

О.М. ЛИТВИНУкраїнська інженерно-педагогічна академія, Харків, Україна,
e-mail: *academ_mail@ukr.net*.**О.Г. ЛИТВИН**Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна,
e-mail: *litvinog@ukr.net*.**АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО
ЕКСПЕРИМЕНТУ ВІДНОВЛЕННЯ РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ
ДВОХ ЗМІННИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ПРОЄКЦІЙ. ІІІ¹**

Анотація. Ця стаття є продовженням серії публікацій авторів під однойменною назвою. Вона присвячена подальшому вдосконаленню методу відновлення розривних функцій двох змінних за допомогою проєкцій для підвищення точності наближення без явища Гіббса у разі, коли лінії розриву є системою границь квадратів, вкладених один в один. Розглянуто випадок, коли лінії розриву мають кутові точки, в яких похідна за нормаллю є невизначеною. Розривний сплайн побудовано так, щоб різниця між наближуваною функцією і цим сплайном була неперервною або диференційовною функцією. Цю функцію наближують за допомогою скінченних сум Фур'є, коефіцієнти Фур'є в яких визначають з використанням проєкцій. Аналіз результатів обчислювального експерименту показав їхню відповідність теоретичним твердженням роботи.

Ключові слова: комп'ютерна томографія, розривна функція, розривний сплайн, клас диференційовності, явище Гіббса, сума Фур'є.

ВСТУП

У першій та другій частинах цієї статті [1, 2] наведено аналіз результатів обчислювального експерименту відновлення розривних функцій двох змінних з використанням проєкцій та скінченних сум Фур'є без явища Гіббса. При цьому вважалось, що лінії розриву наближуваної функції є відомими і було запропоновано будувати розривний сплайн так, щоб різниця між наближуваною функцією і цим сплайном була неперервною або диференційовною функцією. Лініями розриву були система концентричних кіл або еліпсів з одним центром. Особливістю такого типу ліній розриву є те, що в кожній точці ліній розриву існують односторонні похідні за нормаллю. Ці функції наближувалися скінченними сумами Фур'є з використанням проєкцій [3].

У цій статті лінії розриву розглядаються як система границь квадратів, вкладених один в один. Тоді лінії розриву мають кутові точки, в яких похідна за нормаллю є невизначеною. Пропонується узагальнення методу побудови розривного сплайна у такий спосіб, щоб різниця між наближуваною функцією і цим сплайном була неперервною або диференційовною функцією. Це дає змогу наближувати розривну функцію з більш високою точністю без явища Гіббса для заданої кількості проєкцій. У цій частині статті наведено метод побудови такого сплайна та метод знаходження проєкцій для зазначеної неперервної або диференційовної функції. Зауважимо, що для побудови таких розривних сплайнів істотно використовуються оператори сплайн-інтерлінації Лагранжевого та Ермітового типів [4–6].

Зазначимо також, що для зменшення впливу явища Гіббса на точність наближення розривної функції сумами Фур'є у роботах [7–9] використано метод домноження коефіцієнтів Фур'є на спеціально підібрані експоненціальні множники, але разом з тим явище Гіббса не зникло повністю.

¹ Початок див. № 5, 2021 та № 1 2022.

ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Вважатимемо, що область, в якій задана розривна функція $f(x, y)$, належить квадрату $D = [0, 1]^2$ і розбивається на $M + 1$ підобласть D_k , $k = \overline{1, M + 1}$:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y): 0.5 - t_1 \leq x \leq 0.5 + t_1, 0.5 - t_1 \leq y \leq 0.5 + t_1\}, \\ D_k &= \{(x, y): 0.5 - t_k \leq x \leq 0.5 + t_k, 0.5 - t_k \leq y \leq 0.5 + t_k\} \setminus \\ &\setminus \{(x, y): 0.5 - t_{k-1} \leq x \leq 0.5 + t_{k-1}, 0.5 - t_{k-1} \leq y \leq 0.5 + t_{k-1}\}, \quad k = \overline{2, M}, \\ D_{M+1} &= D \setminus \{(x, y): 0.5 - t_M \leq x \leq 0.5 + t_M, 0.5 - t_M \leq y \leq 0.5 + t_M\}, \\ &0 < t_1 < t_2 < \dots < t_M < t_{M+1} = 0.5; \\ x_{k,1} &= 0.5 - t_k, \quad x_{k,2} = 0.5 + t_k, \quad k = \overline{1, M}, \quad x_{M+1,1} = 0, \quad x_{M+1,2} = 1; \\ y_{l,1} &= 0.5 - t_l, \quad y_{l,2} = 0.5 + t_l, \quad l = \overline{1, M}, \quad y_{M+1,1} = 0, \quad y_{M+1,2} = 1. \end{aligned}$$

Позначимо Γ_k , $k = \overline{1, M + 1}$, лінії розриву функції $f(x, y)$. Вважатимемо, що тестова розривна функція $f(x, y)$ задана відомими виразами в кожній області, на які розбивається квадрат:

$$f(x, y) = f_k(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D_k}, \quad k = \overline{1, M + 1}.$$

Вважаємо також, що функції $f_k(x, y) \in C^2(\overline{D_k})$, $k = \overline{1, M + 1}$.

Уведемо до розгляду функцію $\varphi(x, y) = f(x, y) - Sp(x, y)$. Далі будуватимемо розривний сплайн $Sp(x, y)$ так, щоб функція $\varphi(x, y)$ була неперервною ($r = 0$) або диференційовною ($r = 1$). Отже, матимемо два випадки для побудови розривного сплайна.

