УДК 517.988

В.В. СЕМЕНОВ
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *semenov.volodya@gmail.com*.

С.В. ДЕНИСОВ
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *sireukr@gmail.com*.

ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ З МИНУЛОГО ДЛЯ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ В РІВНОМІРНО ОПУКЛИХ БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ[1]

Анотація. Досліджено два нові алгоритми для розв'язання варіаційних нерівностей у Банахових просторах. Перший алгоритм — модифікація двоетапного методу Попова, що використовує узагальнену проєкцію Альбера замість метричної. Другий алгоритм є адаптивним варіантом першого, де використовується правило поновлення величини кроку, що не вимагає знання Ліпшицевих констант та обчислень значень оператора в додаткових точках. Для варіаційних нерівностей з монотонними, Ліпшицевими операторами, що діють в 2-рівномірно опуклому та рівномірно гладкому Банаховому просторі, доведено теореми про слабку збіжність методів.

Ключові слова: варіаційна нерівність, монотонний оператор, узагальнена проєкція Альбера, 2-рівномірно опуклий Банахів простір, рівномірно гладкий Банахів простір, алгоритм, збіжність.

ВСТУП

Багато цікавих та актуальних задач дослідження операцій та математичної фізики можуть бути записані у формі варіаційних нерівностей [1–4]. Розв'язання останніх є напрямом прикладного нелінійного аналізу, що інтенсивно розвивається [5–32]. Зазначимо, що часто негладкі задачі оптимізації можуть ефективно розв'язуватися, якщо їх переформулювати у вигляді сідлових задач і застосувати алгоритми розв'язання варіаційних нерівностей [6].

З появою генерувальних змагальних нейронних мереж (generative adversarial network, GAN) алгоритми розв'язання варіаційних нерівностей викликали особливу зацікавленість також у спеціалістів у галузі машинного навчання [7].

Найвідомішим узагальненням методу проєкції градієнта для варіаційних нерівностей є екстраградієнтний метод Корпелевич [8]. Дослідження цього алгоритму описано у численних публікаціях [6, 7, 9–15]. Зокрема, пропонувались модифікації екстраградієнтного алгоритму з одним метричним проєктуванням на допустиму множину [9–11]. Ефективним сучасним варіантом екстраградієнтного методу є проксимальний дзеркальний метод Неміровського [6]. Цей метод можна інтерпретувати як варіант екстраградієнтного методу з проєктуванням, що розуміють у сенсі дивергенції Брегмана. Також цікавий метод двоїстої екстраполяції для розв'язання варіаційних нерівностей запропонував Нестеров [12]. Адаптивні варіанти проксимального дзеркального методу Неміровського досліджено в [13–15].

Цікаву модифікацію алгоритму Ерроу–Гурвіца для пошуку сідлових точок опукло-ввігнутих функцій запропонував Л.Д. Попов [16]. У [17] досліджено модифікацію методу Попова для розв'язання варіаційних нерівностей з монотонними операторами. А в [18] запропоновано двоетапний проксимальний алго-

[1] Робота виконана за фінансової підтримки НАН України (проєкт «Нові методи дослідження коректності та розв'язання задач дискретної оптимізації, варіаційних нерівностей та їхнє застосування», ДР №0119U101608) та МОН України (проєкт «Математичне моделювання та оптимізація динамічних систем для оборони, медицини та екології», ДР №0119U100337).

ритм для розв'язання задачі рівноважного програмування, що є адаптацією методу з [16] до загальних нерівностей Кі Фаня. У [19, 20] досліджено двоетапний проксимальний дзеркальний метод, що є модифікацією двоетапного проксимального алгоритму [18] з використанням дивергенції Брегмана замість Евклідової відстані. Варіант двоетапного проксимального алгоритму для дворівневих варіаційних нерівностей досліджено в [21].

Зауважимо, що останнім часом алгоритм Попова для варіаційних нерівностей став відомим у середовищі спеціалістів з машинного навчання під назвою «Extrapolation from the Past» [7]. Ітерація цього алгоритму дешевша за ітерацію екстраградієнтного алгоритму за кількістю обчислень значень оператора. Адаптивний варіант двоетапного брегманівського методу Попова досліджено в [21–23]. Подальше розвинення цього кола ідей сприяло створенню «forward-reflected-backward algorithm» [24]. Частинним випадком цього алгоритму є популярний серед фахівців у галузі машинного навчання алгоритм «optimistic gradient descent ascent» [7].

Варіаційні нерівності у Банахових просторах виникають та інтенсивно вивчаються в математичній фізиці та теорії обернених задач [2, 25]. Останнім часом намітився прогрес у вивченні алгоритмів для задач у Банахових просторах [25–32]. Це обумовлено широким залученням результатів та конструкцій геометрії Банахових просторів [25, 26, 33–36]. Багато матеріалів на цю тему у зручному для застосування вигляді наведено в [25]. У [32] запропоновано адаптивний варіант «forward-reflected-backward algorithm» для варіаційних нерівностей у 2-рівномірно опуклому та рівномірно гладкому Банаховому просторі.

У цій роботі, що є продовженням [21–23, 32], запропоновано та досліджено два нові алгоритми для розв'язання варіаційних нерівностей у Банахових просторах. Перший алгоритм — модифікація двоетапного методу Попова [16, 18], що використовує узагальнену проєкцію Альбера [26] замість метричної. Другий алгоритм є адаптивним варіантом першого, де використовується правило поновлення величини кроку, що не вимагає знання Ліпшицевих констант та обчислень значень оператора в додаткових точках.

