшість відомих математичних моделей процесів переносу в геопористих середовищах базуються на класичних законах переносу, які можуть бути недостатньо адекватними за умов суттєвого відхилення системи від рівноважного стану [6, 7]. У зв'язку з цим актуальною є проблема пошуку і побудови нових, адекватніших математичних моделей процесів переносу, що базуються на законах переносу, справедливих за умов суттєвого відхилення від рівноважного стану системи. Ефективний підхід до моделювання процесів переносу в таких системах ґрунтується на використанні апарату інтегро-диференціювання дробового порядку, в межах якого на цей час побудовано низку неklasичних математичних моделей переносу та одержано нові цікаві результати [4, 5, 8–15].

У роботі побудовано аналітичні розв'язки деяких одновимірних нестационарних крайових задач стосовно нових, неklasичних фільтраційних математичних моделей в тріщинувато-пористих середовищах. Зазначені математичні моделі описують дробово-диференційну динаміку геофільтраційних процесів за умов як просторової, так і часової нелокальностей.

МОДЕЛЬНА СИСТЕМА РІВНЯНЬ ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІЙНОЇ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ В ТРІЩИНУВАТО-ПОРИСТОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Математичну модель фільтрації нестисливих крапельних рідин у тріщинува-то-пористому середовищі вперше побудовано в класичних роботах Г.І. Барен-блатта, Ю.П. Желтова, І.М. Кочиної [16, 17], де описано процеси переносу за припущень про середовища з подвійною пористістю. Такі середовища (зокре-ма, пористі блоки, що розділені системою тріщин) згідно з розглядуваною моделлю вважаються суцільними і всі їхні характеристики є усереднени-ми [18]. Під час реалізації запропонованого зазначеними авторами підходу для опису динаміки фільтраційних процесів у середовищах такого типу вико-ристовують модельну систему рівнянь [16–19] у вигляді

$$\varepsilon_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{p_2 - p_1}{\tau_r} = \kappa \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{p_2 - p_1}{\tau_r} = \varepsilon_2 \kappa \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}, \quad (2)$$

де p_1, p_2 — тиск у системі тріщин і пористих блоках відповідно, $\kappa = \frac{k_1}{\mu \beta_2^*}$,

$\tau_r = \frac{\mu \beta_2^*}{\alpha_0}$, $\varepsilon_1 = \frac{\beta_1^*}{\beta_2^*}$, $\varepsilon_2 = \frac{k_2}{k_1}$, μ — в'язкість рідини, k_i ($i=1,2$) — коефіцієнт

фільтрації в системах тріщин і пористих блоків відповідно, α_0 — коефіцієнт перетоку, $q = \frac{\alpha_0}{\mu} (p_2 - p_1)$ — інтенсивність перетоку, β_i^* ($i=1,2$) — кое-фіцієнти пружності.

Вихідна модельна система рівнянь (1), (2) суттєво спрощується [18] за умов виконання співвідношень $\varepsilon_1 \ll 1$, $\varepsilon_2 \ll 1$. З урахуванням цих обмежень одержуємо з (1), (2) спрощену модельну систему рівнянь фільтрації в тріщинува-то-пористому середовищі у вигляді [18, 19]

$$\frac{p_2 - p_1}{\tau_r} + \kappa \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{p_2 - p_1}{\tau_r} = 0. \quad (4)$$

Зазначимо, що використання системи рівнянь (3), (4) для моделювання ди-наміки фільтраційних процесів у тріщинува-то-пористих середовищах нині на-було значного поширення [6, 7, 18, 19].

У випадку моделювання нелокальних фільтраційних процесів (зокрема, з дробово-диференційною за часом і простором динамікою), враховуючи наве-дене вище, допускаємо, що вихідну модельну систему рівнянь узагальненої дро-бово-диференційної математичної моделі фільтрації в тріщинува-то-пористому середовищі (відповідної до моделі, що описується системою (1), (2)) можна записати у вигляді

$$\varepsilon_1 D_t^{\alpha, \gamma} p_1(x, t) - \frac{p_2 - p_1}{\tau_r} = \kappa D_x^\beta p_1(x, t), \quad (5)$$

$$D_t^{\alpha, \gamma} p_2(x, t) + \frac{p_2 - p_1}{\tau_r} = \varepsilon_2 \kappa D_x^\beta p_2(x, t), \quad (6)$$

де введено такі позначення: $D_t^{\alpha, \gamma} u(t) = I^{\gamma-\alpha} D I^{1-\gamma} u(t)$ — дробова похідна Хіль-фера [8, 20, 21] функції $u(t)$ порядків α, γ ($0 < \alpha \leq \gamma \leq 1$), $I^\alpha w(t) = (\Gamma(\alpha))^{-1} \times$

$\times \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \omega(\tau) d\tau$ — дробовий інтеграл Рімана–Ліувілля ($t > 0, \alpha > 0$), $\Gamma(\cdot)$ —

гамма-функція Ейлера [22], $D_x^\beta v(x)$ — дробова похідна Рімана–Ліувілля [21, 23, 24] від функції $v(x)$ порядку β ($1 < \beta \leq 2$), $D = d/dx$. В окремому випадку $\varepsilon_1 \ll 1$, $\varepsilon_2 \ll 1$ вихідна система рівнянь (5), (6) спрощується і одержуємо дробово-диференціальний аналог системи (3), (4)

$$\kappa D_x^\beta p_1(x, t) + \frac{p_2 - p_1}{\tau_r} = 0, \quad (7)$$

$$D_t^{\alpha, \gamma} p_2(x, t) + \frac{p_2 - p_1}{\tau_r} = 0. \quad (8)$$

Звідси, зокрема для $\alpha = \gamma = 1, \beta = 2$, отримуємо модельну систему рівнянь (3), (4) в класичній постановці [18, 19].

Вилучаючи з системи (7), (8) будь-яку з функцій p_1, p_2 , одержуємо для кожної з невідомих функцій p_i ($i = 1, 2$) рівняння вигляду

$$D_t^{\alpha, \gamma} p(x, t) = \kappa D_x^\beta p(x, t) + \tau_r \kappa D_t^{\alpha, \gamma} (D_x^\beta p(x, t)) + f(x) \quad (9)$$

$$(0 < \alpha \leq \gamma \leq 1, 1 < \beta \leq 2),$$

де $f(x)$ — функція інтенсивності джерел, $p(x, t)$ — шукана функція тиску.

ПРЯМА І ОБЕРНЕНА КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ В ТРІЩИНУВАТО-ПОРИСТОМУ СЕРЕДОВИЩІ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО РІВНЯННЯ (9)

Найпростіша задача математичного моделювання динаміки фільтраційного процесу в тріщинувато-пористому масиві з сильнопроникними межами за умов просторово-часової нелокальності зводиться до розв'язання в області $\Omega = \{(x, t) : (0, 1) \times (0, +\infty)\}$ крайової задачі для рівняння (9) за виконання умов

$$p(0, t) = 0, \quad p(1, t) = 0 \quad (t \geq 0), \quad (10)$$

$$I^{1-\gamma} p(x, t)|_{t=0} = g(x) \quad (x \in [0, 1]), \quad (11)$$

де $g(x)$ — відома функція, $g(x) \in L^2[0, 1]$.