ПОБУДОВА РОЗРИВНОГО СПЛАЙНА

Випадок 1. Покладемо $r = 0$. Задача полягає у побудові розривного сплайна $Sp(x, y)$, який має такі самі лінії розриву, що й функція $f(x, y)$, а також має такі самі односторонні границі (а отже, і стрибки) на лініях розриву, що й функція $f(x, y)$.

Побудуємо розривний сплайн $Sp(x, y)$ у вигляді

$$\begin{aligned} Sp(x, y) &= \psi_k(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D_k}, \quad k = \overline{1, M + 1}, \\ \psi_1(x, y) &= O_1 f_1(x, y) + O_2 f_1(x, y) - O_1 O_2 f_1(x, y), \\ O_1 f_1(x, y) &= \frac{x - x_{1,2}}{x_{1,1} - x_{1,2}} f_1(x_{1,1}, y) + \frac{x - x_{1,1}}{x_{1,2} - x_{1,1}} f_1(x_{1,2}, y), \\ O_2 f_1(x, y) &= \frac{y - y_{1,2}}{y_{1,1} - y_{1,2}} f_1(x, y_{1,1}) + \frac{y - y_{1,1}}{y_{1,2} - y_{1,1}} f_1(x, y_{1,2}); \\ O_1 O_2 f_1(x, y) &= \frac{x - x_{1,2}}{x_{1,1} - x_{1,2}} O_2 f_1(x_{1,1}, y) + \frac{x - x_{1,1}}{x_{1,2} - x_{1,1}} O_2 f_1(x_{1,2}, y); \\ \psi_k(x, y) &= O_{1,k} f_k(x, y) + O_{2,k} f_k(x, y) - O_{1,k} O_{2,k} f_k(x, y), \quad k = \overline{2, M + 1}; \\ O_{1,k} f_k(x, y) &= \frac{x - x_{k-1,1}}{x_{k,1} - x_{k-1,1}} f_k(x_{k,1}, y) + \frac{x - x_{k,1}}{x_{k-1,1} - x_{k,1}} f_k(x_{k-1,1}, y), \quad x_{k,1} \leq x \leq x_{k-1,1}; \\ O_{1,k} f_k(x, y) &= 0, \quad x_{k-1,1} < x < x_{k-1,2}, \end{aligned}$$

$$O_{1,k} f_k(x, y) = \frac{x-x_{k,2}}{x_{k-1,2}-x_{k,2}} f_k(x_{k-1,2}, y) + \frac{x-x_{k-1,2}}{x_{k,2}-x_{k-1,2}} f_k(x_{k,2}, y), \quad x_{k-1,2} \leq x \leq x_{k,2},$$

$$k = \overline{2, M+1};$$

$$O_{2,k} f_k(x, y) = \frac{y-y_{k-1,1}}{y_{k,1}-y_{k-1,1}} f_k(x, y_{k,1}) + \frac{y-y_{k,1}}{y_{k-1,1}-y_{k,1}} f_k(x, y_{k-1,1}), \quad y_{k,1} \leq y \leq y_{k-1,1},$$

$$O_{2,k} f_k(x, y) = 0, \quad y_{k-1,1} < y < y_{k-1,2},$$

$$O_{2,k} f_k(x, y) = \frac{y-y_{k,2}}{y_{k-1,2}-y_{k,2}} f_k(x, y_{k-1,2}) +$$

$$+ \frac{y-y_{k-1,2}}{y_{k,2}-y_{k-1,2}} f_k(x, y_{k-1,2}), \quad y_{k-1,2} \leq y \leq y_{k,2}, \quad k = \overline{2, M+1};$$

$$O_{1,k} O_{2,k} f_k(x, y) = O_{1,k}(O_{2,k} f_k(x, y)).$$

Розривний сплайн для випадку $r=0$ побудовано.

Запишемо функцію $\varphi(x, y)$ у вигляді

$$\varphi(x, y) = \varphi_k(x, y), \quad \varphi_k(x, y) = f_k(x, y) - \psi_k(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}_k, \quad k = \overline{1, M+1}.$$

Теорема 1. Функція $\varphi(x, y)$ має такі властивості:

$$1) \varphi_1(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_1, \quad \varphi_k(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_{k-1}, \quad (x, y) \in \Gamma_k, \quad k = \overline{2, M+1};$$

$$2) \varphi(x, y) \in C(\overline{D}), \quad \text{якщо } f_k(x, y) \in C(\overline{D}_k).$$

Доведення виконаємо безпосередньою послідовною перевіркою її тверджень для функцій $\varphi_k(x, y)$, $k = \overline{1, M+1}$. Доведемо справедливості першого твердження теореми.