Для варіаційних нерівностей з монотонними, Ліпшицевими операторами, що діють у 2-рівномірно опуклому та рівномірно гладкому Банаховому просторі, доведено теореми про слабку збіжність методів.

ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Наведемо декілька понять та фактів геометрії Банахових просторів, що потрібні для формулювання та доведення результатів [25, 26, 33–36].

Нехай E — дійсний Банахів простір з нормою $\|\cdot\|$, E^* — спряжений до E простір, $\langle x^*, x\rangle$ — значення функціонала $x^* \in E^*$ на елементі $x \in E$. Норму в E^* будемо позначати $\|\cdot\|_*$.

Нехай $S_E = \{x \in E\colon \|x\| = 1\}$. Банахів простір E називають строго опуклим, якщо для всіх $x, y \in S_E$ та $x \neq y$ маємо $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1$. Модуль опуклості простору E визначається у такий спосіб:

$$\delta_E(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|\colon x, y \in S_E,\ \|x - y\| = \varepsilon\right\}\ \forall \varepsilon \in (0,2].$$

Банахів простір E називають рівномірно опуклим, якщо $\delta_E(\varepsilon) > 0$ для всіх $\varepsilon \in (0,2]$. Банахів простір E називають 2-рівномірно опуклим, якщо існує таке $c > 0$, що $\delta_E(\varepsilon) \geq c\varepsilon^2$ для всіх $\varepsilon \in (0,2]$. Очевидно, що 2-рівномірно опуклий простір є рівномірно опуклим. Відомо, що рівномірно опуклий Банахів простір є рефлексивним [33].

Банахів простір E називають гладким, якщо границя

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

існує для всіх $x, y \in S_E$. Банахів простір E називають рівномірно гладким, якщо ця границя існує рівномірно за $x, y \in S_E$. Існує двоїстість між опуклістю та гладкістю Банахового простору E та його спряженого E^* [33, 34]:

- E^* — строго опуклий простір $\Rightarrow E$ — гладкий простір;
- E^* — гладкий простір $\Rightarrow E$ — строго опуклий простір;
- E — рівномірно опуклий простір $\Leftrightarrow E^*$ — рівномірно гладкий простір;
- E — рівномірно гладкий простір $\Leftrightarrow E^*$ — рівномірно опуклий простір.

Зауважимо, що за рефлексивності простору E дві перші імплікації можна обернути.

Відомо, що Гільбертові простори та простори L_p $(1 < p \le 2)$ є 2-рівномірно опуклими та рівномірно гладкими (простори L_p рівномірно гладкі для $p \in (1, \infty)$) [33, 34].

Багатозначний оператор $J : E \to 2^{E^*}$, що діє за правилом

$$Jx = \{x^* \in E^* : \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|_*^2\},$$

називають нормалізованим дуальним відображенням. Відомо, що [34]:

- якщо простір E гладкий, то відображення J однозначне;
- якщо простір E строго опуклий, то відображення J ін'єктивне та строго монотонне;
- якщо простір E рефлексивний, то відображення J сюр'єктивне;
- якщо простір E рівномірно гладкий, то відображення J рівномірно неперервне на обмежених підмножинах E.

Нехай E — гладкий Банахів простір. Розглянемо введений Я. Альбером [26] функціонал

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle Jy, x \rangle + \|y\|^2 \quad \forall x, y \in E.$$

З означення ϕ випливає корисна 3-точкова тотожність

$$\phi(x, y) - \phi(x, z) - \phi(z, y) = 2\langle Jz - Jy, x - z \rangle \quad \forall x, y, z \in E.$$

Якщо простір E строго опуклий, то для $x, y \in E$ маємо $\phi(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Лема 1 [26]. Нехай E — рівномірно опуклий та рівномірно гладкий Банахів простір, (x_n), (y_n) — обмежені послідовності елементів E. Тоді

$$\|x_n - y_n\| \to 0 \Leftrightarrow \|Jx_n - Jy_n\|_* \to 0 \Leftrightarrow \phi(x_n, y_n) \to 0.$$

Лема 2 [35]. Нехай E — 2-рівномірно опуклий та гладкий Банахів простір. Тоді для деякого $\mu \ge 1$ виконується нерівність

$$\phi(x, y) \ge \frac{1}{\mu}\|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in E.$$

Для Банахових просторів ℓ_p, L_p та W_p^m $(1 < p \le 2)$ маємо $\mu = \frac{1}{p-1}$ [36]. Для Гільбертового простору нерівність леми 2 перетворюється на тотожність з $\mu = 1$.

Нехай K — непорожня замкнена та опукла підмножина рефлексивного, строго опуклого та гладкого простору E. Відомо [26], що для кожного $x \in E$ існує єдиний елемент $z \in K$ такий, що $\phi(z, x) = \inf_{y \in K} \phi(y, x)$. Цей елемент z позначають $\Pi_K x$, а відповідний оператор $\Pi_K : E \to K$ називають узагальненою проєкцією E на K (узагальненою проєкцією Альбера) [26]. Зауважимо, що якщо E — Гільбертів простір, то Π_K збігається з метричною проєкцією на множину K.