Розв'язок крайової задачі (9)–(11) шукатимемо у вигляді ряду

$$p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \omega_n(x), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (12)$$

де $\omega_n(x) = x^{\beta-1} E_{\beta, \beta}(\lambda_n x^\beta)$ — власні функції задачі Штурма–Ліувілля

$$D_x^\beta \omega(x) = \lambda \omega(x), \quad \omega(0) = \omega(1) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (13)$$

$E_{\beta, \beta}(z)$ — двопараметрична функція Міттаг-Лефлера [22].

Задача (13) вивчалась в працях [23–25], де доведено, що лише для власних значень λ_n , які є нулями двопараметричної функції Міттаг-Лефлера $E_{\beta, \beta}(\lambda)$, існують зазначені власні функції $\omega_n(x)$. У роботі [26] показано, що система функцій $\{\omega_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ утворює в $L^2(0, 1)$ неортогональний базис. Система власних функцій задачі, спряженої до задачі (13), визначається таким чином [25]:

$$\{z_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \{(1-x)^{\beta-1} E_{\beta, \beta}(\lambda_n (1-x)^\beta)\}_{n=1}^{\infty}.$$

У цьому разі системи функцій $\{\omega_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \{z_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ утворюють біортогональну систему функцій [27]. Записуючи розвинення функції $f(x)$ у ряд за

власними функціями задачі (13) у вигляді

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \omega_n(x), \quad (14)$$

де $f_n = (f, z_n)_{L^2(0,1)}$, одержуємо з (9)–(11) для знаходження невідомих функцій $u_n(t)$ ($n \in N$) послідовність задач Коші

$$D_t^{\alpha, \gamma} u_n(t) - w_n u_n(t) = \frac{w_n}{\kappa \lambda_n} f_n, \quad I^{1-\gamma} u_n(t) \Big|_{t=0} = g_n \quad (n \in N) \quad (15)$$

(тут $g_n = (g, z_n)_{L^2(0,1)}$, $w_n = \kappa \lambda_n / (1 - \tau_r \kappa \lambda_n)$, $n \in N$).

Розв'язки задач (15) запишемо у вигляді

$$u_n(t) = \frac{w_n}{\kappa \lambda_n} f_n \Phi_{1n}(t) + g_n \Phi_{2n}(t) \quad (n \in N), \quad (16)$$

де

$$\Phi_{1n}(t) = t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(w_n t^\alpha), \quad \Phi_{2n}(t) = t^{\gamma-1} E_{\alpha, \gamma}(w_n t^\alpha) \quad (n \in N). \quad (17)$$

Отже, співвідношення (12), (16), (17) є формальним розв'язком поставленої задачі. Покажемо, що цей розв'язок є регулярним.

Допустимо, що функція $g(x)$ задовольняє умови $g(x) \in C[0, 1]$, $g(0) = g(1) = 0$, $g'(1) = 0$. З урахуванням цих умов і відомої нерівності [22]

$$|E_{\alpha, \beta}(z)| \leq \frac{C_1}{1 + |z|}, \quad (18)$$

$$0 < \alpha < 2, \quad \beta \in R, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \mu \leq |\arg(z)| \leq \pi, \quad \mu \in \left(\frac{\pi\alpha}{2}, \min\{\alpha\pi, \pi\} \right), \quad C_1 = \text{const} > 0,$$

виконуючи інтегрування частинами в співвідношенні для (g, z_n) , одержуємо оцінку

$$\begin{aligned} |g_n| &= \left| \int_0^1 g(x) (1-x)^{\beta-1} E_{\beta, \beta}(\lambda_n (1-x)^\beta) dx \right| = \frac{1}{|\lambda_n|} \left| \int_0^1 g'(x) E_\beta(\lambda_n (1-x)^\beta) dx \right| = \\ &= \frac{1}{|\lambda_n|} \left[|g'(0)| |E_{\beta, 2}(\lambda_n)| + \int_0^1 |g''(x)| |(1-x) E_{\beta, 2}(\lambda_n (1-x)^\beta)| dx \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{|\lambda_n|^2} \left(C_1 |g'(0)| + C_2 \int_0^1 (1-x)^{1-\beta} dx \right) \leq \frac{C_1^+}{|\lambda_n|^2} \quad (C_1, C_2, C_1^+ > 0, \quad n \in N). \quad (19) \end{aligned}$$

Допускаючи, що функція $f(x)$ задовольняє ті самі умови, що і функція $g(x)$, тобто $f(x) \in C^2[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$, $f'(1) = 0$, маємо

$$|f_n| \leq \frac{C_2^+}{|\lambda_n|^2} \quad (C_2^+ > 0, \quad n \in N). \quad (20)$$

На основі співвідношення (16) з урахуванням (18)–(20) одержуємо для $t \geq \bar{t} > 0$ (\bar{t} — довільне допоміжне число)

$$|u_n(t)| \leq \frac{M_1}{|\lambda_n|^2} \quad (M_1 > 0, \quad n \in N).$$

Враховуючи відповідну оцінку [25–27] для власних функцій $\omega_n(x)$ задачі (13), маємо для членів ряду (12)

$$|u_n(t) \omega_n(x)| \leq \frac{M_2}{|\lambda_n|^3 x} \quad (M_2 > 0, \quad t \geq \bar{t} > 0, \quad n \in N). \quad (21)$$

Оскільки власні значення λ_n задачі (13) для $\text{Im}(\lambda_n) > 0$ мають такі властивості [26, 28]:

- $|\lambda_k| < |\lambda_{k+1}|$ для $k \geq 1$,
- для достатньо великих n і $\arg(\lambda_n) > \frac{\alpha\pi}{2}$ маємо $|\lambda_n| \sim O(n^\beta)$ ($1 \leq \beta \leq 2$),

з урахуванням (21) одержуємо, що мажорувальним для ряду (12) є збіжний узагальнений гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^\beta n} \quad (1 \leq \beta \leq 2). \quad (22)$$

Тоді на основі мажорантної ознаки Вейерштраса ряд (12) є рівномірно збіжним на множині $\Omega_\varepsilon := [0, 1] \times [\varepsilon, +\infty)$ для довільного $\varepsilon > 0$ і являє собою неперервну функцію $p(x, t) \in C(\Omega_\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$. Аналогічно доводиться, що $D_t^{\alpha, \gamma} p, D_x^\beta p, D_t^{\alpha, \gamma} (D_x^\beta p) \in C(\Omega_\varepsilon)$, чим встановлюється існування регулярного розв'язку розглядуваної прямої задачі.