Для функції $\varphi_1(x, y)$ отримаємо

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_{1,1}, y) &= f_1(x_{1,1}, y) - \psi_1(x_{1,1}, y) = \\ &= f_1(x_{1,1}, y) - (O_1 f_1(x_{1,1}, y) + O_2 f_1(x_{1,1}, y) - O_1 O_2 f_1(x_{1,1}, y)) = \\ &= f_1(x_{1,1}, y) - f_1(x_{1,1}, y) - O_2 f_1(x_{1,1}, y) + O_2 f_1(x_{1,1}, y) = 0, \quad y_{1,1} \leq y \leq y_{1,2}. \end{aligned}$$

Так само доводиться, що

$$\varphi_1(x_{1,2}, y) = 0, \quad y_{1,1} \leq y \leq y_{1,2}, \quad \varphi_1(x, y_{1,1}) = 0, \quad x_{1,1} \leq x \leq x_{1,2},$$

$$\varphi_1(x, y_{1,2}) = 0, \quad x_{1,1} \leq x \leq x_{1,2}.$$

Отже, доведено, що на чотирьох відрізках, з яких складається границя Γ_1 квадрата D_1 , справедлива рівність $\varphi_1(x, y) = 0$, тобто $\varphi_1(x, y) = 0$, $(x, y) \in \Gamma_1$.

Аналогічно можна довести, що $\varphi_k(x, y) = 0$, $(x, y) \in \Gamma_{k-1}$, $(x, y) \in \Gamma_k$, $k = \overline{2, M+1}$.

Для доведення справедливості другого твердження теореми враховуємо, що з умов $f_k(x, y) \in C(\overline{D}_k)$ випливає $\psi_k(x, y) \in C(\overline{D}_k)$, $k = \overline{1, M+1}$.

Тоді й $\varphi_k(x, y) \in C(\overline{D}_k)$, $k = \overline{1, M+1}$. Отже, $\varphi(x, y) \in C(\overline{D})$.

Теорему 1 доведено.

Випадок 2. Покладемо $r=1$. Задача полягає у побудові розривного сплайна $Sp(x, y)$, який має такі властивості:

1) має такі самі лінії розриву, що й функція $f(x, y)$;
 2) має такі самі односторонні границі (а отже, і стрибки) на лініях розриву, що й функція $f(x, y)$.

3) похідна за нормаллю до ліній розриву від сплайна має такі самі односторонні границі (стрибки), що й похідна за нормаллю до ліній розриву від наближеної функції. Це похідні $\frac{\partial}{\partial x} Sp(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y} Sp(x, y)$ та $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$, оскільки лініями розриву є границі квадратів.

Уведемо базисні поліноми третього степеня двоточної ермітової інтерполяції функцій однієї змінної:

$$H_{0,0}(t) = (t-1)^2(1+2t), \quad H_{0,1}(t) = t(t-1)^2, \quad H_{1,0}(t) = t^2(3-2t), \quad H_{1,1}(t) = (t-1)t^2.$$

Перші похідні від цих поліномів у точках $t=0$, $t=1$ мають властивості

$$H_{k,s}^{(p)}(q) = \delta_{k,q} \cdot \delta_{p,s}, \quad k, s, p, q \in \{0, 1\}, \quad H_{k,s}^{(p)}(t) = \frac{\partial^p}{\partial t^p} H_{k,s}(t).$$

Надалі будемо вважати, що

$$f_k^{(s,0)}(x_{l,i}, y) = \frac{\partial^s}{\partial x^s} f_k(x, y) \Big|_{x=x_{l,i}}, \quad f_k^{(0,p)}(x, y_{l,j}) = \frac{\partial^p}{\partial y^p} f_k(x, y) \Big|_{y=y_{l,j}},$$

$$i, j = 1, 2; \quad k, l = \overline{1, M+1}.$$

Побудуємо розривний сплайн $Sp(x, y)$:

$$Sp(x, y) = \psi_k(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D_k}, \quad k = \overline{1, M+1},$$

$$\psi_1(x, y) = O_1 f_1(x, y) + O_2 f_1(x, y) - O_1 O_2 f_1(x, y),$$

$$O_1 f_1(x, y) = \sum_{s=0}^1 H_{0,s} \left(\frac{x - x_{1,1}}{x_{1,2} - x_{1,1}} \right) \cdot (x_{1,2} - x_{1,1})^s f_1^{(s,0)}(x_{1,1}, y) +$$

$$+ \sum_{s=0}^1 H_{1,s} \left(\frac{x - x_{1,1}}{x_{1,2} - x_{1,1}} \right) \cdot (x_{1,2} - x_{1,1})^s f_1^{(s,0)}(x_{1,1}, y), \quad x_{1,1} \leq x \leq x_{1,2},$$

$$O_2 f_1(x, y) = \sum_{p=0}^1 H_{0,p} \left(\frac{y - y_{1,1}}{y_{1,2} - y_{1,1}} \right) \cdot (y_{1,2} - y_{1,1})^p f_1^{(0,p)}(x, y_{1,1}) +$$

$$+ \sum_{p=0}^1 H_{1,p} \left(\frac{y - y_{1,1}}{y_{1,2} - y_{1,1}} \right) \cdot (y_{1,2} - y_{1,1})^p f_1^{(0,p)}(x, y_{1,2}), \quad y_{1,1} \leq y \leq y_{1,2},$$

$$O_1 O_2 f_1(x, y) = \sum_{s=0}^1 H_{0,s} \left(\frac{x - x_{1,1}}{x_{1,2} - x_{1,1}} \right) \cdot (x_{1,2} - x_{1,1})^s (O_2 f_1)^{(s,0)}(x, y) \Big|_{x=x_{1,1}} +$$

$$+ \sum_{s=0}^1 H_{1,s} \left(\frac{x - x_{1,1}}{x_{1,2} - x_{1,1}} \right) \cdot (x_{1,2} - x_{1,1})^s (O_2 f_1)^{(s,0)}(x, y) \Big|_{x=x_{1,1}}, \quad x_{1,1} \leq x \leq x_{1,2},$$