Лема 3 [26]. Нехай K — замкнена та опукла підмножина рефлексивного, строго опуклого та гладкого простору E, $x \in E$, $z \in K$. Тоді

$$z = \Pi_K x \iff \langle Jz - Jx, y - z \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

Нерівність леми 3 рівносильна такій [26]:

$$\phi(y, \Pi_K x) + \phi(\Pi_K x, x) \leq \phi(y, x) \quad \forall y \in K.$$

Зауваження 1. Основним елементом розглянутих далі алгоритмів є обчислення за даними $x \in E$ та $x^* \in E^*$ нової точки $x^+ = \Pi_K J^{-1}(Jx - x^*)$. З леми 3 та 3-точкової тотожності випливає фундаментальна для аналізу алгоритмів нерівність

$$\phi(y, x^+) \leq \phi(y, x) - \phi(x^+, x) + 2\langle x^*, y - x^+ \rangle \quad \forall y \in K.$$

Нагадаємо елементарний факт про числові послідовності.

Лема 4. Нехай (a_n), (b_n) — дві послідовності невід'ємних чисел, що задовольняють нерівність $a_{n+1} \leq a_n - b_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді існує границя $\lim_{n\to\infty} a_n$ та $\sum_n b_n < +\infty$.

Розглянемо варіаційну нерівність:

$$\text{знайти } x \in C\colon \ \langle Ax, y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C, \tag{1}$$

де C — непорожня підмножина 2-рівномірно опуклого та рівномірно гладкого Банахового простору E, A — оператор, що діє з E в E^*. Множину розв'язків (1) позначимо S.

Припустимо, що виконані такі умови:

- множина $C \subseteq E$ опукла та замкнена;
- оператор $A\colon E \to E^*$ монотонний та Ліпшиців на C (з константою $L > 0$);
- множина S непорожня.

Зауваження 2. Варіаційну нерівність (1) можна сформулювати як задачу пошуку нерухомої точки [26]

$$x = \Pi_C J^{-1}(Jx - \lambda Ax), \tag{2}$$

де $\lambda > 0$. Формулювання (2) корисне, оскільки дає очевидну алгоритмічну ідею. Схема

$$x_{n+1} = \Pi_C J^{-1}(Jx_n - \lambda Ax_n) \tag{3}$$

вивчалась у [27] для обернено сильно монотонних операторів $A\colon E \to E^*$. Але для Ліпшицевих монотонних операторів схема (3) у загальному випадку не збігається.

Розглянемо дуальну варіаційну нерівність

$$\text{знайти } x \in C\colon \ \langle Ay, x - y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C. \tag{4}$$

Множину розв'язків (4) позначимо S^d. Зауважимо, що множина S^d опукла та замкнена [1]. Нерівність (4) іноді називають слабким або дуальним формулюванням (1) (або нерівністю Мінті), а розв'язки (4) — слабкими розв'язками (1). Для монотонних операторів A завжди маємо $S \subseteq S^d$. У наведених умовах $S^d = S$ [1].

Однією з основних задач є оцінка числа ітерацій алгоритму, що потрібне для отримання наближеного розв'язку заданої якості. Будемо оцінювати якість наближеного розв'язку $x \in C$ варіаційної нерівності (1) за допомогою невід'ємної функції зазору (gap function) [6]

$$\operatorname{gap}(x) = \sup_{y \in C} \langle Ay, x - y \rangle. \tag{5}$$

Очевидно, що для коректності визначення функції зазору (5) необхідна обмеженість допустимої множини C.

Лема 5. Нехай оператор A монотонний. Якщо $x \in C$ — розв'язок (1), то $\operatorname{gap}(x) = 0$. Навпаки, якщо для $x \in C$ маємо $\operatorname{gap}(x) = 0$, то x — розв'язок (1).

Для розв'язання варіаційної нерівності (1) пропонуємо такий алгоритм.

Алгоритм 1. Екстраполяція з минулого.

Обираємо $x_1 = y_0 \in E$, $\lambda_n > 0$. Покладаємо $n = 1$.

1. Обчислити

$$y_n = \Pi_C J^{-1}(Jx_n - \lambda_n Ay_{n-1}).$$

2. Обчислити

$$x_{n+1} = \Pi_C J^{-1}(Jx_n - \lambda_n Ay_n),$$

якщо $x_{n+1} = y_n = x_n$, то СТОП, інакше покласти $n := n+1$ та перейти до п. 1.

Зауваження 3. Алгоритм 1 є модифікацією алгоритму Попова [16, 18] для задач у Банахових просторах, що використовує узагальнену проєкцію Альбера [26] замість метричної. Збіжність алгоритму Попова в Гільбертовому просторі та в Евклідовому просторі з дивергенцією Брегмана замість Евклідової відстані доведено в [17–20].

Правило зупинки обґрунтовується тотожністю (2), що рівносильна варіаційній нерівності (1). Дійсно, в процесі виконання $x_{n+1} = y_n = x_n$ маємо $y_n = \Pi_C J^{-1}(Jy_n - \lambda_n Ay_n)$, звідки $y_n \in S$.

Лема 6. Для послідовностей (x_n), (y_n), що породжені алгоритмом 1, виконується нерівність

$$\phi(y, x_{n+1}) \le \phi(y, x_n) - (1 - 2\mu\lambda_n L)\phi(x_{n+1}, y_n) - (1 - \mu\lambda_n L)\phi(y_n, x_n) +$$
$$+\mu\lambda_n L\,\phi(x_n, y_{n-1}) + 2\lambda_n \langle Ay, y - y_n \rangle, \tag{6}$$

де $y \in C$.

