УДК 517.9: 519.6

В.М. БУЛАВАЦЬКИЙ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *v_bulav@ukr.net*.

ДЕЯКІ ДВОВИМІРНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ З ПРОПОРЦІЙНОЮ ПОХІДНОЮ КАПУТО

Анотація. Одержано замкнені розв'язки деяких двовимірних нестаціонарних крайових задач фільтраційної динаміки в тріщинувато-пористих пластах, поставлених для дробово-диференційних математичних моделей. Вказані математичні моделі побудовано з використанням узагальненої (пропорційної) похідної Капуто за часовою змінною та похідних Рімана–Ліувілля за геометричними змінними. Разом з прямою задачею розглянуто і двовимірну обернену крайову задачу визначення невідомої функції джерела, залежної лише від геометричних змінних. Наведено умови існування регулярних розв'язків розглянутих задач. Для окремого випадку лише часової нелокальності фільтраційного процесу розв'язана крайова залача з нелокальними граничними умовами.

Ключові слова: математичне моделювання, дробово-диференційна динаміка фільтраційних процесів, тріщинувато-пористі середовища, некласичні моделі, пропорційна похідна Капуто, похідна Рімана–Ліувілля, двовимірні крайові задачі, обернені задачі, задачі з нелокальними умовами, замкнені розв'язки.

ВСТУП

Відомо, що методи математичного і ком'ютерного моделювання мають питому вагу у пошуках розв'язання проблем ефективного керування водними ресурсами, прогнозуванні закономірностей їхньої динаміки, розвитку і впливу на екологічний стан навколишнього середовища [1, 2]. Незаперечно, що актуальним є розвинення зазначених методів і для вивчення закономірностей та особливостей динаміки геоміграційних процесів у складних гідрогеологічних умовах їхнього перебігу, що характерно для сьогодення, яке визначається широким розвитком систем меліорації, стрімким індустріальним виробництвом, зокрема, будівництвом різноманітних підземних споруд, комунікацій тощо [3, 4]. До того ж зазначимо, що наразі більшість відомих математичних моделей процесів переносу в геопористих середовищах базується на класичних законах переносу, які можуть бути не достатньо адекватними за складних гідрогеогогічних умов у випадку суттєвого відхилення системи від рівноважного стану [5].

Ефективний підхід до моделювання процесів переносу в зазначених системах пов'язаний з використанням апарату інтегро-диференціювання дробового порядку і реалізований, зокрема в [6–9]. При цьому в [10, 11] побудовано аналітичні розв'язки деяких одновимірних (за геометричною змінною) нестаціонарних крайових задач стосовно нових, некласичних фільтраційних математичних моделей в тріщинувато-пористих середовищах. На відміну від цих публікацій, у запропонованій роботі розглядаються задачі моделювання двовимірної за просторовими змінними дробово-диференційної динаміки нелокальних фільтраційних процесів у тріщинувато-пористому середовищі. Зокрема, запропоновано нове дробово-диференційне модельне фільтраційне рівняння з пропорційною похідною Капуто [12] за часовою змінною та похідними Рімана–Ліувілля [8, 9] за геометричними змінними, для якого одержано розв'язки прямої і оберненої крайових задач. Також у роботі поставлено та розв'язано двовимірну крайову задачу з нелокальними граничними умовами для рівняння динаміки фільтраційного процесу з пам'яттю.

МОДЕЛЬНА СИСТЕМА РІВНЯНЬ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ

Математична модель фільтраційної динаміки в тріщинувато-пористих середовищах у двовимірному випадку згідно з класичними роботами [13, 14] базується на такій модельній системі диференціальних рівнянь з частинними похідними:

$$\varepsilon_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{p_2 - p_1}{\tau_r} = \kappa \Delta p_1 , \tag{1}$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{p_2 - p_1}{\tau_r} = \varepsilon_2 \kappa \Delta p_2 , \tag{2}$$

де $p_1(x, y, t)$, $p_2(x, y, t)$ — тиски в системі тріщин і пористих блоках відповідно; $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ — оператор Лапласа за геометричними змінними; $q = \frac{\alpha_0}{\mu}(p_2 - p_1)$ — інтенсивність перетоків між тріщинами і пористими блоками (α_0 — коефіцієнт перетоку); $\kappa = \frac{k_1}{\mu \beta_2^*}$, $\tau_r = \frac{\mu \beta_2^*}{\alpha_0}$, $\varepsilon_1 = \frac{\beta_1^*}{\beta_2^*}$, $\varepsilon_2 = \frac{k_2}{k_1}$, $k_i\,(i = 1,2)$ — коефіцієнти фільтрації в системах тріщин і пористих блоків відповідно; $\beta_i^*\,(i = 1,2)$ — коефіцієнти пружноємності [15]; μ — в'язкість порової рідини.

Зазначимо, що вихідна модельна система рівнянь (1), (2) суттєво спрощується за умов виконання співвідношень $\varepsilon_1 << 1$, $\varepsilon_2 << 1$. У цьому випадку одержуємо з (1), (2) систему рівнянь фільтрації в тріщинувато-пористому середовищі у вигляді [14, 16]

$$\frac{p_2 - p_1}{\tau_r} + \kappa \Delta\, p_1 = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{p_2 - p_1}{\tau_r} = 0. \tag{4}$$

У разі моделювання динаміки двовимірного фільтраційного процесу у тріщинувато-пористому середовищі з урахуванням ефектів пам'яті приймаємо (як і для звичайного пористого середовища [6–9, 18]), що динаміка розглядуваного процесу у часі адекватно описується з використанням похідної дробового порядку за часовою змінною. Найчастіше для цього натепер використовується дробова похідна Капуто–Герасимова [9, 17, 18], проте в цій роботі прийнято її узагальнений варіант — так звана пропорційна похідна Капуто [12], що, зокрема, дає можливість одержати як частинний випадок роз'язання відповідних крайових задач, поставлених для моделей з класичною Капуто-похідною.