$$\psi_k(x, y) = O_{1,k} f_k(x, y) + O_{2,k} f_k(x, y) - O_{1,k} O_{2,k} f_k(x, y), \quad k = \overline{2, M+1};$$

$$\begin{aligned}
O_{1,k} f_k(x, y) &= \sum_{s=0}^1 H_{0,s} \left(\frac{x - x_{k,1}}{x_{k-1,1} - x_{k,1}} \right) \cdot (x_{k-1,1} - x_{k,1})^s f_k^{(s,0)}(x_{k,1}, y) + \\
&+ \sum_{s=0}^1 H_{1,s} \left(\frac{x - x_{k,1}}{x_{k-1,1} - x_{k,1}} \right) \cdot (x_{k-1,1} - x_{k,1})^s f_k^{(s,0)}(x_{k-1,1}, y), \quad x_{k,1} \leq x \leq x_{k-1,1}, \\
O_{1,k} f_k(x, y) &= 0, \quad x_{k-1,1} < x < x_{k-1,2}, \\
O_{1,k} f_k(x, y) &= \sum_{s=0}^1 H_{0,s} \left(\frac{x - x_{k-1,2}}{x_{k,2} - x_{k-1,2}} \right) \cdot (x_{k,2} - x_{k-1,2})^s f_k^{(s,0)}(x_{k-1,2}, y) + \\
&+ \sum_{s=0}^1 H_{1,s} \left(\frac{x - x_{k-1,2}}{x_{k,2} - x_{k-1,2}} \right) \cdot (x_{k,2} - x_{k-1,2})^s f_k^{(s,0)}(x_{k,2}, y), \\
&x_{k-1,2} \leq x \leq x_{k,2}, \quad k = \overline{2, M+1}; \\
O_{2,k} f_k(x, y) &= \sum_{p=0}^1 H_{0,p} \left(\frac{y - y_{k,1}}{y_{k-1,1} - y_{k,1}} \right) \cdot (y_{k-1,1} - y_{k,1})^p f_k^{(0,p)}(x, y_{k,1}) + \\
&+ \sum_{p=0}^1 H_{1,p} \left(\frac{y - y_{k,1}}{y_{k-1,1} - y_{k,1}} \right) \cdot (y_{k-1,1} - y_{k,1})^p f_k^{(0,p)}(x, y_{k-1,1}), \quad y_{k,1} \leq y \leq y_{k-1,1}, \\
O_{2,k} f_k(x, y) &= 0, \quad y_{k-1,1} < y < y_{k-1,2}, \\
O_{2,k} f_k(x, y) &= \sum_{p=0}^1 H_{0,p} \left(\frac{y - y_{k-1,2}}{y_{k,2} - y_{k-1,2}} \right) \cdot (y_{k,2} - y_{k-1,2})^p f_k^{(0,p)}(x, y_{k-1,2}) + \\
&+ \sum_{p=0}^1 H_{1,p} \left(\frac{y - y_{k-1,2}}{y_{k,2} - y_{k-1,2}} \right) \cdot (y_{k,2} - y_{k-1,2})^p f_k^{(0,p)}(x, y_{k,2}), \quad y_{k-1,2} \leq y \leq y_{k,2}, \\
&k = \overline{2, M+1}; \\
O_{1,k} O_{2,k} f_k(x, y) &= O_{1,k}(O_{2,k} f_k(x, y)).
\end{aligned}$$

Розривний сплайн для випадку $r=1$ побудовано.

Подемо функцію $\varphi(x, y)$ у вигляді

$$\varphi(x, y) = \varphi_k(x, y), \quad \varphi_k(x, y) = f_k(x, y) - \psi_k(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}_k, \quad k = \overline{1, M+1}.$$

Теорема 2. Функція $\varphi(x, y)$ має такі властивості:

- 1) $\varphi_1(x, y) = 0$, $(x, y) \in \Gamma_1$, $\varphi_k(x, y) = 0$, $(x, y) \in \Gamma_{k-1}$, $(x, y) \in \Gamma_k$, $k = \overline{2, M+1}$;
- 2) $\frac{\partial}{\partial x} \varphi_1(x, y) = 0$, $x = x_{1,1}$, $x = x_{1,2}$, $y_{1,1} \leq y \leq y_{1,2}$, $\frac{\partial}{\partial y} \varphi_1(x, y) = 0$, $y = y_{1,1}$,
 $y = y_{1,2}$, $x_{1,1} \leq x \leq x_{1,2}$;
- 3) $\frac{\partial}{\partial x} \varphi_k(x, y) = 0$, $x = x_{k,1}$, $x = x_{k,2}$, $y_{k,1} \leq y \leq y_{k,2}$, $x = x_{k-1,1}$, $x = x_{k-1,2}$,
 $y_{k-1,1} \leq y \leq y_{k-1,2}$, $k = \overline{2, M+1}$;
- 4) $\frac{\partial}{\partial y} \varphi_k(x, y) = 0$, $y = y_{k,1}$, $y = y_{k,2}$, $x_{k,1} \leq x \leq x_{k,2}$, $y = y_{k-1,1}$, $y = y_{k-1,2}$,
 $x_{k-1,1} \leq x \leq x_{k-1,2}$, $k = \overline{2, M+1}$;
- 5) $\varphi(x, y) \in C^1(\overline{D})$, якщо $f_k(x, y) \in C^2(\overline{D}_k)$.