Доведення. Для довільної точки $y \in C$ має місце нерівність

$$\phi(y, x_{n+1}) \le \phi(y, x_n) - \phi(x_{n+1}, x_n) + 2\lambda_n \langle Ay_n, y - x_{n+1} \rangle.$$

З монотонності оператора A випливає

$$\langle Ay_n, y - x_{n+1} \rangle = \langle Ay_n, y - y_n \rangle + \langle Ay_n, y_n - x_{n+1} \rangle \le$$
$$\le \langle Ay, y - y_n \rangle + \langle Ay_n, y_n - x_{n+1} \rangle.$$

Таким чином,

$$\phi(y, x_{n+1}) \le \phi(y, x_n) - \phi(x_{n+1}, x_n) + 2\lambda_n \langle Ay_n, y_n - x_{n+1} \rangle + 2\lambda_n \langle Ay, y - y_n \rangle =$$
$$= \phi(y, x_n) - \phi(x_{n+1}, x_n) + 2\lambda_n \langle Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1} \rangle +$$
$$+2\lambda_n \langle Ay_n - Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1} \rangle + 2\lambda_n \langle Ay, y - y_n \rangle. \tag{7}$$

Запишемо доданок $2\lambda_n \langle Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1} \rangle$ у вигляді

$$2\lambda_n \langle Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1} \rangle = 2\langle Jx_n - \lambda_n Ay_{n-1} - Jy_n, x_{n+1} - y \rangle +$$
$$+2\langle Jy_n - Jx_n, x_{n+1} - y_n \rangle.$$

З включення $x_{n+1} \in C$ та леми 3 випливає нерівність

$$\langle Jx_n - \lambda_n Ay_{n-1} - Jy_n, x_{n+1} - y_n \rangle \le 0.$$

Отже, маємо

$$2\lambda_n \langle Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1} \rangle \le 2\langle Jy_n - Jx_n, x_{n+1} - y_n \rangle =$$
$$= \phi(x_{n+1}, x_n) - \phi(x_{n+1}, y_n) - \phi(y_n, x_n). \tag{8}$$

Оцінимо праву частину (7) за допомогою (8). Отримаємо нерівність

$$\phi(y, x_{n+1}) \le \phi(y, x_n) - \phi(x_{n+1}, y_n) - \phi(y_n, x_n) +$$
$$+2\lambda_n \langle Ay_n - Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1} \rangle + 2\lambda_n \langle Ay, y - y_n \rangle. \tag{9}$$

Тепер оцінимо доданок $2\lambda_n \langle Ay_n - Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1} \rangle$. Маємо

$$2\lambda_n \langle Ay_n - Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1} \rangle \le 2\lambda_n \|Ay_{n-1} - Ay_n\|_* \|x_{n+1} - y_n\| \le$$

$$\le 2\lambda_n L\| y_{n-1} - y_n\| \| x_{n+1} - y_n\| \le 2\lambda_n L(\| y_{n-1} - x_n\| + \| x_n - y_n \|)\| x_{n+1} - y_n\| \le$$

$$\le \lambda_n L(\| y_{n-1} - x_n\|^2 + \| x_n - y_n\|^2 + 2\| x_{n+1} - y_n\|^2). \qquad (10)$$

Оцінимо норми в (10) за допомогою леми 2 та отримаємо

$$2\lambda_n \langle Ay_n - Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1}\rangle \le \mu\lambda_n L\,\phi(x_n, y_{n-1}) +$$
$$+\mu\lambda_n L\,\phi(y_n, x_n) + 2\mu\lambda_n L\phi(x_{n+1}, y_n). \qquad (11)$$

Використаємо (11) в (9) та отримаємо

$$\phi(y, x_{n+1}) \le \phi(y, x_n) - (1 - 2\mu\lambda_n L)\phi(x_{n+1}, y_n) - (1 - \mu\lambda_n L)\phi(y_n, x_n) +$$
$$+\mu\lambda_n L\,\phi(x_n, y_{n-1}) + 2\lambda\langle Ay, y - y_n\rangle,$$

що й потрібно було довести.■

У випадку обмеженості допустимої множини C доведемо, що алгоритму 1 потрібно зробити $O\left(\frac{LD}{\varepsilon}\right)$ ітерацій для отримання точки $x \in C$ з $\mathrm{gap}(x) \le \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, де $D = \sup_{a,b\in C}\phi(a, b) < +\infty$.

Теорема 1. Нехай (x_n), (y_n) — послідовності, що породжені алгоритмом 1. Припустимо, що $\lambda_n \in \left(0, \frac{1}{3\mu L}\right]$. Тоді для послідовності чезарівських середніх $z_N = \frac{\sum_{n=1}^N \lambda_n y_n}{\sum_{n=1}^N \lambda_n}$ має місце нерівність

$$\mathrm{gap}(z_N) \le \frac{\sup_{y\in C}\phi(y, x_1) + \mu\lambda_1 L\,\phi(x_1, y_0)}{2\sum_{n=1}^N \lambda_n}.$$

Доведення. Запишемо нерівність (6) у такому вигляді:

$$2\lambda_n \langle Ay, y - y_n\rangle \le (\phi(y, x_n) + \mu\lambda_n L\,\phi(x_n, y_{n-1})) - (\phi(y, x_{n+1}) +$$
$$+\mu\lambda_{n+1} L\,\phi(x_{n+1}, y_n)) - (1 - \mu L(\lambda_{n+1} + 2\lambda_n))\phi(x_{n+1}, y_n) -$$
$$-(1 - \mu\lambda_n L)\phi(y_n, x_n). \qquad (12)$$