Таким чином, одержуємо модельну систему фільтраційних рівнянь, яка є дробово-диференційним аналогом системи (3), (4),

$$p_2 - p_1 + \kappa \tau_r \Delta p_1(x, y, t) = 0, \tag{5}$$

$$\tau_r\, {}^C D_t^{\gamma,\rho}\, p_2(x, y, t) + p_2 - p_1 = 0, \tag{6}$$

де ${}^C D_t^{\gamma,\rho} f(t)$ — пропорційна похідна Капуто порядку γ від функції $f(t)$, яка визначається співвідношенням [12]:

$${}^C D_t^{\gamma,\rho} f(t) = \frac{1}{\rho^{1-\gamma}\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t (t-s)^{-\gamma} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-s)} [(1-\rho) f(s) + \rho f'(s)]\, ds, \tag{7}$$

де $0<\alpha\le 1$, $\rho\in(0,1]$ — параметр, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція Ейлера [18]. (Звідси, зокрема, коли $\rho\to 1-$, маємо співвідношення ${}^C D_t^{\gamma,1} f(t)\equiv D_t^{(\gamma)} f(t)$, де $D_t^{(\gamma)}$ — оператор стандартної похідної Капуто–Герасимова порядку γ [9, 18].)

Виключаючи з системи рівнянь (5), (6) будь-яку з функцій p_1, p_2, одержуємо модельне рівняння динаміки фільтраційного процесу в тріщинувато-пористому середовищі з урахуванням ефектів пам'яті у вигляді

$$ {}^C D_t^{\gamma,\rho} p(x,y,t)=\kappa(1+\tau_r {}^C D_t^{\gamma,\rho})\Delta p(x,y,t), \tag{8}$$

де $p(x,y,t)$ — шукана функція тиску.

У випадку моделювання динаміки нелокальних фільтраційних процесів також і за геометричними змінними (зокрема, фільтраційних процесів з дробово-диференційною за простором і часом динамікою) матимемо дробово-диференційний аналог системи рівнянь (5), (6)

$$p_2-p_1+\kappa\tau_r D_{xy}^2 p_1(x,y,t)=0, \tag{9}$$

$$\tau_r {}^C D_t^{\gamma,\rho} p_2(x,y,t)+p_2-p_1=0, \tag{10}$$

де $D_{xy}^2 := D_x^{\alpha}+D_y^{\beta}$, $D_x^{\alpha}, D_y^{\beta}$ — оператори дробових похідних Рімана–Ліувілля порядків α та β відповідно $(1<\alpha,\beta\le 2)$ [9, 18].

Виключаючи з системи (9), (10) будь-яку з двох функцій тиску, одержуємо рівняння динаміки фільтраційного процесу в тріщинувато-пористому середовищі за умов просторово-часової нелокальності у вигляді

$$ {}^C D_t^{\gamma,\rho} p(x,y,t)=\kappa(1+\tau_r {}^C D_t^{\gamma,\rho}) D_{xy}^2 p(x,y,t), \tag{11}$$

де $p(x,y,t)$ — шукана функція тиску,

$$D_{xy}^2 p(x,y,t)=D_x^{\alpha} p(x,y,t)+D_y^{\beta} p(x,y,t).$$

Зауважимо, що в окремому випадку $\alpha=\beta=2$ модельне рівняння (11) спрощується та має вигляд (8).

ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ ДВОВИМІРНОГО ФІЛЬТРАЦІЙНОГО ПРОЦЕСУ З ПАМ'ЯТТЮ

Двовимірний фільтраційний процес в тріщинувато-пористому середовищі за врахування лише ефектів пам'яті описуватимемо модельним рівнянням вигляду (8), тобто рівнянням

$$ {}^C D_t^{\gamma,\rho} u(x,y,t)=\kappa(1+\tau_r {}^C D_t^{\gamma,\rho})\Delta u(x,y,t),\ \ (x,y,t)\in\Omega, \tag{12}$$

де $u(x,y,t)$ — шукана функція тиску, ${}^C D_t^{\gamma,\rho}$ — оператор пропорційної дробової похідної Капуто [12] визначений згідно з (7), $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$, $\Omega = (0,1)\times(0,1)\times(0,+\infty)$.

Розглянемо задачу моделювання динаміки цього фільтраційного процесу в геомасиві $G:=[0,1]\times[0,1]$ у разі наявності непроникної межі фільтрації $x=1$ та додаткової умови рівності тисків на межах $x=0$, $x=1$ масиву (межі $y=0$, $y=1$ при цьому вважитимемо проникними). Тоді відповідні крайові умови задачі матимуть вигляд

$$u(0,y,t)=u(1,y,t),\quad u_x(1,y,t)=0,\ (y,t)\in\Omega_1, \tag{13}$$

$$u(x,0,t)=0,\ \ u(x,1,t)=0,\ \ (x,t)\in\Omega_1, \tag{14}$$

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y),\quad (x,y)\in G, \tag{15}$$

де $\Omega_1:=[0,1]\times[0,+\infty)$, $\varphi(x,y)$ — задана функція початкового розподілу тисків.

Зауважимо, що некласичні (нелокальні) граничні умови (13) відомі як умови Самарського–Іонкіна [19, 20]. Таким чином, розглядувана задача є аналогом задачі Самарського–Іонкіна [21] стосовно дробово-диференційного рівняння фільтрації в тріщинувато-пористому середовищі вигляду (12).