Доведення виконаємо безпосередньою послідовною перевіркою її тверджень.

1. Доведемо, що $\varphi_1(x, y)|_{\Gamma_1} = 0$.

Спочатку доведемо, що $\varphi_1(x_{1,1}, y) = 0$, $y_{1,1} \leq y \leq y_{1,2}$.

Для цього визначимо таку послідовність рівностей:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_{1,1}, y) &= f_1(x_{1,1}, y) - \psi_1(x_{1,1}, y) = \\ &= f_1(x_{1,1}, y) - (O_1 f_1(x_{1,1}, y) + O_2 f_1(x_{1,1}, y) - O_1 O_2 f_1(x_{1,1}, y)) = \\ &= f_1(x_{1,1}, y) - f_1(x_{1,1}, y) - O_2 f_1(x_{1,1}, y) + O_2 f_1(x_{1,1}, y) = 0, \quad y_{1,1} \leq y \leq y_{1,2}. \end{aligned}$$

Аналогічно доведемо, що

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_{1,2}, y) &= 0, \quad y_{1,1} \leq y \leq y_{1,2}, \quad \varphi_1(x, y_{1,1}) = 0, \quad x_{1,1} \leq x \leq x_{1,2}, \\ \varphi_1(x, y_{1,2}) &= 0, \quad x_{1,1} \leq x \leq x_{1,2}, \end{aligned}$$

врахувавши, що $\psi_1(x, y)$ є оператором інтерлінації Ермітового типу [6] на системі попарно перпендикулярних відрізків прямих, з об'єднання яких складається границя області D_1 .

Отже, доведено, що на чотирьох відрізках, з яких складається границя Γ_1 квадрата D_1 , має місце рівність $\varphi_1(x, y) = 0$, тобто твердження $\varphi_1(x, y)|_{\Gamma_1} = 0$ справджується.

Аналогічно можна довести інші твердження теореми, а саме: $\varphi_k(x, y) = 0$, $(x, y) \in \Gamma_{k-1}$, $(x, y) \in \Gamma_k$, $k = 2, M + 1$.

2. Доведемо, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_1(x, y) &= 0, \quad x = x_{1,1}, \quad x = x_{1,2}, \quad y_{1,1} \leq y \leq y_{1,2}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \varphi_1(x, y) &= 0, \quad y = y_{1,1}, \quad y = y_{1,2}, \quad x_{1,1} \leq x \leq x_{1,2}. \end{aligned}$$

Спочатку доведемо, що $\frac{\partial}{\partial x} \varphi_1(x, y) = 0$, $x = x_{1,1}$, $y_{1,1} \leq y \leq y_{1,2}$.

Запишемо такі рівності:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_1(x, y) \Big|_{x=x_{1,1}} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} f_1(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \psi_1(x, y) \right) \Big|_{x=x_{1,1}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} f_1(x, y) \Big|_{x=x_{1,1}} - \frac{\partial}{\partial x} (O_1 f_1(x, y) + O_2 f_1(x, y) - O_1 O_2 f_1(x, y)) \Big|_{x=x_{1,1}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} f_1(x, y) \Big|_{x=x_{1,1}} - \frac{\partial}{\partial x} O_1 f_1(x, y) \Big|_{x=x_{1,1}} - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} O_2 f_1(x, y) \Big|_{x=x_{1,1}} + \frac{\partial}{\partial x} O_1 O_2 f_1(x, y) \Big|_{x=x_{1,1}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} f_1(x, y) \Big|_{x=x_{1,1}} - \frac{\partial}{\partial x} f_1(x, y) \Big|_{x=x_{1,1}} - \frac{\partial}{\partial x} O_2 f_1(x, y) \Big|_{x=x_{1,1}} + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} O_2 f_1(x, y) \Big|_{x=x_{1,1}} = 0, \quad y_{1,1} \leq y \leq y_{1,2}. \end{aligned}$$

Аналогічно можна довести, що $\frac{\partial}{\partial x} \varphi_1(x, y) = 0$, $x = x_{1,2}$, $y_{1,1} \leq y \leq y_{1,2}$, а також $\frac{\partial}{\partial y} \varphi_1(x, y) = 0$, $y = y_{1,1}$, $x_{1,1} \leq x \leq x_{1,2}$, $\frac{\partial}{\partial y} \varphi_1(x, y) = 0$, $y = y_{1,2}$, $x_{1,1} \leq x \leq x_{1,2}$.

3. Доведемо, що

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi_k(x, y) = 0, \quad x = x_{k,1}, \quad x = x_{k,2}, \quad y_{k,1} \leq y \leq y_{k,2};$$

$$x = x_{k-1,1}, \quad x = x_{k-1,2}, \quad y_{k-1,1} \leq y \leq y_{k-1,2}, \quad k = \overline{2, M+1}.$$

Доведемо спочатку перше твердження:

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi_k(x, y) = 0, \quad x = x_{k,1}, \quad y_{k,1} \leq y \leq y_{k,2}, \quad k = \overline{2, M+1}.$$