Сумуючи (12) по n від 1 до N, отримуємо

$$2\sum_{n=1}^N \lambda_n \langle Ay, y_n - y\rangle \le \phi(y, x_1) + \mu\lambda_1 L\phi(x_1, y_0),$$

звідки випливає

$$\langle Ay, z_N - y\rangle \le \frac{\phi(y, x_1) + \mu\lambda_1 L\,\phi(x_1, y_0)}{2\sum_{n=1}^N \lambda_n}, \qquad (13)$$

де $z_N = \frac{\sum_{n=1}^N \lambda_n y_n}{\sum_{n=1}^N \lambda_n}$. Перейдемо в (13) до супремуму за $y \in C$ та отримаємо

$$\mathrm{gap}(z_N) \le \frac{\sup_{y\in C}\phi(y, x_1) + \mu\lambda_1 L\phi(x_1, y_0)}{2\sum_{n=1}^N \lambda_n},$$

що й потрібно було довести.■

Наслідок 1. Нехай (x_n), (y_n) — послідовності, що породжені алгоритмом 1 з $\lambda_n = \frac{1}{3\mu L}$. Тоді для послідовності середніх $z_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N y_n$ має місце нерівність

$$\mathrm{gap}(z_N) \le \frac{\mu L \frac{3}{2}\sup_{y\in C}\phi(y, x_1) + \mu L \frac{1}{2}\phi(x_1, y_0)}{N}.$$

Сформулюємо та доведемо теорему про збіжність алгоритму 1.

Теорема 2. Нехай C — непорожня опукла та замкнена підмножина 2-рівномірно опуклого та рівномірно гладкого Банахового простору E, $A: E \to E^*$ — монотонний та Ліпшиців оператор, $S \neq \varnothing$. Припустимо, що нормалізоване дуальне відображення J секвенційно слабко неперервне та послідовність (λ_n) така, що $0 < \inf_n \lambda_n \le \sup_n \lambda_n < \frac{1}{3\mu L}$. Тоді послідовності (x_n) та (y_n), що породжені алгоритмом 1, слабко збігаються до деякої точки $z \in S$.

Доведення. Підставимо елемент $y = z' \in S$ у нерівність (1). Оскільки $\langle Az', z' - y_n \rangle \le 0$, то отримаємо

$$\phi(z', x_{n+1}) \le \phi(z', x_n) - (1 - 2\mu\lambda_n L)\,\phi(x_{n+1}, y_n) -$$
$$-(1 - \mu\lambda_n L)\phi(y_n, x_n) + \mu\lambda_n L\,\phi(x_n, y_{n-1}). \tag{14}$$

Покладемо

$$a_n = \phi(z', x_n) + \mu\lambda_n L\phi(x_n, y_{n-1}),$$
$$b_n = (1 - \mu\lambda_n L)\phi(y_n, x_n) + (1 - \mu\lambda_{n+1} L - 2\mu\lambda_n L)\phi(x_{n+1}, y_n).$$

Нерівність (14) приймає вигляд $a_{n+1} \le a_n - b_n$. З леми 4 випливає існування границі

$$\lim_{n\to\infty} (\phi(z', x_n) + \mu\lambda_n L\phi(x_n, y_{n-1}))$$

та

$$\sum_{n=1}^{\infty} ((1 - \mu\lambda_n L)\phi(y_n, x_n) + (1 - \mu\lambda_{n+1} L - 2\mu\lambda_n L)\phi(x_{n+1}, y_n)) < +\infty.$$

Звідси отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} \phi(y_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} \phi(x_{n+1}, y_n) = 0 \tag{15}$$

та збіжність числових послідовностей $(\phi(z', x_n))$ для всіх $z' \in S$. З (15) випливає

$$\lim_{n\to\infty} \| y_n - x_n \| = \lim_{n\to\infty} \| x_{n+1} - y_n \| = 0. \tag{16}$$

З нерівності леми 2 та (16) випливає обмеженість послідовностей (x_n), (y_n). З нерівностей

$$\phi(z', x_{n+1}) \le \phi(z', x_n) - \phi(x_{n+1}, x_n) + 2\lambda_n \langle Ay_n, y_n - x_{n+1} \rangle,$$
$$-2\lambda_n \langle Ay_{n-1}, x_{n+1} - y_n \rangle \le \phi(x_{n+1}, x_n) - \phi(y_n, x_n) - \phi(x_{n+1}, y_n)$$

та (16) випливає $\lim_{n\to\infty} \phi(x_{n+1}, x_n) = 0$ та $\lim_{n\to\infty} \| x_{n+1} - x_n \| = 0$. Завдяки рівномірній неперервності на обмежених множинах відображення J отримуємо $\lim_{n\to\infty} \| Jx_n - Jx_{n+1} \|_* = 0$.

Покажемо, що всі слабкі часткові границі послідовності (x_n) належать множині S. Розглянемо підпослідовність (x_{n_k}), що слабко збігається до деякої точки $z \in E$. Ясно, що $z \in C$ та (y_{n_k}), (x_{n_k+1}) слабко збігаються до z. Покажемо, что $z \in S$. Маємо

$$\langle Ay_{n_k}, y - x_{n_k+1} \rangle + \frac{1}{\lambda_{n_k+1}} \langle Jx_{n_k+1} - Jx_{n_k}, y - x_{n_k+1} \rangle \ge 0 \quad \forall y \in C.$$

Звідки

$$\langle Ay, y - y_{n_k} \rangle + \langle Ay_{n_k}, y_{n_k} - x_{n_k+1} \rangle +$$
$$+ \frac{1}{\lambda_{n_k+1}} \langle Jx_{n_k+1} - Jx_{n_k}, y - x_{n_k+1} \rangle \ge 0 \quad \forall y \in C. \tag{17}$$

Після граничного переходу в (17) отримуємо

$$\langle Ay, y - z \rangle \ge 0 \quad \forall y \in C.$$

Отже, $z \in S$.