Обернену крайову задачу фільтрації в межах розглядуваної математичної моделі сформулюємо як задачу відшукування в області $Q := (0, 1) \times (0, T)$ пари функцій $\{p(x, t), f(x)\}$ на основі розв'язання крайової задачі (9)–(11) за виконання додаткової (кінцевої) умови $p(x, T) = \psi(x)$ ($T > 0$). Отже, вихідна задача набуває вигляду

$$D_t^{\alpha, \gamma} p(x, t) = \kappa D_x^\beta p(x, t) + \tau, \kappa D_t^{\alpha, \gamma} (D_x^\beta p(x, t)) + f(x), \quad (x, t) \in Q \quad (23)$$

$$(0 < \alpha \leq \gamma \leq 1, 1 < \beta \leq 2),$$

$$p(0, t) = 0, \quad p(1, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (24)$$

$$I^{1-\gamma} p(x, t) \Big|_{t=0} = g(x), \quad p(x, T) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (25)$$

де $g(x), \psi(x)$ — функції початкової і кінцевої умов відповідно.

Позначаючи ψ_n коефіцієнти розвинення функції $\psi(x)$ за власними функціями задачі (13), тобто $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \omega_n(x)$, маємо з останньої умови (25) з урахуванням (12) співвідношення

$$u_n(T) = \psi_n \quad (n \in N), \quad (26)$$

де $\psi_n = (\psi, z_n)_{L^2(0,1)}$.

Взявши до уваги (16), перепишемо співвідношення (26) у вигляді

$$\frac{w_n}{\kappa \lambda_n} f_n \Phi_{1n}(T) + g_n \Phi_{2n}(T) = \psi_n \quad (n \in N).$$

Звідси маємо

$$f_n = \frac{\kappa \lambda_n (\psi_n - g_n \Phi_{2n}(T))}{w_n \Phi_{1n}(T)} \quad (n \in N). \quad (27)$$

Отже, формальний розв'язок оберненої крайової задачі визначається співвідношеннями (12), (16), (17), (14), (27). Далі покажемо, що за певних умов одержаний розв'язок задачі (23)–(25) є класичним розв'язком, а знайдена функція джерела $f(x)$ неперервна.

Нехай функція $\psi(x)$ задовольняє ті самі умови, що означені раніше для функції $g(x)$. Тоді, як показано вище, з урахуванням зазначених умов для функцій $\psi(x), g(x)$ мають місце такі оцінки:

$$|g_n| \leq \frac{M_1^+}{|\lambda_n|^2}, \quad |\psi_n| \leq \frac{M_2^+}{|\lambda_n|^2} \quad (M_1^+, M_2^+ > 0, n \in N). \quad (28)$$

Перш ніж знайти оцінку членів ряду (14), зауважимо, що для f_n , визначених згідно з (27), з урахуванням $E_\beta(w_n T^\beta) \neq 1$ має місце нерівність

$$\frac{1}{|E_\beta(w_n T^\beta) - 1|} \leq C_* \quad (C_* = \text{const} > 0, n \in N). \quad (29)$$

Отже, враховуючи співвідношення (27)–(29), одержуємо

$$\begin{aligned} |f_n \omega_n(x)| &= \kappa |\lambda_n| |\omega_n(x)| \left| \frac{\psi_n - g_n \Phi_{2n}(T)}{w_n \Phi_{1n}(T)} \right| = \kappa |\lambda_n| |\omega_n(x)| \frac{|\psi_n - g_n \Phi_{2n}(T)|}{|E_\beta(w_n T^\beta) - 1|} \leq \\ &\leq |\omega_n(x)| \frac{M_3}{|\lambda_n|} \leq \frac{M_3^+}{|\lambda_n|^2 x} \quad (M_3, M_3^+ > 0, n \in N). \end{aligned} \quad (30)$$

Беручи до уваги асимптотику власних значень задачі (13), на основі (30) доходимо висновку, що для ряду (14), (27) мажорувальним є збіжний узагальнений гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\beta}} \quad (1 \leq \beta \leq 2). \quad (31)$$

Отже, на основі мажорантної ознаки Вейерштраса відповідний ряд для функції $f(x)$ є рівномірно збіжним і $f(x) \in C[0, 1]$. Застосовуючи наведені вище оцінки до (16), одержуємо, що мажорувальним для ряду (12) є узагальнений гармонічний ряд (22). Таким чином, ряд (12) є рівномірно збіжним на множині $Q_\varepsilon := [0, 1] \times [\varepsilon, T]$ для довільного $\varepsilon > 0$ і являє собою неперервну функцію $p(x, t) \in C(Q_\varepsilon)$. Аналогічно доводиться, що $D_t^{\alpha, \gamma} p, D_x^\beta p, D_t^{\alpha, \gamma} (D_x^\beta p) \in C(Q_\varepsilon)$. Отже, існує регулярний розв'язок $\{p(x, t), f(x)\}$ розглядуваної оберненої задачі. Легко впевнитися в єдиності цього розв'язку.

ВИПАДОК ЧАСОВОЇ НЕЛОКАЛЬНОСТІ ЗА КАПУТО. МЕТОДИКА ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

В окремому випадку наявності часової нелокальності за Капуто відповідне модельне рівняння фільтрації одержується з (9) для $\gamma = 1$ і набуває вигляду

$$D_t^{(\alpha)} p(x, t) = \kappa D_x^\beta p(x, t) + \tau_r \kappa D_t^{(\alpha)} (D_x^\beta p(x, t)) + q \quad (32)$$

$$(0 < \alpha \leq 1, 1 < \beta \leq 2),$$

де $D_t^{(\alpha)}$ — оператор дробової похідної Капуто порядку α за змінною t [4, 5, 9, 21, 23, 24], q — задана функція інтенсивності джерел, $p(x, t)$ — шукана функція тиску.

Задача моделювання динаміки фільтраційного процесу в тріщинувато-пористому масиві (наприклад, з сильнопроникними межами) за умов просторово-часової нелокальності зводиться до розв'язання в області $\Omega = \{(x, t) : (0, 1) \times (0, +\infty)\}$ крайової задачі для рівняння (32) за виконання умов

$$p(0, t) = 0, \quad p(1, t) = 0 \quad (t \geq 0), \quad (33)$$

$$p(x, 0) = p^{(0)}(x) \quad (x \in [0, 1]), \quad (34)$$

де $p^{(0)}(x)$ — функція початкової умови, $p^{(0)}(x) \in L^2[0, 1]$.

Розв'язок задачі (32)–(34) у випадку $q = q(x)$ одержуємо, поклавши $\gamma = 1$, $f = q$ у знайденому розв'язку задачі (9)–(14), визначеному співвідношеннями (12), (14), (16). Тоді матимемо

$$u_n(t) = \frac{w_n}{\kappa \lambda_n} q_n \Phi_{1n}(t) + p_n^{(0)} \Phi_{2n}^*(t) \quad (n \in N), \quad (35)$$

де позначено

$$\Phi_{2n}^*(t) = E_\alpha(w_n t^\alpha), \quad q_n = (q, z_n)_{L^2(0,1)}, \quad p_n^{(0)} = (p^{(0)}, z_n)_{L^2(0,1)},$$

$$w_n = \kappa \lambda_n / (1 - \tau_r \kappa \lambda_n) \quad (n \in N),$$

а функція $\Phi_{1n}(t)$ визначається першим із співвідношень (17). Отже, розв'язок крайової задачі описується співвідношеннями (12), (35).

Розглянемо одну з можливих методик чисельного моделювання динаміки фільтраційного процесу в межах моделі, що базується на рівнянні (32), де $q = q(x, t)$.