Визначаємо рівності:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_k(x, y) \Big|_{x=x_{k,1}} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} f_k(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \psi_k(x, y) \right) \Big|_{x=x_{k,1}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} f_k(x, y) \Big|_{x=x_{k,1}} - \frac{\partial}{\partial x} (O_{1,k} f_k(x, y) + O_{2,k} f_k(x, y) - O_{1,k} O_{2,k} f_k(x, y)) \Big|_{x=x_{k,1}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} f_k(x, y) \Big|_{x=x_{k,1}} - \frac{\partial}{\partial x} O_{1,k} f_k(x, y) \Big|_{x=x_{k,1}} - \frac{\partial}{\partial x} O_{2,k} f_k(x, y) \Big|_{x=x_{k,1}} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} O_{1,k} O_{2,k} f_k(x, y) \Big|_{x=x_{k,1}} = \frac{\partial}{\partial x} f_k(x, y) \Big|_{x=x_{k,1}} - \frac{\partial}{\partial x} f_k(x, y) \Big|_{x=x_{k,1}} - \\ &- \frac{\partial}{\partial x} O_{2,k} f_k(x, y) \Big|_{x=x_{k,1}} + \frac{\partial}{\partial x} O_{2,k} f_k(x, y) \Big|_{x=x_{k,1}} = 0, \\ &y_{k,1} \leq y \leq y_{k,2}, \quad k = \overline{2, M+1}. \end{aligned}$$

Аналогічно можна довести, що $\frac{\partial}{\partial x} \varphi_k(x, y) = 0$, $x = x_{k,2}$, $y_{k,1} \leq y \leq y_{k,2}$, $k = \overline{2, M+1}$, та

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi_k(x, y) = 0, \quad x = x_{k-1,1}, \quad y_{k-1,1} \leq y \leq y_{k-1,2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi_k(x, y) = 0, \quad x = x_{k-1,2}, \quad y_{k-1,1} \leq y \leq y_{k-1,2}, \quad k = \overline{2, M+1}.$$

Усі доведення у цьому пункті ґрунтуються на використанні операторів $O_{1,k}$, $O_{2,k}$, заданих у вигляді трьох різних аналітичних виразів для різних інтервалів задання змінних x , y відповідно. При цьому великою мірою використовуються властивості базисних поліномів $H_{i,s}(t)$, $i, s \in \{0, 1\}$.

4. Доведення того, що

$$\frac{\partial}{\partial y} \varphi_k(x, y) = 0, \quad y = y_{k,1}, \quad y = y_{k,2}, \quad x_{k,1} \leq x \leq x_{k,2}, \quad y = y_{k-1,1}, \quad y = y_{k-1,2},$$

$$x_{k-1,1} \leq x \leq x_{k-1,2}, \quad k = \overline{2, M+1},$$

здійснюється так само як і у п. 3.

5. Доведемо, що $\varphi(x, y) \in C^1(\bar{D})$ за умови $f_k(x, y) \in C^2(\bar{D}_k)$.

З умови $f_k(x, y) \in C^2(\bar{D}_k)$ випливає, що $\psi_k(x, y) \in C^1(\bar{D}_k)$, $k = \overline{1, M+1}$.

Тоді також $\varphi_k(x, y) \in C^1(\bar{D}_k)$, $k = \overline{1, M+1}$. Отже, $\varphi(x, y) \in C^1(\bar{D})$.

Теорему 2 доведено.

Отже, побудовано сплайни, використовуючи які отримуємо функції $\varphi(x, y) \in C(\bar{D})$ для випадку $r=0$ та $\varphi(x, y) \in C^1(\bar{D})$ для випадку $r=1$.

Теорема 3. Функції $\varphi(x, y) \in C^r(\bar{D})$ для $r=0$ або $r=1$ можна періодично продовжити на всю площину Oxy із збереженням класу диференційовності.

Доведення теореми випливає з того, що в обох випадках функції $\varphi(x, y)$ мають властивості: $\varphi(0, y) = \varphi(1, y) = 0$, $\varphi(x, 0) = \varphi(x, 1) = 0$ для $r=0$ та $r=1$. Крім того, для $r=1$ виконуються рівності

$$\varphi^{(1,0)}(0, y) = \varphi^{(1,0)}(1, y) = 0, \quad \varphi^{(0,1)}(x, 0) = \varphi^{(0,1)}(x, 1) = 0.$$

Теорему 3 доведено.

Отже, функцію $\varphi(x, y)$ можна періодично продовжити з періодом одиниця за змінною x та за змінною y на всю площину Oxy .

Таким чином, для випадків $r=0$ та $r=1$ функція $\varphi(x, y)$ має властивості, які надають змогу для її наближення без явища Гіббса застосувати метод скінченних сум Фур'є з використанням проєкцій. Теоретичні засади методу обчислення коефіцієнтів Фур'є за допомогою проєкцій наведено в роботі [3], де наближення для функції $\varphi(x, y)$ відшукують у вигляді скінченної суми Фур'є

порядку N : $\varphi(x, y) \approx \varphi_N(x, y) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N \varphi_{k,l} e^{i2\pi(kx+ly)}$. Коефіцієнти Фур'є

обчислюють за формулою $\varphi_{k,l} = \iint_D \varphi(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy$.

Використовуємо для аналізу наближення функції $f(x, y)$ суму наближення функції $\varphi(x, y)$ сумами Фур'є та побудованого сплайна:

$$f(x, y) \approx \tilde{f}(x, y) = \varphi_N(x, y) + Sp(x, y).$$

ПРИКЛАДИ

У чисельному експерименті розглянуто приклади для однієї лінії розриву ($M=1$) та двох ліній розриву ($M=2$). Лініями розриву є границі квадратів. Порядок диференційовності r функції $\varphi(x, y)$ дорівнював нулю та одиниці: $r=0$, $r=1$.