Покажемо, що послідовність (x_n) слабко збігається до z (тоді з $\|y_n - x_n\| \to 0$ випливає, що (y_n) теж слабко збігається до z). Міркуємо від супротивного. Нехай існує підпослідовність (x_{m_k}) така, що $x_{m_k} \to z'$ слабко та $z \neq z'$. Зрозуміло, що $z' \in S$. Маємо

$$2\langle Jx_n, z - z' \rangle = \phi(z', x_n) - \phi(z, x_n) + \|z\|^2 - \|z'\|^2.$$

Звідки випливає існування границі $\lim_{n\to\infty} \langle Jx_n, z - z' \rangle$. Завдяки секвенційній слабкій неперервності нормалізованого дуального відображення J отримуємо

$$\langle Jz, z - z' \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle Jx_{n_k}, z - z' \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle Jx_{m_k}, z - z' \rangle = \langle Jz', z - z' \rangle,$$

тобто $\langle Jz - Jz', z - z' \rangle = 0$. Звідки випливає $z = z'$.■

АДАПТИВНИЙ АЛГОРИТМ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ З МИНУЛОГО

Параметри λ_n алгоритму 1 задавались за умови, що

$$0 < \inf_n \lambda_n \le \sup_n \lambda_n < \frac{1}{3\mu L}.$$

Тобто використовувалась інформація про константи ліпшицевості оператора A.

З урахуванням алгоритму 1 та [21–23, 32] побудуємо двоетапний алгоритм з адаптивним вибором величини λ_n, що не вимагає знання Ліпшицевих констант та обчислень значень оператора A в додаткових точках (тобто без процедур типу лінійного пошуку).

Припустимо, що відома лише константа $\mu \ge 1$ з леми 2.

Алгоритм 2. Екстраполяція з минулого з адаптивним регулюванням.

Обираємо $x_1 = y_0 \in E$, $\tau \in (0, \frac{1}{3\mu})$ та число $\lambda_1 > 0$. Покладаємо $n = 1$.

1. Обчислити

$$y_n = \Pi_C J^{-1}(Jx_n - \lambda_n Ay_{n-1}).$$

2. Обчислити

$$x_{n+1} = \Pi_C J^{-1}(Jx_n - \lambda_n Ay_n).$$

Якщо $y_n = x_n = x_{n+1}$, то СТОП, інакше перейти до п. 3.

3. Обчислити

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{\lambda_n, \tau \dfrac{\|y_n - y_{n-1}\|}{\|Ay_n - Ay_{n-1}\|_*}\right\}, & \text{якщо } Ay_{n-1} \neq Ay_n, \\ \lambda_n & \text{інакше.} \end{cases}$$

Покласти $n := n + 1$ та перейти до п. 1.

Зауважимо, що послідовність (λ_n), яка задається на третьому етапі ітераційного кроку в алгоритмі 2, незростальна та обмежена знизу числом $\min\left\{\lambda_1, \frac{\tau}{L}\right\}$. Отже, існує $\lim_{n\to\infty} \lambda_n > 0$.

Доведемо збіжність алгоритму 2. Спочатку доведемо основну нерівність, що пов'язує узагальнені відстані між породженими алгоритмом 2 точками та довільним елементом множини розв'язків S.

Лема 7. Для послідовностей (x_n), (y_n), що породжені алгоритмом 2, має місце нерівність

$$\phi(z, x_{n+1}) \le \phi(z, x_n) - \left(1 - 2\tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\phi(x_{n+1}, y_n) -$$

$$-\left(1 - \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\phi(y_n, x_n) + \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \phi(x_n, y_{n-1}),$$

де $z \in S$.

Доведення. Нехай $z \in S$. Як і в доведенні леми 1, отримаємо нерівність

$$\phi(z,x_{n+1}) \le \phi(z,x_n) - \phi(x_{n+1},y_n) - \phi(y_n,x_n) + $$
$$+2\lambda_n \left\langle Ay_n - Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1} \right\rangle + 2\lambda_n \left\langle Az, z - y_n \right\rangle. \qquad (18)$$

Оскільки $\left\langle Az, z - y_n \right\rangle \le 0$, то з (18) випливає

$$\phi(z,x_{n+1}) \le \phi(z,x_n) - \phi(x_{n+1},y_n) - \phi(y_n,x_n) + $$
$$+2\lambda_n \left\langle Ay_n - Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1} \right\rangle. \qquad (19)$$

З використанням правила обчислення λ_{n+1} оцінемо зверху доданок $2\lambda_n \left\langle Ay_n - Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1} \right\rangle$. Маємо

$$2\lambda_n \left\langle Ay_n - Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1} \right\rangle \le 2\lambda_n \left\| Ay_n - Ay_{n-1} \right\|_* \left\| y_n - x_{n+1} \right\| \le$$
$$\le 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \| y_n - y_{n-1} \| \| x_{n+1} - y_n \| \le 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} (\| y_n - x_n \| + \| x_n - y_{n-1} \|) \| x_{n+1} - y_n \| \le$$
$$\le \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \| y_n - x_n \|^2 + \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \| x_n - y_{n-1} \|^2 + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \| x_{n+1} - y_n \|^2 \le$$
$$\le \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \phi(y_n,x_n) + \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \phi(x_n,y_{n-1}) + 2\tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \phi(x_{n+1},y_n). \qquad (20)$$

Застосовуючи (20) в (19), отримуємо

$$\phi(z,x_{n+1}) \le \phi(z,x_n) - \phi(x_{n+1},y_n) - \phi(y_n,x_n) + $$
$$+\tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \phi(y_n,x_n) + \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \phi(x_n,y_{n-1}) + 2\tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \phi(x_{n+1},y_n),$$

що й потрібно було довести.■

Сформулюємо основний результат.