Уведемо різницеву сітку $\omega_{h\tau}$ з кроками h, τ за геометричною змінною та часом відповідно: $\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_j) : x_i = ih \ (i = \overline{0, m+1}), t_j = j\tau \ (j = \overline{0, N+1})\}$.

Для дискретизації рівняння використовуватимемо апроксимацію похідної Капуто за часом [29]

$$D_t^{(\alpha)} u_i^{j+1} = \Delta_t^{(\alpha)} (u_i^{j+1}) + O(\tau^{2-\alpha}) \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{0, N}), \quad (36)$$

де

$$\Delta_t^{(\alpha)} (u_i^{j+1}) = \frac{1}{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^j b_k (u_i^{j+1-k} - u_i^{j-k}), \quad b_k = (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}.$$

Апроксимація дробової похідної за геометричною змінною згідно з формулою Грюнвальда [30] має вигляд

$$D_x^\beta u_i^j = \Delta_x^\beta (u_i^j) + O(h) = \frac{1}{h^\beta} \sum_{s=0}^{i+1} g_s u_{i-s+1}^j + O(h) \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, N+1}), \quad (37)$$

$$\text{де } g_s = \left(\frac{s-\beta-1}{s} \right) g_{s-1} \quad (s = \overline{1, m+1}), \quad g_0 = 1.$$

Для апроксимації похідної за геометричною змінною в момент часу t_{j+1} аналогічно до [31] розглядатимемо варіант різницевої схеми, згідно з яким лише три точки: $i-1, i, i+1$ трактуються як неявні, тобто допустимо, що

$$D_x^\beta u_i^{j+1} \approx \tilde{\Delta}_x^\beta (u_i^{j+1}) := \frac{1}{h^\beta} \left(u_{i+1}^{j+1} + g_1 u_i^{j+1} + g_2 u_{i-1}^{j+1} + \sum_{s=3}^{i+1} g_s u_{i-s+1}^j \right) \quad (38)$$

$$(i = \overline{1, m}, j = \overline{0, N}).$$

$$\text{Тут } \sum_{s=3}^{i+1} (\cdot) \equiv 0, \quad i < 2.$$

З урахуванням співвідношень (36)–(38) поставимо у відповідність задачі (32)–(34) різницеву задачу

$$\Delta_i^{(\alpha)} (u_i^{j+1}) = \kappa \tilde{\Delta}_x^\beta (u_i^{j+1}) + \alpha \beta \Delta_i^j + q_i^j \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{0, N}), \quad (39)$$

$$u_0^{j+1} = 0, \quad u_{m+1}^{j+1} = 0, \quad u_i^0 = p_i^{(0)} \quad (i = \overline{0, m+1}, j = \overline{0, N}),$$

де

$$\alpha \beta \Delta_i^j = \frac{\kappa \tau_r}{\tau^\alpha h^\beta \Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{s=0}^{i+1} b_k g_s (u_{i-s+1}^{j-k} - u_{i-s+1}^{j-1-k}) \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, N}), \quad (40)$$

причому $\alpha \beta \Delta_i^0 = 0 \ (i = \overline{1, m})$.

Представляючи в (39) різницеві оператори згідно зі співвідношеннями (36), (38), (40) та зводячи подібні члени, одержуємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$A u_{i+1}^{j+1} - S u_i^{j+1} + B u_{i-1}^{j+1} = F_i^j \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{0, N}), \quad (41)$$

де

$$A = \frac{\kappa}{h^\beta}, \quad b = A \frac{\beta(\beta-1)}{2}, \quad S = \frac{\kappa\beta}{h^\beta} + \frac{1}{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)},$$

$$F_i^j = \frac{1}{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)} (\Sigma_1 - u_i^j) - \frac{\kappa}{h^\beta} \Sigma_2 - \alpha\beta \Delta_i^j - q_i^j,$$

$$\Sigma_1 = \begin{cases} \sum_{k=1}^j b_k (u_i^{j+1-k} - u_i^{j-k}), & 1 \leq j \leq N, \\ 0, & j=0, \end{cases} \quad \Sigma_2 = \begin{cases} \sum_{s=3}^{i+1} g_s u_{i-s+1}^j, & 2 \leq i \leq m, \\ 0, & i=1. \end{cases}$$

Система рівнянь (41) ефективно розв'язується відомими методами [2].

Імплементацию цієї чисельної методики здійснено на прикладі задачі (32)–(34) в разі функції початкового тиску $p^{(0)}(x) = x^2(1-x)$ та функції джерела вигляду

$$q(x, t) = x^2(1-x)\Gamma(1+\alpha) - \kappa x^{2-\beta} \left(\frac{2}{\Gamma(3-\beta)} - \frac{4}{\Gamma(4-\beta)} x \right) (1+t^\alpha - \tau_r \Gamma(1-\alpha)).$$

Точний розв'язок тестової крайової задачі записується у вигляді $p^*(x) = x^2(1-x)(1+t^\alpha)$.

Деякі з отриманих графічних результатів комп'ютерного моделювання динаміки функції тиску (в безрозмірних змінних t, x) представлено на рис. 1 (неперервні лінії визначають графіки наближеного розв'язку задачі, крапки на графіках — значення точного розв'язку). Відповідні числові значення наближеного і точного розв'язків тестової задачі в різні моменти часу наведено в табл. 1. Залежність відносної L^2 -похибки $E_{re}^{\alpha\beta} = \|p - p^*\| / \|p\|$ відхилення точного і наближеного розв'язків (на фіксований момент часу $t = 1.0$) від порядку α дробової похідної (для фіксованого значення порядку β) відображено на рис. 2. Відповідну залежність відносної похибки від порядку β (для фіксованого α) показано на рис. 3.

Отже, результати розрахунків свідчать про ефективність представленої методики чисельного моделювання нелокальних у часі і просторі процесів фільтрації в тріщинувато-пористому середовищі.

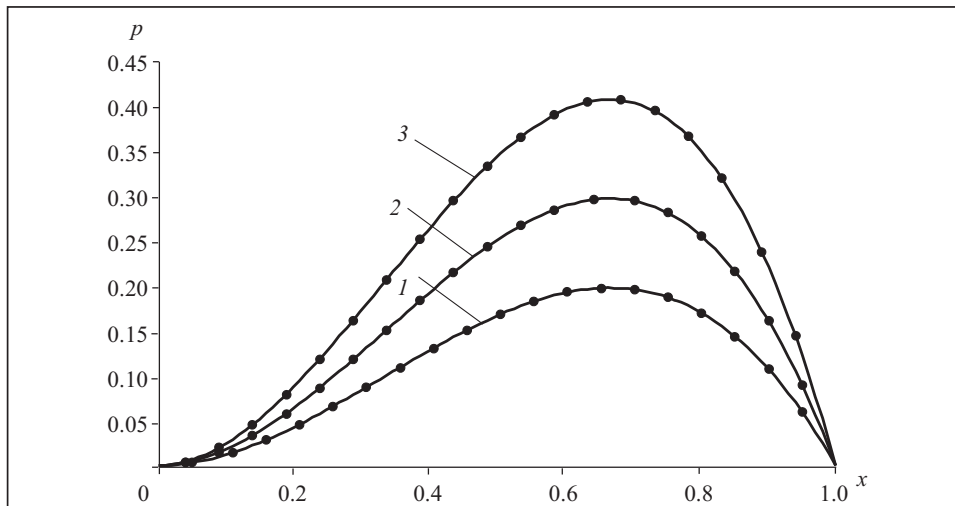


Рис. 1. Графік динаміки функції тиску в області фільтрації для $\alpha = 0.8$, $\beta = 1.8$ у дискретні моменти часу: $t = 0.25$ (1), $t = 1.0$ (2), $t = 2.0$ (3); $\kappa = 0.1$, $\tau_r = 10^{-3}$