Розв'язок задачі (12)–(15) шукатимемо у вигляді біортогонального розкладу [21]

$$u(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} S_{0k}(t) Z_{0k}(x, y) + \sum_{m,k=1}^{\infty} S_{(2m-1)k}(t) Z_{(2m-1)k}(x, y) +$$

$$+ \sum_{m,k=1}^{\infty} S_{2mk}(t) Z_{2mk}(x, y), \quad (16)$$

де $S_{0k}(t)$, $S_{(2m-1)k}(t)$, $S_{2mk}(t)$ $(m, k \in N)$ — шукані функції, Z_{0k}, $Z_{(2m-1)k}$, $Z_{2mk}(m, k \in N)$ — власні функції спектральної задачі

$$Z_{xx} + Z_{yy} + \mu Z = 0 \ \ (x, y) \in G,$$

$$Z(0, y) = Z(1, y), \quad Z(x, 0) = Z(x, 1) = 0, \quad Z_x(1, y) = 0 \qquad (x \in [0,1], \ y \in [0,1]).$$

Ця спектральна задача є несамоспряженою, і побудована в [21] система власних функцій має вигляд

$$\{Z_{0k} := 2\sqrt{2} \sin(\pi ky), \ Z_{2mk} := 4\sqrt{2}(1-x)\sin(2\pi mx)\sin(\pi ky),$$

$$Z_{(2m-1)k} := 4\sqrt{2}\cos(2\pi mx)\sin(\pi ky)\} \ \ (m, k \in N). \quad (17)$$

При цьому система приєднаних функцій спряженої задачі записується у вигляді

$$\{W_{0k} := 2\sqrt{2}\, x \sin(\pi ky), \ W_{2mk} := \sqrt{2}\sin(2\pi mx)\sin(\pi ky),$$

$$W_{(2m-1)k} := \sqrt{2}\, x \cos(2\pi mx)\sin(\pi ky)\} \quad (m, k \in N).$$

Ці дві системи функцій $\{Z_{0k}, Z_{(2m-1)k}, Z_{2mk}\}$ та $\{W_{0k}, W_{(2m-1)k}, W_{2mk}\}$, як показано в [21], утворюють базис у просторі $L^2(G)$. Розкладаючи в біортогональний ряд функцію початкових умов

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{0k}(t) Z_{0k}(x, y) + \sum_{m,k=1}^{\infty} \varphi_{(2m-1)k}(t) Z_{(2m-1)k}(x, y) +$$

$$+ \sum_{m,k=1}^{\infty} \varphi_{2mk}(t) Z_{2mk}(x, y),$$

де

$$\varphi_{0k} = (\varphi, W_{0k})_{L^2(G)}, \ \ \varphi_{(2m-1)k} = (\varphi, W_{(2m-1)k})_{L^2(G)}, \ \varphi_{2mk} = (\varphi, W_{2mk})_{L^2(G)}, \quad (18)$$

одержуємо з урахуванням (12)–(15) для визначення невідомих коефіцієнтів розкладу $S_{0k}(t)$, $S_{(2m-1)k}(t)$, $S_{2mk}(t)$ $(m, k \in N)$ у (16) такі послідовності задач Коші:

$$^{C}D_t^{\gamma,\rho} S_{0k}(t) + \eta_k S_{0k}(t) = 0, \quad S_{0k}(0) = \varphi_{0k} \qquad (k \in N), \quad (19)$$

$$^{C}D_t^{\gamma,\rho} S_{2mk}(t) + \widetilde{\lambda}_{mk} S_{2mk}(t) = 0, \quad S_{2mk}(0) = \varphi_{2mk} \quad (k, m \in N), \quad (20)$$

$$^{C}D_t^{\gamma,\rho} S_{(2m-1)k}(t) + \widetilde{\lambda}_{mk} S_{(2m-1)k}(t) = \delta_{mk}(\tau_r \widetilde{\lambda}_{mk} - 1) S_{2mk}(t),$$

$$S_{(2m-1)k}(0) = \varphi_{(2m-1)k} \quad (k, m \in N), \quad (21)$$

де

$$\eta_k=\frac{\pi^2k^2\kappa}{1+\tau_r\pi^2k^2\kappa},\quad \widetilde{\lambda}_{mk}=\frac{\pi^2\kappa(k^2+4m^2)}{1+\tau_r\pi^2\kappa(k^2+4m^2)},\quad \delta_{mk}=\frac{4m\widetilde{\lambda}_{mk}}{\pi(k^2+4m^2)},$$

а величини $\varphi_{0k},\varphi_{2mk},\varphi_{(2m-1)k}$ визначаються згідно з (18).

Розв'язуючи задачі (19)–(21), з урахуванням [12] одержуємо

$$S_{0k}(t)=\varphi_{0k}e^{-at}E_\gamma\left(-\eta_k\left(\frac{t}{\rho}\right)^\gamma\right)\qquad (k\in N), \tag{22}$$

$$S_{2mk}(t)=\varphi_{2mk}e^{-at}E_\gamma\left(-\widetilde{\lambda}_{mk}\left(\frac{t}{\rho}\right)^\gamma\right)\qquad (k,m\in N), \tag{23}$$

$$S_{(2m-1)k}(t)=\varphi_{(2m-1)k}e^{-at}E_\gamma\left(-\widetilde{\lambda}_{mk}\left(\frac{t}{\rho}\right)^\gamma\right)+\frac{\delta_{mk}(\tau_r\widetilde{\lambda}_{mk}-1)}{\rho^\gamma}\times$$

$$\times\int_0^t E_{\gamma,\gamma}\left(-\widetilde{\lambda}_{mk}\left(\frac{t-\tau}{\rho}\right)^\gamma\right)e^{-a(t-\tau)}(t-\tau)^{\gamma-1}S_{2mk}(\tau)d\tau=$$

$$=e^{-at}\left\{\varphi_{(2m-1)k}E_\gamma\left(-\widetilde{\lambda}_{mk}\left(\frac{t}{\rho}\right)^\gamma\right)+\delta_{mk}\rho^{-\gamma}(\tau_r\widetilde{\lambda}_{mk}-1)\varphi_{2mk}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^t E_{\gamma,\gamma}\left(-\widetilde{\lambda}_{mk}\left(\frac{t-\tau}{\rho}\right)^\gamma\right)E_\gamma\left(-\widetilde{\lambda}_{mk}\left(\frac{\tau}{\rho}\right)^\gamma\right)(t-\tau)^{\gamma-1}d\tau\right\},$$

або, враховуючи інтегральну формулу з [8], остаточно маємо

$$S_{(2m-1)k}(t)=e^{-at}\left\{\varphi_{(2m-1)k}E_\gamma\left(-\widetilde{\lambda}_{mk}\left(\frac{t}{\rho}\right)^\gamma\right)+\varphi_{2mk}\delta_{mk}\rho^{-\gamma}(\tau_r\widetilde{\lambda}_{mk}-1)\times\right.$$

$$\left.\times t^\gamma E^2_{\gamma,\gamma+1}\left(-\widetilde{\lambda}_{mk}\left(\frac{t}{\rho}\right)^\gamma\right)\right\}, \tag{24}$$

де $a=\dfrac{1-\rho}{\rho}$, $E^\gamma_{\alpha,\beta}(\cdot)$ — трипараметрична функція Міттаг-Леффлера [22].