Проєкційні дані для функції $f(x, y)$ вважалися заданими.

Приклад 1. Наближене відновлення розривної функції $f(x, y)$ для випадку $M=1$, $r=0$, $r=1$. Лінією розриву є границя квадрата зі стороною a_1 ($a_1 < 1$) з центром у точці $(0.5; 0.5)$. Задано функції:

$$f_1(x, y) = k_1 e^{-((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2)}, \quad f_2(x, y) = k_2 \sin((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2),$$

де k_1, k_2 — задані числа.

Приклад 2. Наближене відновлення розривної функції $f(x, y)$ для $M=2$, $r=0$, $r=1$. Лініями розриву є границі квадратів зі сторонами a_1, a_2 , $a_1 < a_2 < 1$, з центром у точці $(0.5; 0.5)$. Задано функції:

$$f_1(x, y) = k_1 e^{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}, \quad f_2(x, y) = k_2 \operatorname{ch}(x + y - 1),$$

$$f_3(x, y) = k_3 \sin((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2),$$

де k_1, k_2, k_3 — задані числа.

Далі наведемо (табл.1, 2) кількісні характеристики похибки наближення функції $f(x, y)$, яка мала вигляд $\tilde{f}(x, y) = \varphi_N(x, y) + Sp(x, y)$ та вигляд $f^*(x, y) = f_N(x, y)$, де N — порядок суми Фур'є. У наведених розрахунках для всіх випадків $N = 32$. Результати, обчислені для функції $\tilde{f}(x, y)$ за умов $r = 0$, $r = 1$, відповідають відсутності явища Гіббса, а для функції $f^*(x, y)$ — наявності явища Гіббса.

Наведено також графічну ілюстрацію отриманих результатів, а саме, зображення заданої функції $f(x, y)$ та її наближення $\tilde{f}(x, y)$, а також зображення функції $f^*(x, y)$ (рис. 1, 2). Для зображення функції $f^*(x, y)$ спостерігались осциляції, що відповідає наявності явища Гіббса.

Порівняння похибок, наведених у табл. 1, 2, а також зображень, наведених на рис. 1, 2, свідчить про переваги запропонованого методу для наближеного відновлення розривних функцій.

Отже, можна підсумувати, що у запропонованому методі теоретично обґрунтовано у відповідних теоремах і підтверджено обчислювальним експериментом можливість наближення розривних функцій двох змінних з використанням проєкцій та скінченних сум Фур'є без явища Гіббса для випадку, коли лінії розриву є системою границь квадратів, вкладених один в одній. У цьому методі розривний сплайн $Sp(x, y)$ побудовано так, щоб різниця між наближуваною розривною функцією $f(x, y)$ і цим сплайном була неперервною або диференційовною функцією. Це надає змогу підвищити точність наближення.

Таблиця 1. Результати наближення функції $f(x, y)$ для випадку $M = 1$ (приклад 1)

Характер наближення функції $f(x, y)$	Порядок диференційовності функції $j(x, y)$	Абсолютна похибка	Відносна похибка	Середньоквадратична похибка
$\tilde{f}(x, y)$, без явища Гіббса	$r = 0$	0.0361	0.00361	0.00386
$\tilde{f}(x, y)$, без явища Гіббса	$r = 1$	0.000224	0.0000224	0.0000238
$f^*(x, y)$, з явищем Гіббса	—	6.088	0.609	0.671

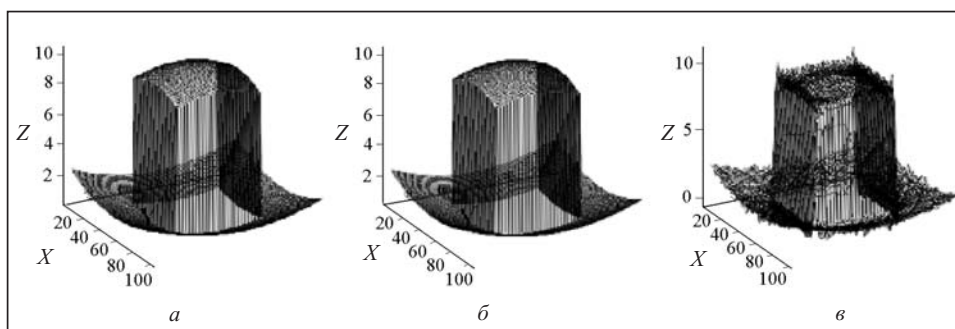


Рис. 1. Зображення заданої функції $f(x, y)$ (а), її наближення $\tilde{f}(x, y)$ без явища Гіббса (б), її наближення $f^*(x, y)$ з явищем Гіббса (в)

Таблиця 2. Результати наближення функції для випадку $M = 2$ (приклад 2)

Характер наближення функції $f(x, y)$	Порядок диференційовності функції $j(x, y)$	Абсолютна похибка	Відносна похибка	Середньоквадратична похибка
$\tilde{f}(x, y)$, без явища Гіббса	$r = 0$	0.0061	0.000498	0.000414
$\tilde{f}(x, y)$, без явища Гіббса	$r = 1$	$2.633 \cdot 10^{-6}$	$2.323 \cdot 10^{-7}$	$2.541 \cdot 10^{-7}$
$f^*(x, y)$, з явищем Гіббса	—	5.003	0.4417	0.5175