Таблиця 1. Числові значення наближеного і точного розв'язків тестової задачі для $\alpha = 0.8$, $\beta = 1.8$ у фіксовані моменти часу

x	Наближений розв'язок	Точний розв'язок	Наближений розв'язок	Точний розв'язок	Наближений розв'язок	Точний розв'язок
	t = 0.25		t = 1.0		t = 2.0	
0.1	0.0117782	0.0117553	0.0177490	0.0176718	0.0243520	0.0242166
0.2	0.0418597	0.0418540	0.0629667	0.0629194	0.0863122	0.0862216
0.3	0.0825270	0.0825454	0.1240950	0.1240910	0.1700730	0.1700480
0.4	0.1260330	0.1260790	0.1894890	0.1895350	0.2596780	0.2597290
0.5	0.1646310	0.1647030	0.2475020	0.2475990	0.3391660	0.3392980
0.6	0.1905730	0.1906680	0.2864850	0.2866330	0.3925740	0.3927870
0.7	0.1961110	0.1962230	0.2947900	0.2949830	0.4039400	0.4042300
0.8	0.1734980	0.1736170	0.2607680	0.2609990	0.3572990	0.3576600
0.9	0.1149850	0.1150980	0.1727710	0.1730280	0.2366880	0.2371100
1	0	0	0	0	0	0

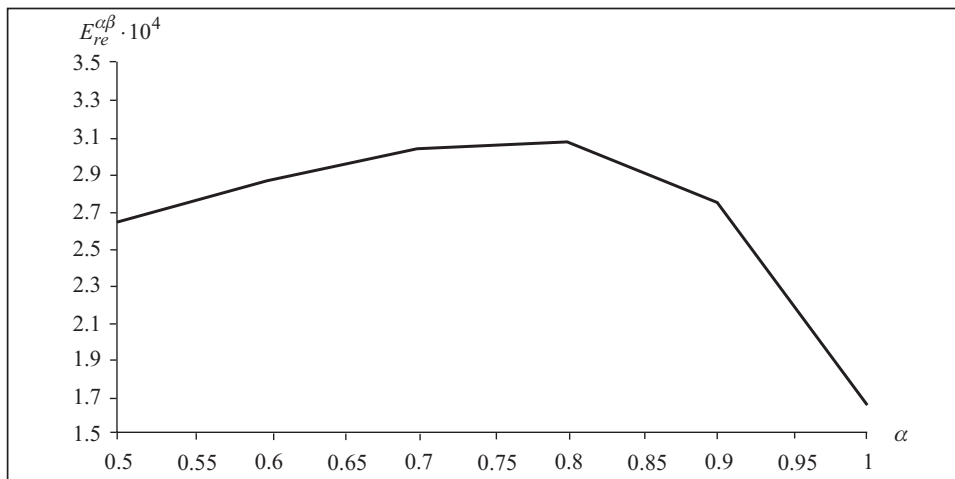


Рис. 2. Залежність похибки $E_{re}^{\alpha\beta}$ у фіксований момент часу від порядку дробової похідної α для фіксованого порядку $\beta = 1.8$

Коротко зупинимося на інших результатах комп'ютерного моделювання динаміки фільтраційного процесу стосовно цієї методики, а саме розрахунку наближеного розв'язку задачі за відсутності джерел $q \equiv 0$ і функції початкового розподілу тиску вигляду $p^{(0)}(x) = x(1-x)$. Відповідну динаміку функції тиску в дискретні моменти часу в області фільтрації для $\alpha = 0.6$, $\beta = 1.8$ графічно представлено на рис. 4.

Залежність функції тиску в області фільтрації (для моменту часу t_*) від величини порядку похідної α для фіксованого значення порядку іншої похідної β ілюструє рис. 5. Відповідні криві функції тиску для різних значень порядку β за фіксованого значення α наведено на рис. 6.

Графічні приклади наочно підтверджують якісне узгодження результатів моделювання динаміки фільтраційного процесу в межах неklasичної математичної моделі з фізичними положеннями, що характеризують процес фільтрації в тріщинувато-пористому середовищі. Зокрема, мають місце: розсіювання полів початкових тисків з плином часу за відсутності джерел тиску (рис. 4); затримка розсіювання полів тиску в разі врахування ефектів пам'яті порівняно з описом

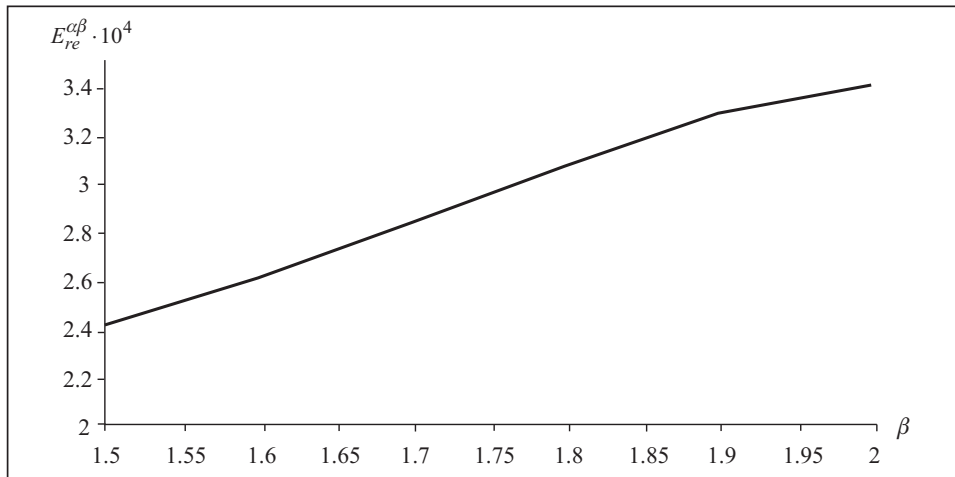


Рис. 3. Залежність похибки $E_{re}^{\alpha\beta}$ у фіксований момент часу від порядку дробової похідної β для фіксованого порядку $\alpha = 0.8$