Таким чином, формальний розв'язок задачі (12)–(15) визначається співвідношеннями (16), (17), (22)–(24). Потрібно ще показати, що ряди, які відповідають функціям $u(x,y,t)$, $u_{xx}(x,y,t)$, $u_{yy}(x,y,t)$, ${}^CD_t^{\gamma,\rho}u$, ${}^CD_t^{\gamma,\rho}u_{xx}$, ${}^CD_t^{\gamma,\rho}u_{yy}$, є рівномірно збіжними в області $\Omega_\varepsilon:=G\times[\varepsilon,+\infty)$ $\forall\varepsilon>0$. Покажемо, наприклад, збіжність ряду (16) для функції розв'язку $u(x,y,t)$. Нехай функція початкових умов $\varphi(x,y)$ задовольняє співвідношенню $\varphi\in C^4(G)$ та додатковим умовам:

$$\varphi(0,y)=\varphi(1,y)\quad (y\in[0,1]),\quad \varphi_{xx}(x,0)=\varphi_{xx}(x,1)\quad (x\in[0,1]).$$

Тоді, двічі інтегруючи частинами в співвідношенні

$$\varphi_{2mk}=\big(\varphi(x,y),W_{2mk}(x,y)\big)_{L^2(G)},$$

маємо

$$\varphi_{2mk}=\frac{1}{4\pi^4k^2m^2}\big(\varphi_{xxxx},W_{2mk}(x,y)\big)_{L^2(G)},$$

звідки одержуємо оцінку

$$\varphi_{2mk}=O\left(\frac{1}{k^2m^2}\right)\quad (k,m\to+\infty). \tag{25}$$

Враховуючи відповідні оцінки для функції Міттаг-Леффлера [8, 9, 17, 18, 22], зі співвідношення (23) одержуємо для членів останнього з рядів у (16) за умови $t\ge\bar t>0$ ($\bar t$ — довільне допоміжне число) таку оцінку:

$$|S_{2mk}(t)Z_{2mk}(x,y)|\le\frac{M_1}{k^2m^2}\qquad (M_1>0,\ \ k,m\in N).$$

З цієї оцінки випливає, що мажорувальним для ряду $\sum\limits_{m,k=1}^{\infty}S_{2mk}(t)Z_{2mk}(x,y)$ є збіжний узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{m,k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2m^2}$. Тоді на основі мажорантної ознаки Вейєрштраса ряд $\sum\limits_{m,k=1}^{\infty}S_{2mk}Z_{2mk}$ є рівномірно збіжним на множині Ω_ε для довільного $\varepsilon>0$ і його сума на цій множині є неперервною функцією.

Аналогічно, як і під час одержання оцінки (25), двократним інтегруванням частинами у першому і другому з співвідношень (18) одержуємо, що за виконання додаткових умов вигляду

$$\varphi(x,0)=\varphi(x,1)=0\quad (x\in[0,1]),\quad \varphi_{yy}(0,y)=\varphi_{yy}(1,y)\quad \varphi_{xyy}(1,y)=0\quad (y\in[0,1])$$

мають місце оцінки

$$\varphi_{(2m-1)k}=O\left(\frac{1}{k^2m^2}\right),\ \ \varphi_{0k}=O\left(\frac{1}{k^2}\right)\quad (k,m\to+\infty).$$

Тоді, на основі мажорантної ознаки Вейєрштраса випливає, що ряди

$$\sum_{m,k=1}^{\infty}S_{(2m-1)k}(t)Z_{(2m-1)k}(x,y),\qquad \sum_{k=0}^{\infty}S_{0k}(t)Z_{0k}(x,y)$$

є також рівномірно збіжними в області Ω_ε $\forall\varepsilon>0$. Таким чином, усі ряди в правій частині співвідношення (16) є рівномірно збіжними в Ω_ε для довільного $\varepsilon>0$. Звідси маємо, що $u\in C(\Omega_\varepsilon)$. Зазначимо, що не важко встановити властивість єдиності розв'язку розглядуваної задачі. Дійсно, нехай маємо протилежне і $u_1(x,y,t),u_2(x,y,t)$ — два різних розв'язки задачі (12)–(15). Тоді для функції $\tilde u(x,y,t)=u_1(x,y,t)-u_2(x,y,t)$ маємо задачу

$${}^C D_t^{\gamma,\rho}\tilde u(x,y,t)=\kappa(1+\tau_r{}^C D_t^{\gamma,\rho})\Delta\tilde u(x,y,t),\quad (x,y,t)\in\Omega, \tag{26}$$

$$\tilde u(0,y,t)=\tilde u(1,y,t),\ \ \tilde u_x(1,y,t)=0,\ \ (y,t)\in\Omega_1, \tag{27}$$

$$\tilde u(x,0,t)=0,\ \ \tilde u(x,1,t)=0,\quad (x,t)\in\Omega_1, \tag{28}$$

$$\tilde u(x,y,0)=0,\quad (x,y)\in G. \tag{29}$$

Аналогічно викладеному раніше з (26)–(29) матимемо таку послідовність задач Коші:

$${}^C D_t^{\gamma,\rho}\tilde S_{0k}(t)+\eta_k\tilde S_{0k}(t)=0,\quad \tilde S_{0k}(0)=0\quad (k\in N), \tag{30}$$

$${}^C D_t^{\gamma,\rho}\tilde S_{2mk}(t)+\tilde\lambda_{mk}\tilde S_{2mk}(t)=0,\quad \tilde S_{2mk}(0)=0\quad (k,m\in N), \tag{31}$$

$$
\begin{gathered}
{}^C D_t^{\gamma,\rho} \widetilde{S}_{(2m-1)k}(t) + \widetilde{\lambda}_{mk} \widetilde{S}_{(2m-1)k}(t) = \\
= \delta_{mk} (\tau_r \widetilde{\lambda}_{mk} - 1) \widetilde{S}_{2mk}(t), \;\; \widetilde{S}_{(2m-1)k}(0) = 0 \;\; (k, m \in N).
\end{gathered} \tag{32}
$$