Теорема 3. Нехай C — непорожня опукла та замкнена підмножина 2-рівномірно опуклого та рівномірно гладкого Банахового простору E, $A: E \to E^*$ — монотонний та Ліпшиців оператор, $S \ne \varnothing$. Припустимо, що нормалізоване дуальне відображення J секвенційно слабко неперервне. Тоді послідовності (x_n) та (y_n), що породжені алгоритмом 2, слабко збігаються до деякої точки $z \in S$.

Доведення. Нехай $z' \in S$. Покладемо

$$a_n = \phi(z',x_n) + \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \phi(x_n,y_{n-1}),$$

$$b_n = (1 - \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}) \phi(y_n,x_n) + (1 - \tau\mu \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+2}} - 2\tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}) \phi(x_{n+1},y_n).$$

Нерівність леми 7 приймає вигляд $a_{n+1} \le a_n - b_n$. Оскільки існує $\lim_{n\to\infty} \lambda_n > 0$, то

$$1 - \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \to 1 - \tau\mu \in (0,1) \text{ та } 1 - \tau\mu \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+2}} - 2\tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \to 1 - 3\tau\mu \in (0,1)$$

для $n \to \infty$.

З леми 4 можемо зробити висновок, що існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \left(\phi(z',x_n) + \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \phi(x_n,y_{n-1}) \right)$$

та

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 - \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \right) \phi(y_n,x_n) + \left(1 - \tau\mu \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+2}} - 2\tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \right) \phi(x_{n+1},y_n) \right) < +\infty.$$

Звідки отримуємо

$$\lim_{n\to\infty}\phi(y_n, x_n) = \lim_{n\to\infty}\phi(x_{n+1}, y_n) = 0$$

та збіжність числових послідовностей $(\phi(z', x_n))$ для всіх $z' \in S$.

На підставі міркувань з доведення теореми 1 отримуємо результат.■

ВИСНОВКИ

У цій роботі, що є продовженням [21–23, 32], запропоновано та досліджено два нові алгоритми для розв'язання варіаційних нерівностей у Банахових просторах. Перший алгоритм — модифікація двоетапного методу Попова [16, 18], що використовує узагальнену проєкцію Альбера [26] замість метричної. Другий алгоритм є адаптивним варіантом першого, де використовується правило поновлення величини кроку, що не вимагає знання Ліпшицевих констант та обчислень значень оператора в додаткових точках.

Для варіаційних нерівностей з монотонними, Ліпшицевими операторами, що діють в 2-рівномірно опуклому та рівномірно гладкому Банаховому просторі, доведено теореми про слабку збіжність методів.

З використанням методів [13] результати, подібні до теорем 1 та 3, можна отримати для задач з псевдомонотонними, Ліпшицевими та секвенційно слабко неперервними операторами, що діють у 2-рівномірно опуклих та рівномірно гладких Банахових просторах.

З огляду на проведене дослідження вкажемо на дві актуальні проблеми. По-перше, для можливості ефективного застосування алгоритмів для нелінійних задач у Банахових просторах потрібні швидкі та стійкі алгоритми обчислення узагальненої проєкції Альбера для широкого набору множин. По-друге, всі результати отримано для класу 2-рівномірно опуклих і рівномірно гладких Банахових просторів, який не містить важливих для застосувань просторів L_p і W_p^m $(2 < p < +\infty)$. Бажано позбавитися цього обмеження.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. Москва: Мир, 1983. 256 с.
2. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. Москва: Мир, 1971. 371 с.
3. Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 325 p.
4. Lyashko S.I., Klyushin D.A., Nomirovsky D.A., Semenov V.V. Identification of age-structured contamination sources in ground water. Boucekkine R., Hritonenko N., Yatsenko Y. (Eds.). Optimal Control of Age-Structured Populations in Economy, Demography, and the Environment. London; New York: Routledge, 2013. P. 277–292.
5. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-dimensional variational inequalities and complementarily problem. New York: Springer, 2003. Vol. 2. 666 p.
6. Nemirovski A. Prox-method with rate of convergence O(1/T) for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. *SIAM Journal on Optimization.* 2004. Vol. 15. P. 229–251. https://doi.org/10.1137/S1052623403425629.
7. Gidel G., Berard H., Vincent P., Lacoste-Julien S. A variational inequality perspective on generative adversarial Networks. arXiv:1802.10551. 2018.
8. Korpelevich G.M. An extragradient method for finding saddle points and for other problems. *Matecon*. 1976. Vol. 12, N 4. P. 747–756.
9. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings. *SIAM Journal on Control and Optimization.* 2000. Vol. 38. P. 431–446. https://doi.org 10.1137/S0363012998338806.

10. Censor Y., Gibali A., Reich S. The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space. *Journal of Optimization Theory and Applications.* 2011. Vol. 148. P. 318–335. https://doi.org/10.1007/s10957-010-9757-3.