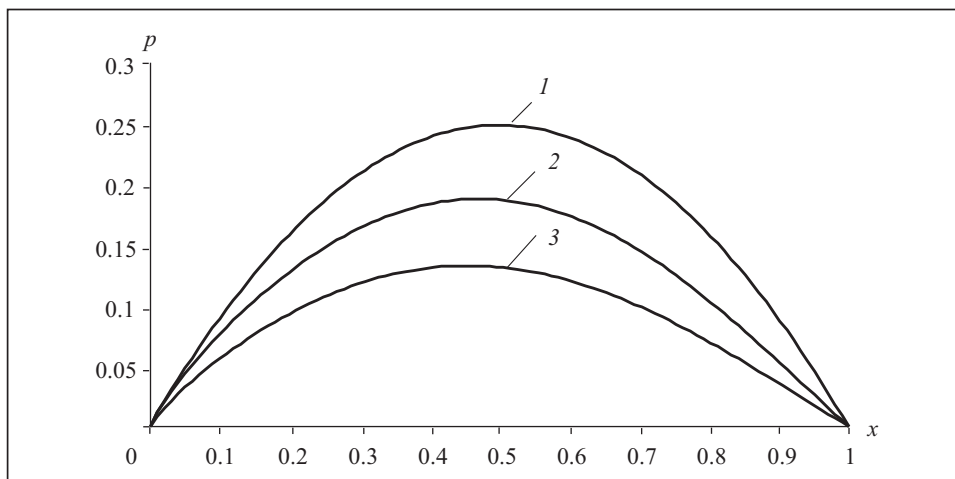


Рис. 4. Графік динаміки функції тиску в області фільтрації для фіксованих α, β за відсутності джерел: $t = 0.0$ (1), $t = 0.25$ (2), $t = 1.0$ (3)

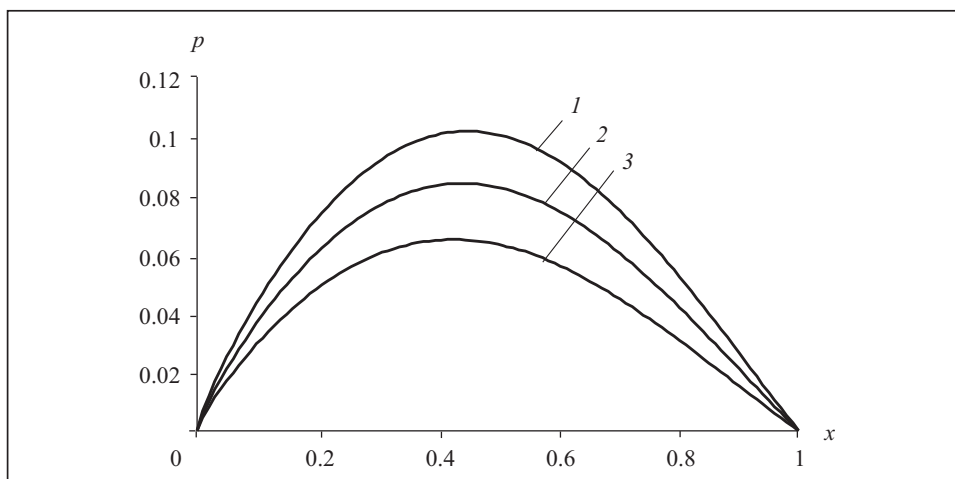


Рис. 5. Графік динаміки функції тиску в області фільтрації у фіксований момент часу t_* залежно від величини порядку α дробової похідної: $\alpha = 0.6$ (1), $\alpha = 0.8$ (2), $\alpha = 1.0$ (3); $t_* = 2.0, \beta = 1.8$

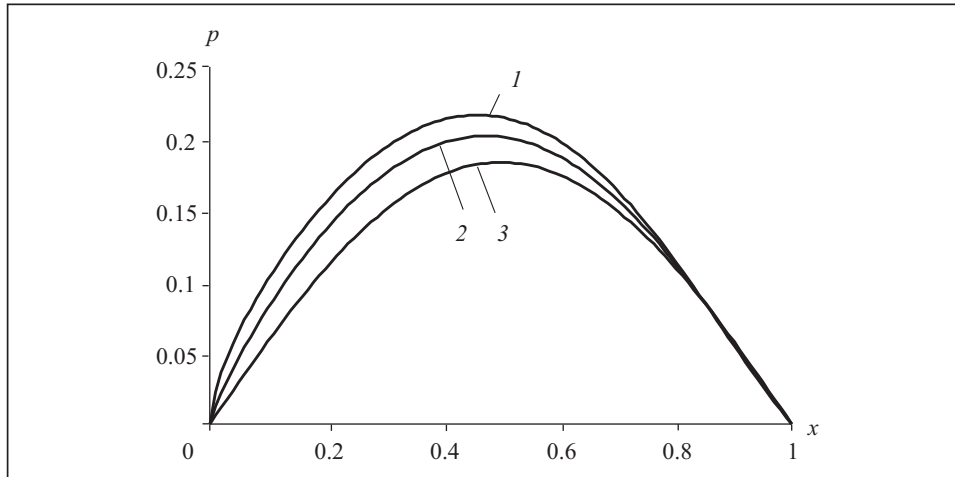


Рис. 6. Графік динаміки функції тиску у фіксований момент часу t_* залежно від величини порядку похідної β для фіксованого значення порядку α : $\beta = 1.6$ (1), $\beta = 1.8$ (2), $\beta = 2.0$ (3); $t_* = 0.25$, $\alpha = 0.8$

процесу в межах класичної математичної моделі (рис. 5); наявність горизонтальної деформації початково осесиметричних кривих розподілу тиску в разі врахування в моделі нелокальності процесу за геометричною змінною (рис. 6).

ЗАДАЧА МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ФІЛЬТРАЦІЙНОГО ПРОЦЕСУ НА ОСНОВІ ВИХІДНОЇ МОДЕЛЬНОЇ СИСТЕМИ

У випадку вихідної модельної системи рівнянь (5), (6) задача математичного моделювання динаміки фільтраційного процесу в тріщинувато-пористому масиві з проникними гранями за умов часової нелокальності зводиться до розв'язання в області Ω крайової задачі

$$\varepsilon_1 D_t^{\alpha, \gamma} p_1(x, t) - \frac{p_2 - p_1}{\tau_r} = \kappa D_x^\beta p_1(x, t) + f_1(x), \quad (42)$$

$$D_t^{\alpha, \gamma} p_2(x, t) + \frac{p_2 - p_1}{\tau_r} = \varepsilon_2 \kappa D_x^\beta p_2(x, t) + f_2(x), \quad (43)$$

$$p_i(0, t) = 0, \quad p_i(1, t) = 0 \quad (t \geq 0, \quad i = 1, 2), \quad (44)$$

$$I^{1-\gamma} p_1(x, t)|_{t=0} = g_1(x), \quad I^{1-\gamma} p_2(x, t)|_{t=0} = g_2(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (45)$$

де $g_1(x)$, $g_2(x)$ — задані функції початкових умов, $f_1(x)$, $f_2(x)$ — функції інтенсивності джерел, $0 < \alpha \leq \gamma \leq 1$, $\beta = 2$, $f_i, g_i \in L^2(0, 1)$ ($i = 1, 2$).