Для задач (30)–(32) згідно з (22)–(24) маємо

$$\widetilde{S}_{0k}(t) = 0 \;\; (k \in N), \;\; \widetilde{S}_{2mk}(t) = 0 \;\; (k, m \in N), \;\; \widetilde{S}_{(2m-1)k}(t) = 0 \;\; (k, m \in N),$$

тобто з урахуванням (16) одержуємо $\widetilde{u}(x, y, t) \equiv 0 \;\; \forall t \in (0, T]$. З огляду на повноту системи (17) в $L^2(\Omega)$ отримуємо $\widetilde{u} \equiv 0$ для всіх $(x, y, t) \in G \times (0, T]$, тобто $u_1 \equiv u_2$.

ДВОВИМІРНІ ЗАДАЧІ ФІЛЬТРАЦІЇ З ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІЙНОЮ ЗА ПРОСТОРОМ І ЧАСОМ ДИНАМІКОЮ

Рівняння динаміки двовимірного фільтраційного процесу в тріщинувато-пористому середовищі за умов просторово-часової нелокальності записується (як зазначено раніше) у вигляді (11) або

$$ {}^C D_t^{\gamma,\rho} u(x, y, t) = \kappa (1 + \tau_r \, {}^C D_t^{\gamma,\rho}) D_{xy}^2 u(x, y, t), \qquad (x, y, t) \in \Omega, \tag{33}$$

де $u(x, y, t)$ — шукана функція тиску, $D_{xy}^2 u(x, y, t) = D_x^\alpha u(x, y, t) + D_y^\beta u(x, y, t)$, ${}^C D_t^{\gamma,\rho}$— оператор пропорційної похідної Капуто порядку γ [12], D_x^α, D_y^β — оператори дробових похідних Рімана–Ліувілля порядків α та β відповідно $(1 < \alpha, \beta \le 2)$ [9, 18].

Розглянемо задачу математичного моделювання динаміки фільтраційного процесу в двовимірному геомасиві $G := [0,1] \times [0,1]$ у разі наявності, наприклад, усіх добре проникних меж фільтрації. Тоді відповідні крайові умови задачі матимуть вигляд

$$u(0, y, t) = 0, \;\; u(1, y, t) = 0, \qquad (y, t) \in \Omega_1, \tag{34}$$

$$u(x, 0, t) = 0, \;\; u(x, 1, t) = 0, \qquad (x, t) \in \Omega_1, \tag{35}$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \qquad (x, y) \in G, \tag{36}$$

де $\varphi(x, y)$ — задана функція початкового розподілу тисків у геомасиві.

Розв'язок крайової задачі (33)–(36) шукатимемо у вигляді ряду

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{nm}(t) X_n(x) Y_m(y), \quad (x, y, t) \in \Omega, \tag{37}$$

де $X_n(x), Y_m(y)$ — власні функції задач Штурма–Ліувілля

$$D_x^\alpha X_n(x) = \lambda_n X_n(x), \quad X_n(0) = X_n(1) = 0, \qquad x \in (0, 1), \tag{38}$$

$$D_y^\beta Y_m(y) = \xi_m Y_m(y), \qquad Y_m(0) = Y_m(1) = 0, \qquad y \in (0, 1). \tag{39}$$

Задачі (38), (39) вивчались у роботах [17, 23, 24], в яких показано, що лише для власних значень λ_n, які є нулями двопараметричної функції Міттаг-Леффлера $E_{\alpha,\alpha}(\lambda)$, а також для власних значень ξ_m, які є нулями функції $E_{\beta,\beta}(\xi)$, існують власні функції, що визначаються співвідношеннями

$$X_n(x) = x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^\alpha), \quad Y_m(y) = y^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(\xi_m y^\beta). \tag{40}$$

Як зазначено в [25], системи функцій $\{X_n(x)\}_{n=1}^\infty, \{Y_m(y)\}_{m=1}^\infty$ утворюють в $L^2(0,1)$ неортогональний базис.

Система власних функцій задачі, спряженої до задачі (38), визначається у такий спосіб [24]:

$$\{z_n(x)\}_{n=1}^\infty = \{(1-x)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n (1-x)^\alpha)\}_{n=1}^\infty, \tag{41}$$

а для задачі, спряженої до (39), відповідна система власних функцій має вигляд

$$\{r_m(y)\}_{n=1}^{\infty} = \{(1-y)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(\lambda_n (1-y)^{\beta})\}_{m=1}^{\infty}. \qquad (42)$$

При цьому системи функцій $\{z_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{r_m(y)\}_{m=1}^{\infty}$, визначені згідно з (41), (42), є біортогональними до систем $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Y_m(y)\}_{m=1}^{\infty}$ відповідно [26].