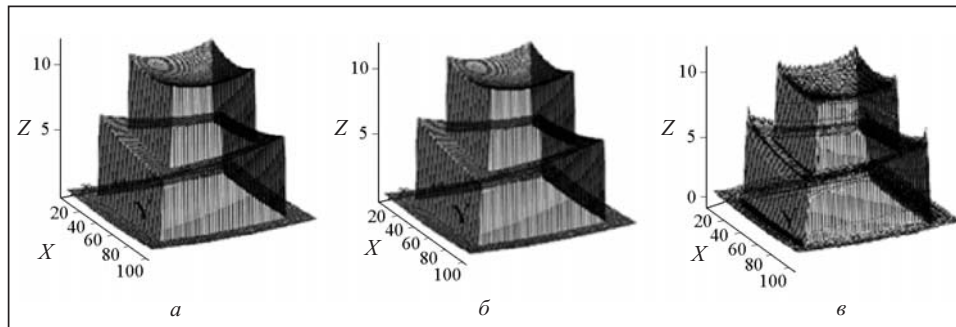


Рис. 2. Зображення заданої функції $f(x, y)$ (а), її наближення $\tilde{f}(x, y)$ без явища Гіббса (б), її наближення $f^*(x, y)$ з явищем Гіббса (в)

ВИСНОВКИ

1. У трьох частинах цієї статті розроблено і досліджено метод наближення розривних функцій без явища Гіббса за допомогою розривних сплайнів та скінченних сум Фур'є і проєкцій. Усі теоретичні твердження запропонованого методу сформульовано і доведено у відповідних теоремах.

2. Для тестування методу вважали відомими лінії розриву наближуваної функції, які є системами концентричних кіл, еліпсів та границь квадратів, вкладених один в одний. Тобто тестувалися випадки, коли лінії розриву були гладкими, а також кусково-гладкими (мали кутові точки).

3. Наведено аналіз результатів обчислювального експерименту, який підтверджує теоретичні положення методу.

4. Основні переваги запропонованого і протестованого методу полягають у можливості наближення розривної функції з потрібною точністю за допомогою розривного сплайна, скінченної суми Фур'є та проєкцій без явища Гіббса. Продемонстровано можливість оптимізації наближення за рахунок підвищення класу диференційовності функції, яка є різницею між наближуваною розривною функцією і побудованим розривним сплайном.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Литвин О.М., Литвин О.Г. Аналіз результатів обчислювального експерименту відновлення розривних функцій двох змінних за допомогою проєкцій. I. *Кібернетика та системний аналіз*. 2021. Т. 57, № 5. С. 98–107.
2. Литвин О.М., Литвин О.Г. Аналіз результатів обчислювального експерименту відновлення розривних функцій двох змінних за допомогою проєкцій. II. *Кібернетика та системний аналіз*. 2022. Т. 58, № 1. С. 110–121.

3. Литвин О.М. Періодичні сплайни і новий метод розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії. *Вісник Харків. держ. політех. ун-ту. Сер. Системний аналіз, управління і інформаційні технології*: Вип. 125. Харків: ХДПУ, 2000. С. 27–35.
4. Lytvyn O.M., Lytvyn O.G., Lytvyn O.O., Mezhuyev V.I. The method of reconstructing discontinuous functions using projections data and finite Fourier sums. *Proc. IX International Scientific and Practical Conference «Information Control Systems & Technologies (ICST-2020)»* (24– 26 September 2020, Odessa, Ukraine). Odessa, 2020. P. 661–673.
5. Сергієнко І.В., Задірака В.К., Литвин О.М., Першина Ю.І. Теорія розривних сплайнів та її застосування в комп'ютерній томографії. Київ: Наук. думка, 2017. 320 с.
6. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування, Харків: Основа, 2002. 544 с.
7. Gottlieb S., Jung J.-H., Kim S. A review of David Gottlieb's work on the resolution of the Gibbs phenomenon. *Commun. Comput. Phys.* 2011. Vol. 9, N 3. P. 497–519.
8. Gottlieb D., Shu C.W. On the Gibbs phenomenon and its resolution. *SIAM Review.* 1997. Vol. 39, N 4. P. 644–668.
9. Gottlieb D., Gustafsson B., Forssen P. On the direct Fourier method for computer tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging.* 2000. Vol. 19, N 3. P. 223–232.

О.М. Lytvyn, O.G. Lytvyn

ANALYSIS OF THE RESULTS OF A COMPUTING EXPERIMENT TO RESTORE THE DISCONTINUOUS FUNCTIONS OF TWO VARIABLES USING PROJECTIONS. III

Abstract. This article continues the series of publications by the authors under the same name. It performs further improvement of the method of restoring the discontinuous functions of two variables using projections in order to increase the accuracy of approximation without the Gibbs phenomenon for the case where the discontinuity lines are a system of boundaries of squares nested in each other. Compared with the previous two parts of this study, we consider the case where the discontinuity lines have angular points at which the derivative of the normal is indefinite. It is proposed to construct a discontinuous spline so that the difference between the approximate function and this spline is a continuous or differential function. This function is approximated by finite Fourier sums whose Fourier coefficients can be found using projections. An analysis of the results of the computational experiment show their compliance with the theoretical statements of the study.

Keywords: computed tomography, discontinuous function, discontinuous spline, class of differentiation, Gibbs phenomenon, Fourier sum.

Надійшла до редакції 08.11.2021