Шукаючи розв'язок задачі (42)–(45) у вигляді

$$p_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(i)}(t) \omega_n(x) \quad ((x, t) \in \Omega, \quad i = 1, 2), \quad (46)$$

де $\omega_n(x)$ — власні функції задачі (13), одержуємо для знаходження невідомих функцій $u_n^{(i)}(t)$ ($n \in N$, $i = 1, 2$) такі послідовності задач Коші:

$$\varepsilon_1 D_t^{\alpha, \gamma} u_n^{(1)}(t) + \left(\frac{1}{\tau_r} - \kappa \lambda_n \right) u_n^{(1)}(t) - \frac{1}{\tau_r} u_n^{(2)}(t) = f_n^{(1)} \quad (n \in N), \quad (47)$$

$$D_t^{\alpha, \gamma} u_n^{(2)}(t) + \left(\frac{1}{\tau_r} - \kappa \varepsilon_2 \lambda_n \right) u_n^{(2)}(t) - \frac{1}{\tau_r} u_n^{(1)}(t) = f_n^{(2)} \quad (n \in N), \quad (48)$$

$$I^{1-\gamma} u_n^{(i)}(t)|_{t=0} = g_n^{(i)} \quad (n \in N, \quad i = 1, 2), \quad (49)$$

де $f_n^{(i)}$, $g_n^{(i)}$, $\lambda_n = \pi^2 n^2$ ($n \in N$, $i = 1, 2$) — коефіцієнти розвинення функцій

$f_i(x), g_i(x) (i=1,2)$ в ряди за власними функціями задачі (13), $f_n^{(i)} = (f_i(x), z_n(x))_{L^2(0,1)}, g_n^{(i)} = (g_i(x), z_n(x))_{L^2(0,1)}$. Домножуючи рівняння (48) на дійсний множник $\theta \neq 0$ і додаючи одержаний результат до (47), маємо співвідношення

$$D_t^{\alpha,\gamma} \left[u_n^{(1)}(t) + \frac{\theta}{\varepsilon_1} u_n^{(2)}(t) \right] + \left(\frac{1 - \kappa \tau_r \lambda_n - \theta}{\tau_r \varepsilon_1} \right) \times \\ \times \left[u_n^{(1)}(t) + \frac{\theta(1 - \kappa \varepsilon_2 \tau_r \lambda_n) - 1}{1 - \kappa \tau_r \lambda_n - \theta} u_n^{(2)}(t) \right] = \frac{1}{\varepsilon_1} (f_n^{(1)} + \theta f_n^{(2)}) \quad (n \in N). \quad (50)$$

Покладаючи в останньому співвідношенні

$$\frac{\theta(1 - \kappa \varepsilon_2 \tau_r \lambda_n) - 1}{1 - \kappa \tau_r \lambda_n - \theta} = \frac{\theta}{\varepsilon_1},$$

одержуємо для визначення величини θ квадратне рівняння

$$\theta^2 + [\varepsilon_1 - 1 + \kappa \tau_r \lambda_n (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2)] \theta - \varepsilon_1 = 0.$$

Звідси маємо

$$\theta_n^{(i)} = \frac{1}{2} [1 - \varepsilon_1 - \kappa \tau_r (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) \lambda_n \pm \sqrt{\Delta_n}] \quad (i=1,2, n \in N), \\ \Delta_n = [1 - \varepsilon_1 - \kappa \tau_r (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) \lambda_n]^2 + 4\varepsilon_1 > 0 \quad (n \in N). \quad (51)$$

Позначивши

$$\psi_n^{(i)}(t) = u_n^{(1)}(t) + \frac{\theta_n^{(i)}}{\varepsilon_1} u_n^{(2)}(t) \quad (i=1,2, n \in N), \quad (52)$$

запишемо співвідношення (50) у вигляді

$$D_t^{\alpha,\gamma} \psi_n^{(i)}(t) - \nu_n^{(i)} \psi_n^{(i)}(t) = F_n^{(i)} \quad (i=1,2, n \in N), \quad (53)$$

де

$$\nu_n^{(i)} = \frac{\theta_n^{(i)} + \kappa \tau_r \lambda_n - 1}{\tau_r \varepsilon_1}, \quad F_n^{(i)} = \frac{1}{\varepsilon_1} (f_n^{(1)} + \theta_n^{(i)} f_n^{(2)}) \quad (i=1,2, n \in N). \quad (54)$$

Зі співвідношень (52) з урахуванням умов (49) знаходимо початкові умови для $\psi_n^{(i)}(t)$ у вигляді

$$I^{1-\gamma} \psi_n^{(i)}(t) \Big|_{t=0} = g_n^{(1)}(t) + \frac{\theta_n^{(i)}}{\varepsilon_1} g_n^{(2)}(t) \equiv s_n^{(i)} \quad (i=1,2, n \in N). \quad (55)$$

Розв'язки задач (53), (55) запишемо у вигляді

$$\psi_n^{(i)}(t) = F_n^{(i)} \tilde{\Phi}_{1n}^{(i)}(t) + s_n^{(i)} \tilde{\Phi}_{2n}^{(i)}(t) \quad (i=1,2, n \in N), \quad (56)$$

де

$$\tilde{\Phi}_{1n}^{(i)}(t) = t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\nu_n^{(i)} t^\alpha), \quad \tilde{\Phi}_{2n}^{(i)}(t) = t^{\gamma-1} E_{\alpha,\gamma}(\nu_n^{(i)} t^\alpha) \quad (i=1,2, n \in N). \quad (57)$$

Тоді з урахуванням (52) та (56), (57) матимемо

$$u_n^{(1)}(t) = \frac{\theta_n^{(1)} \psi_n^{(2)}(t) - \theta_n^{(2)} \psi_n^{(1)}(t)}{\theta_n^{(1)} - \theta_n^{(2)}}, \quad u_n^{(2)}(t) = \frac{\varepsilon_1 (\psi_n^{(1)}(t) - \psi_n^{(2)}(t))}{\theta_n^{(1)} - \theta_n^{(2)}} \quad (n \in N). \quad (58)$$

Отже, формальний розв'язок розглядуваної задачі визначається співвідношеннями (46), (58), (56), (57), (54), (55), (51). Одержаний розв'язок є регулярним розв'язком цієї задачі.