З співвідношень (33)–(36) з урахуванням (37) одержуємо задачу Коші

$${}^C D_t^{\gamma,\rho} u_{nm}(t) - \varsigma_{nm} u_{nm}(t) = 0, \quad u_{nm}(0) = \varphi_{nm} \quad (n, m \in N), \qquad (43)$$

де

$$\varsigma_{nm} = \frac{\kappa(\lambda_n + \xi_m)}{1 - \tau_r \kappa(\lambda_n + \xi_m)}, \; \varphi_{nm} = (\varphi(x,y), z_n(x) r_m(y))_{L^2(0,1)\times(0,1)}$$

$$(n, m \in N). \qquad (44)$$

Розв'язуючи задачу (43), одержуємо співвідношення

$$u_{nm}(t) = \varphi_{nm} e^{-at} E_\gamma(\theta_{nm} t^\gamma) \quad (n, m \in N), \qquad (45)$$

де $a = \dfrac{1-\rho}{\rho}$, $\theta_{nm} = \dfrac{\varsigma_{nm}}{\rho^\gamma}$, $E_\gamma(\cdot)$ — однопараметрична функція Міттаг-Леффлера [9, 18, 22]. Доведемо, що співвідношення (37), (40), (45) визначають регулярний розв'язок розглядуваної задачі. Спочатку зазначимо, що для досить великих по модулю нулів функцій $E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n x^\alpha)$, $E_{\beta,\beta}(\xi_m y^\beta)$, як відомо [24–26], мають місце оцінки

$$|X_n(x)| \le \frac{1}{|\lambda_n| x}, \quad |Y_m(y)| \le \frac{1}{|\xi_m| y}. \qquad (46)$$

Тоді, припускаючи, наприклад, обмеженість функції $\varphi(x,y)$ в області G ($|\varphi| < M$, $M = \mathrm{const} > 0$), з урахуванням відомої оцінки [22]

$$|E_\gamma(z)| \le \frac{C_1}{1+|z|} \le C_1, \; \arg(\mathrm{z}) = \pi, \; |z| \to \infty \; (C_1 = \mathrm{const} > 0)$$

та співвідношень (46), одержуємо

$$|u_{nm}(t) X_n(x) Y_m(y)| = |\varphi_{nm} e^{-at} E_\gamma(\theta_{nm} t^\gamma) X_n(x) Y_m(y)| \le$$
$$\le \frac{M}{|\lambda_n||\xi_m| x y t^\gamma}. \qquad (47)$$

Оскільки власні значення λ_n задачі (38), коли $\mathrm{Im}(\lambda_n) > 0$, мають такі властивості [24, 26]:

а) $|\lambda_k| < |\lambda_{k+1}|$ для $k \ge 1$,

б) для достатньо великих n і $\arg(\lambda_n) > \dfrac{\alpha\pi}{2}$ маємо $|\lambda_n| \sim O(n^\alpha)$ $(1 < \alpha \le 2)$,

то враховуючи (47), одержуємо, що мажорувальним для ряду (37) є збіжний узагальнений гармонічний ряд

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha m^\beta} \quad (1 < \alpha, \beta \le 2).$$

Таким чином, згідно з мажорантною ознакою Вейєрштраса ряд (37) є рівномірно збіжним на множині $\Omega_\varepsilon := G \times [\varepsilon, +\infty)$ для довільного $\varepsilon > 0$ і являє собою неперервну функцію $u(x,y,t) \in C(\Omega_\varepsilon)$ $\forall \varepsilon > 0$. Аналогічно доводиться, що ${}^C D_t^{\gamma,\rho} u$, $D_x^\alpha u$, $D_y^\beta u$, ${}^C D_t^{\gamma,\rho}(D_x^\alpha u)$, ${}^C D_t^{\gamma,\rho}(D_x^\beta u) \in C(\Omega_\varepsilon)$, чим встановлюється існування регулярного розв'язку розглядуваної прямої задачі.

Підсумовуючи, зазначимо, що в окремому випадку ($\rho = 1, \tau_r = 0$) з наведеного розв'язку безпосередньо випливає розв'язок відповідної двовимірної крайової задачі для дробово-диференційного аналогу рівняння адвекції-дифузії [27].

Обернену крайову задачу теорії фільтрації для розглядуваної математичної моделі сформулюємо як задачу відшукання в області $Q := (0,1) \times (0,1) \times (0,T)$ пари функцій $\{U(x, y, t), f(x, y)\}$ на основі розв'язання крайової задачі

$$ {}^C D_t^{\gamma,\rho} U(x, y, t) = \kappa (1 + \tau_r {}^C D_t^{\gamma,\rho}) D_{xy}^2 U(x, y, t) + f(x, y), \quad (x, y, t) \in Q, \quad (48)$$

$$U(0, y, t) = 0, \; U(1, y, t) = 0, \qquad (y, t) \in \Omega_1, \quad (49)$$

$$U(x, 0, t) = 0, \; U(x, 1, t) = 0, \qquad (x, t) \in \Omega_1, \quad (50)$$

$$U(x, y, 0) = \varphi(x, y), \qquad U(x, y, T) = \psi(x, y), \qquad (x, y) \in G, \quad (51)$$

де друга з умов (51) — додаткова (кінцева) умова.

Розв'язок розглядуваної крайової задачі шукатимемо у вигляді рядів

$$U(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} U_{nm}(t) X_n(x) Y_m(y), \quad (x, y, t) \in \Omega, \quad (52)$$

$$f(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} f_{nm} X_n(x) Y_m(y), \quad (x, y) \in (0,1) \times (0,1), \quad (53)$$

де $X_n(x), Y_m(y)$ — власні функції задач Штурма–Ліувілля (38), (39).

З (48)–(51) одержуємо з урахуванням (52), (53) такі задачі Коші:

$$ {}^C D_t^{\gamma,\rho} U_{nm}(t) - \varsigma_{nm} U_{nm}(t) = \frac{\varsigma_{nm}}{\kappa(\lambda_n + \xi_m)} f_{nm} \qquad (n, m \in N), \quad (54)$$

$$U_{nm}(0) = \varphi_{nm} \qquad (n, m \in N), \quad (55)$$

де $\varsigma_{nm}, \varphi_{nm}$ $(n, m \in N)$ визначаються співвідношеннями (44).

Розв'язок задачі (54), (55) на основі [12] має вигляд

$$U_{nm}(t) = u_{nm}(t) + \frac{\varsigma_{nm} f_{nm}}{\kappa(\lambda_n + \xi_m)} \int_0^t e^{-a(t-\tau)} E_{\gamma,\gamma}(\theta_{nm}(t-\tau)^{\gamma})(t-\tau)^{\gamma-1} d\tau, \quad (56)$$

де $u_{nm}(t) = \varphi_{nm} e^{-at} E_{\gamma}(\theta_{nm} t^{\gamma}) \quad (n, m \in N)$.