Дійсно, за умов $f_i(x) \in C^2[0,1], f_i(0) = f_i(1) = 0, f_i'(1) = 0, g_i(x) \in C^2[0,1], g_i(0) = g_i(1) = 0, g_i'(1) = 0 (i=1,2)$ маємо співвідношення

$$|f_n^{(i)}| \leq \frac{C_i}{|\lambda_n|^2}, \quad |g_n^{(i)}| \leq \frac{C_i^+}{|\lambda_n|^2} \quad (C_i, C_i^+ > 0, i=1,2, n \in N). \quad (59)$$

Зі співвідношень (54), (55) з урахуванням (59) одержуємо

$$|F_n^{(i)}| \leq \frac{M_1^+}{|\lambda_n|}, |s_n^{(i)}| \leq \frac{M_2^+}{|\lambda_n|} \quad (M_1^+, M_2^+ > 0, i=1, 2, n \in N). \quad (60)$$

Враховуючи (59), (60), (56), зі співвідношень (58) маємо для $t \geq \bar{t} > 0$ (\bar{t} — довільне допоміжне число) такі оцінки:

$$|u_n^{(1)}(t)\omega_n(x)| \leq \frac{M_3}{|\lambda_n|^2 x}, |u_n^{(2)}(t)\omega_n(x)| \leq \frac{M_3^+}{|\lambda_n|^3 x} \quad (61)$$

$$(M_3, M_3^+ > 0, t \geq \bar{t} > 0, n \in N).$$

Оскільки, як зазначалось, для достатньо великих значень n має місце така асимптотика власних значень [26, 28]: $|\lambda_n| \sim O(n^\beta)$ ($\beta=2$), на основі співвідношень (61) робимо висновок, що мажорувальними для рядів (46) є узагальнені гармонічні ряди (22), (31). Тоді ряди (46) є рівномірно збіжними на множині $\Omega_\varepsilon := [0, 1] \times [\varepsilon, +\infty)$ для довільного $\varepsilon > 0$ і визначають неперервні функції $p_1(x, t), p_2(x, t) \in C(\Omega_\varepsilon)$.

ВИСНОВКИ

У роботі одержано замкнені розв'язки деяких одновимірних нестационарних крайових задач аномальної фільтраційної динаміки в тріщинувато-пористих пластах. Постановки відповідних крайових задач виконано в межах математичних моделей, що описують дробово-диференціальну динаміку процесів фільтрації за умов як просторової, так і часової нелокальності та містять похідні Хільфера або Капуто за часовою змінною і Рімана–Ліувілля за геометричною змінною. Разом з прямими задачами фільтрації розглянуто також обернену крайову задачу щодо визначення невідомої функції джерела, залежної від геометричної змінної. Наведено умови існування регулярних розв'язків розглянутих задач. Для окремого випадку часової нелокальності за Капуто запропоновано методику чисельного моделювання динаміки фільтраційного процесу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Полубаринова-Кочина П.Я., Пряжинская В.Г., Эмих В.Н. Математические методы в вопросах орошения. Москва: Наука, 1969. 414 с.
2. Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. Киев: Наук. думка, 1991. 264 с.
3. Lyashko S.I., Klyushin D.A., Timoshenko A.A., Lyashko N.I., Bondar E.S. Optimal control of intensity of water point sources in unsaturated porous medium. *Journal of Automation and Information Science*. 2019. Vol. 51, N 7. P. 24–33.
4. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
5. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. London: Imperial College Press, 2010. 368 p.
6. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопечкий В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. К.: Наук. думка, 2005. 283 с.
7. Хасанов М.М., Булгакова Г.Т. Нелинейные и неравновесные эффекты в реологически сложных средах. Москва; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. 288 с.
8. Sandev T., Tomovsky Z. Fractional equations and models. Theory and applications. Cham, Switzerland: Springer Nature Switzerland AG, 2019. 344 p.
9. Atanackovic T.M., Pilipovic S., Stankovic B., Zorica D. Fractional calculus with applications in mechanics. Hoboken: John Wiley&Sons Inc, 2014. 406 p.
10. Allwright A., Atangana A. Fractal advection-dispersion equation for groundwater transport in fractured aquifers with self-similarities. *The European Physical Journal Plus*. 2018. Vol. 133, N 2. P. 1–14.
11. Kochubei A.N. Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion. *Journ. Math. Anal. Appl.* 2008. Vol. 340. P. 252–281.
12. Chechkin A.V., Gorenflo R., Sokolov I.M., Gonchar V.Y. Distributed order time fractional diffusion equation. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 2003. N 6. P. 259–281.

13. Bogaenko V., Bulavatsky V. Fractional-fractal modeling of filtration-consolidation processes in saline saturated soils. *Fractal and Fractional*. 2020. Vol. 59, N 4. P. 2–12.
14. Bulavatsky V.M. Mathematical modeling of fractional differential filtration dynamics based on models with Hilfer–Prabhakar derivative. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 2. P. 204–216.
15. Bulavatsky V.M., Bogaenko V.A. Mathematical modeling of dynamics of the nonequilibrium in time convective diffusion process in domain with free boundaries. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52, N 3. P. 427–440.
16. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. *Докл. АН СССР*. 1960. Т. 132, вып. 3. С. 545–548.
17. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. *Прикл. матем. и мех.* 1960. Т. 24, вып. 3. С. 852–864.
18. Баренблатт Г.И., Ентов В.Н., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. Москва: Недра, 1984. 303 с.
19. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. Москва: Недра, 1970. 339 с.
20. Hilfer R. Fractional time evolution. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. Ed. Hilfer R. Singapore: World scientific, 2000. P. 87–130.
21. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
22. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. Mittag-Leffler functions, related topics and applications. Berlin: Springer Verlag, 2014. 454 p.
23. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
24. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. Москва: Физматлит, 2003. 272 с.
25. Aleroev T.S., Kirane M., Tang Y.-F. Boundary-value problems for differential equations of fractional order. *Journal of Mathematical Science*. 2013. Vol. 194, N 5. P. 499–512.
26. Хасамбиев М.В., Алероев Т.С. Краевая задача для одномерного дробно-дифференциального уравнения адвекции-диффузии. *Вестн. Моск. гос. строит. ун-та*. 2014. № 6. С. 71–76.
27. Aleroev T.S., Kirane M., Malik S.A. Determination of source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determining condition. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2013. Vol. 270. P. 1–16.
28. Plociniczak L. Eigenvalue asymptotics for a fractional boundary-value problem. *Applied Mathematics and Computation*. 2014. Vol. 241. P. 125–128.
29. Lin Y., Xu C. Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation. *Journ. Comput. Phys.* 2007. Vol. 225, N 2. P. 1533–1552.
30. Tadjeran C., Meerschaert H.M., Scheffler H.P. A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation. *Journ. Comput. Phys.* 2006. Vol. 213, N 1. P. 205–213.
31. Deng Z.Q., Singh V.P., Bengtsson L. Numerical solution of fractional advection-dispersion equation. *Journ. Hydraul. Eng. (ASCE)*. 2004. Vol. 130, N 5. P. 422–431.

V.M. Bulavatsky, V.O. Bohaienko

BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR SPACE-TIME FRACTIONAL DIFFERENTIAL FILTRATION DYNAMICS IN FRACTURED-POROUS MEDIA

Abstract. Closed-form solutions are obtained for some non-stationary boundary-value problems of filtration dynamics in fractured-porous formations, posed within the framework of fractional-differential mathematical models, taking into account the space-time nonlocality of the process. The indicated mathematical models of anomalous filtration dynamics are formulated using the Hilfer or Caputo derivatives with respect to the time variable and the Riemann–Liouville derivative with respect to the geometric variable. Along with direct filtration problems, we also consider the inverse boundary-value problem of determining the unknown source function that depends only on the geometric variable. Conditions of the existence of regular solutions for the considered problems are given.

Keywords: mathematical modeling, fractional-differential dynamics of filtration processes, fractured-porous media, non-classical models, Hilfer, Caputo, and Riemann–Liouville derivatives, boundary value problems, closed-form solutions, numerical solutions.

Надійшла до редакції 06.10.2021