Для визначення коефіцієнтів f_{nm} розкладу в співвідношенні (53) скористаємось останньою з умов (51). Представляючи функцію $\psi(x, y)$ у вигляді ряду

$$\psi(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \psi_{nm} X_n(x) Y_m(y), \quad (x, y) \in (0,1) \times (0,1),$$

де $\psi_{nm} = (\psi(x, y), z_n(x) r_m(y))_{L^2(0,1)\times(0,1)}$ $(n, m \in N)$, одержуємо з (51) умову $U_{nm}(T) = \psi_{nm}$ $(n, m \in N)$. З урахуванням цієї умови маємо згідно з (56) таке співвідношення для визначення коефіцієнтів f_{nm} розкладу в ряд (53) шуканої функції $f(x, y)$:

$$f_{nm} = \frac{\kappa(\lambda_n + \xi_m)(\psi_n - \varphi_{nm} e^{-aT} E_{\gamma}(\theta_{nm} T^{\gamma}))}{\varsigma_{nm} \int_0^T e^{-a(T-\tau)} E_{\gamma,\gamma}(\theta_{nm}(T-\tau)^{\gamma})(T-\tau)^{\gamma-1} d\tau} \qquad (n, m \in N). \quad (57)$$

Припустимо, що функція $\varphi(x, y)$ $((x, y) \in G)$ задовольняє умови:

$$\varphi \in C^4(G), \; \varphi(0, y) = \varphi(1, y) = 0, \; \varphi_x(0, y) = \varphi_x(1, y) = 0 \quad (y \in [0,1]),$$

$$\varphi_{xxy}(x, 0) = \varphi_{xxy}(x, 1) = 0 \quad (x \in [0,1]).$$

Тоді, виконуючи інтегрування частинами в співвідношенні для $(\varphi, z_n r_m)_{L^2(0,1)\times(0,1)}$, одержуємо оцінку

$$|\varphi_{nm}| \le \frac{M_1}{|\lambda_n|^2 |\xi_m|^2} \qquad (M_1 = \text{const} > 0, n, m \in N). \tag{58}$$

За аналогічних умов щодо функції $\psi(x, y)$ очевидно матимемо подібну оцінку

$$|\psi_{nm}| \le \frac{M_2}{|\lambda_n|^2 |\xi_m|^2} \qquad (M_2 = \text{const} > 0, n, m \in N). \tag{59}$$

З урахуванням [9, 22] та співвідношень (58), (59) одержуємо для (57) таку оцінку:

$$|f_{nm}| \le (C_1|\psi_{nm}| + C_2|\varphi_{nm}|)|\lambda_n + \xi_m| \le C_0 \frac{|\lambda_n| + |\xi_m|}{|\lambda_n|^2 |\xi_m|^2} =$$

$$= C_0\left(\frac{1}{|\lambda_n||\xi_m|^2} + \frac{1}{|\lambda_n|^2|\xi_m|}\right) (C_0, C_1, C_2 = \text{const} > 0, \quad n, m \in N). \tag{60}$$

З (60) та з урахуванням (46) маємо

$$|f_{nm} X_n(x) Y_m(y)| \le C_1^+ \left(\frac{1}{|\lambda_n|^2 |\xi_m|^3} + \frac{1}{|\lambda_n|^3 |\xi_m|^2}\right)\frac{1}{xy} \quad (C_1^+ > 0).$$

На основі останньої нерівності і зазначених раніше властивостей власних значень задач Штурма–Ліувілля (38), (39) одержуємо, що мажорувальним для ряду (53) є збіжний узагальнений гармонічний ряд

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{2\alpha} m^{3\beta}} + \frac{1}{n^{3\alpha} m^{2\beta}}\right) \ (1 < \alpha, \beta \le 2).$$

Отже, згідно з мажорантною ознакою Вейєрштраса ряд (53) є рівномірно збіжним на множині G і являє собою неперервну функцію $f(x, y) \in C(G)$.

Переходячи до оцінки членів ряду (52), зазначимо, що згідно з співвідношеннями (56), (58), (59) має місце нерівність

$$|u_{nm}(t) X_n(x) Y_m(y)| \le \frac{C_2^+}{|\lambda_n|^3 |\xi_m|^3 xyt^\gamma} \quad (C_2^+ = \text{const} > 0, \ n, m \in N). \tag{61}$$

Для другого доданку в правій частині рівності (56) одержуємо з урахуванням (60)

$$|F_{nm}(t)| := \left|\frac{\varsigma_{nm} f_{nm}}{\kappa(\lambda_n + \xi_m)}\int_0^t e^{-a(t-\tau)} E_{\gamma,\gamma}(\theta_{nm}(t-\tau)^\gamma)(t-\tau)^{\gamma-1} d\tau\right| \le C_3 \frac{|f_{nm}|}{|\lambda_n + \xi_m|} \le$$

$$\le \frac{C_4}{|\lambda_n|^2 |\xi_m|^2} \qquad (C_3, C_4 = \text{const} > 0, \ n, m \in N). \tag{62}$$

На основі (61), (62), (46) одержуємо

$$|U_{nm}(t) X_n(x) Y_m(y)| \le |u_{nm}(t) X_n(x) Y_m(y)| +$$

$$+ |F_{nm}(t) X_n(x) Y_m(y)| \le \frac{C_*}{|\lambda_n|^3 |\xi_m|^3 xyt^\gamma} \ (C_* = \text{const} > 0 \ \ n, m \in N).$$

Звідси випливає, що мажорувальним для ряду (52) є збіжний узагальнений гармонічний ряд

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3\alpha} m^{3\beta}} \qquad (1 < \alpha, \beta \le 2).$$

Таким чином, ряд (52) є рівномірно збіжним на множині $Q_{\varepsilon} := G \times [\varepsilon, T]$ для довільного $\varepsilon > 0$ і являє собою неперервну функцію $u(x, y, t) \in C(Q_{\varepsilon})$. Отже, існує регулярний розв'язок $\{U, f\}$ розглядуваної оберненої крайової задачі. Аналогічно викладеному неважко впевнитись у єдиності цього розв'язку.

ВИСНОВКИ

У роботі одержано замкнені розв'язки деяких двовимірних нестаціонарних крайових задач аномальної фільтраційної динаміки в тріщинувато-пористих пластах. Постановки крайових задач виконано для математичних моделей, що описують дробово-диференційну динаміку процесів фільтрації за умов як просторової, так і часової нелокальностей, та містять узагальнену (пропорційну) похідну Капуто [12] за часовою змінною та похідні Рімана–Ліувілля за геометричними змінними. Окрім прямої задачі фільтраційної динаміки, розглянуто також двовимірну обернену крайову задачу визначення невідомої функції джерела, залежної від геометричних змінних. Наведено умови існування регулярних розв'язків розглянутих задач. Для окремого випадку лише часової нелокальності фільтраційного процесу (вираженої за допомогою пропорційної похідної Капуто) поставлена і розв'язана крайова залача з нелокальними граничними умовами Самарського–Іонкіна.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Полубаринова–Кочина П.Я., Пряжинская В.Г., Эмих В.Н. Математические методы в вопросах орошения. Москва: Наука, 1969. 414 с.
2. Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. Киев: Наукова думка, 1991. 264 с.
3. Пряжинская В.Г., Ярошевский Д.М., Левит–Гуревич Л.К. Компьютерное моделирование в управлении водными ресурсами. Москва: Физматгиз, 2002. 496 с.
4. Лаврик В.И., Никифорович Н.А. Математическое моделирование в гидроэкологических исследованиях. Киев: Фитосоциоцентр, 1998. 288 с.
5. Хасанов М.М., Булгакова Г.Т. Нелинейные и неравновесные эффекты в геологически сложных средах. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 288 с.
6. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Изд-во «Артишок», 2008. 512 с.
7. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. London: Imperial College Press, 2010. 368 p.
8. Sandev T., Tomovsky Z. Fractional equations and models. Theory and applications. Cham, Switzerland: Springer Nature Switzerland AG, 2019. 344 p.
9. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
10. Bulavatsky V.M. Mathematical modeling of fractional differential filtration dynamics based on models with Hilfer-Prabhakar derivative. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 2. P. 204–216.
11. Булавацький В.М., Богаєнко В.О. Крайові задачі дробово-диференційної за простором і часом фільтраційної динаміки в тріщинувато-пористому середовищі. *Кібернетика та системний аналіз.* 2022. Т. 58, № 3. С. 47–60.
12. Fang Jarad, Thabet Abdeljawad, Jehad Alzabut. Generalized fractional derivatives generated by a class of local propotional derivatives. *Europ. Phus. Journ. Special Topics*. 2017. Vol. 226. P. 3457–3471.
13. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. *Доклады АН СССР*. 1960. Т. 132. Вып. 3. С. 545–548.

14. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. *Прикл. матем. и мех.* 1960. Т. 24. Вып. 3. С. 852–864.
15. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. Москва: Недра, 1970. 339 с.
16. Баренблатт Г.И., Ентов В.Н., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. Москва: Недра, 1984. 303 с.
17. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
18. Podlubny I. Fractional differential equations. New York: Academic Press, 1999. 341 p.
19. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. *Дифференциальные уравнения.* 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
20. Ионкин Н.И., Моисеев Е.И. О задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевыми условиями. *Дифференциальные уравнения.* 1979. Т. 15, № 7. С. 1284–1295.
21. Ionkin N.I., Morozova V.A. The two-dimensional heat equation with nonlocal boundary conditions. *Differential Equations.* 2000. Vol. 36, N 7. P. 982–987.
22. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. Mittag-Leffler functions, related topics and applications. Berlin: Springer Verlag, 2014. 454 p.
23. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. Москва: Физматлит, 2003. 272 с.
24. Aleroev T.S., Kirane M., Tang Y.-F. Boundary-value problems for differential equations of fractional order. *Journal of mathematical science.* 2013. Vol. 194, N 5. P. 499–512.
25. Хасамбиев М.В., Алероев Т.С. Краевая задача для одномерного дробно-дифференциального уравнения адвекции-диффузии. *Вестник Московского государственного строительного университета.* 2014. № 6. С. 71–76.
26. Aleroev T.S., Kirane M., Malik S.A. Determination of source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determining condition. *Electronic journal of differential equations.* 2013. Vol. 270. P. 1–16.
27. Хасамбиев М.В. Краевая задача для многомерного дробного дифференциального уравнения адвекции-диффузии. *Вестник Московского государственного строительного университета.* 2015. № 5. С. 35–42.

V.M. Bulavatsky

SOME TWO-DIMENSIONAL BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF FILTRATION DYNAMICS FOR MODELS WITH PROPORTIONAL CAPUTO DERIVATIVE

Abstract. Closed solutions are obtained for some two-dimensional non-stationary boundary-value problems of filtration dynamics in fractured-porous formations, posed within the framework of fractional-differential mathematical models. These mathematical models are constructed using the generalized (proportional) Caputo derivative with respect to the time variable and Riemann–Liouville derivatives with respect to geometric variables. Along with the direct problem, we also consider a two-dimensional inverse boundary-value problem for determining the unknown source function that only depends on geometric variables. Conditions for the existence of regular solutions of the considered problems are given. For a separate case of only time nonlocality of the filtration process, a boundary-value problem with nonlocal boundary conditions is solved.

Keywords: mathematical modeling, fractional-differential dynamics of filtration processes, fractured-porous media, non-classical models, proportional Caputo derivative, Riemann–Liouville derivative, two-dimensional boundary-value problems, inverse problems, problems with non-local conditions, closed-form solutions.

Надійшла до редакції 04.02.2022