11. Semenov V.V. Modified extragradient method with Bregman divergence for variational inequalities. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. Vol. 50, Iss. 8. P. 26–37. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i8.30.

12. Nesterov Yu. Dual extrapolation and its applications to solving variational inequalities and related problems. *Mathematical Programming.* 2007. Vol. 109, Iss. 2–3. P. 319–344. https://doi.org/10.1007/s10107-006-0034-z.

13. Denisov S.V., Nomirovskii D.A., Rublyov B.V., Semenov V.V. Convergence of extragradient algorithm with monotone step size strategy for variational inequalities and operator equations. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2019. Vol. 51, Iss. 6. P. 12–24. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i6.20.

14. Bach F., Levy K.Y. A universal algorithm for variational inequalities adaptive to smoothness and noise. arXiv:1902.01637. 2019.

15. Vedel Y., Semenov V. Adaptive extraproximal algorithm for the equilibrium problem in Hadamard spaces. Olenev N., Evtushenko Y., Khachay M., Malkova V. (Eds.). *Optimization and Applications. OPTIMA 2020. Lecture Notes in Computer Science.* Cham: Springer, 2020. Vol. 12422. P. 287–300. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62867-3_21.

16. Popov L.D. A modification of the Arrow–Hurwicz method for search of saddle points. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR.* 1980. Vol. 28, Iss. 5. P. 845–848. https://doi.org/10.1007/BF01141092.

17. Malitsky Yu.V., Semenov V.V. An extragradient algorithm for monotone variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2014. Vol. 50, Iss. 2. P. 271–277. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9614-8.

18. Lyashko S.I., Semenov V.V. A new two-step proximal algorithm of solving the problem of equilibrium programming. Goldengorin B. (Ed.). *Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. Springer Optimization and Its Applications.* Cham: Springer, 2016. Vol. 115. P. 315–325. https://doi.org/10.1007/978-3-319-42056-1_10.

19. Chabak L., Semenov V., Vedel Y. A new non-euclidean proximal method for equilibrium problems. Chertov O., Mylovanov T., Kondratenko Y., Kacprzyk J., Kreinovich V., Stefanuk V. (Eds.). *Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information. ICDSIAI 2018. Advances in Intelligent Systems and Computing.* Cham: Springer, 2019. Vol. 6. P. 50–58. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97885-7_6.

20. Nomirovskii D.A., Rublyov B.V., Semenov V.V. Convergence of two-stage method with Bregman divergence for solving variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2019. Vol. 55, Iss. 3. P. 359–368. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00142-7.

21. Vedel Ya.I., Denisov S.V., Semenov V.V. An adaptive algorithm for the variational inequality over the set of solutions of the equilibrium problem. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2021. Vol. 57, Iss. 1. P. 91–100. https://doi.org/10.1007/s10559-021-00332-2.

22. Semenov V.V., Denisov S.V., Kravets A.V. Adaptive two-stage Bregman method for variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2021. Vol. 57, Iss. 6. P. 959–967. https://doi.org/10.1007/s10559-021-00421-2.

23. Vedel Ya.I., Sandrakov G.V., Semenov V.V. An adaptive two-stage proximal algorithm for equilibrium problems in Hadamard spaces. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2020. Vol. 56, Iss. 6. P. 978–989. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00318-6.

24. Malitsky Y., Tam M.K. A forward-backward splitting method for monotone inclusions without cocoercivity. *SIAM Journal on Optimization.* 2020. Vol. 30. P. 1451–1472. https://doi.org/10.1137/18M1207260.

25. Alber Y., Ryazantseva I. Nonlinear ill posed problems of monotone type. Dordrecht: Springer, 2006. 410 p.

26. Alber Y.I. Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications. *Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type.* New York: Dekker, 1996. Vol. 178. P. 15–50.

27. Iiduka H., Takahashi W. Weak convergence of a projection algorithm for variational inequalities in a Banach space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 2008. Vol. 339, N 1. P. 668–679. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.07.019.

28. Cholamjiak P., Shehu Y. Inertial forward-backward splitting method in Banach spaces with application to compressed sensing. *Appl. Math.* 2019. Vol. 64, N 4. P. 409–435. https://doi.org/10.21136/AM.2019.0323-18.

29. Shehu Y. Convergence results of forward-backward algorithms for sum of monotone operators in Banach spaces. *Results in Mathematics.* 2019. Vol. 74, N 138. https://doi.org/10.1007/s00025-019-1061-4.

30. Shehu Y. Single projection algorithm for variational inequalities in Banach spaces with application to contact problem. *Acta Math. Sci.* 2020. Vol. 40. P. 1045–1063. https://doi.org/10.1007/s10473-020-0412-2.

31. Yang J., Cholamjiak P., Sunthrayuth P. Modified Tseng's splitting algorithms for the sum of two monotone operators in Banach spaces. *AIMS Mathematics.* 2021. Vol. 6, Iss. 5. P. 4873–4900. https://doi.org/10.3934/math.2021286.

32. Vedel Y., Semenov V., Denisov S. A novel algorithm with self-adaptive technique for solving variational inequalities in Banach spaces. Olenev N. N., Evtushenko Y. G., Jac′imovic′ M., Khachay M., Malkova V. (Eds.). *Advances in Optimization and Applications. OPTIMA 2021. Communications in Computer and Information Science.* Cham: Springer, 2021. Vol. 1514. P. 50–64. https://doi.org/10.1007/978-3-030-92711-0_4.

33. Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств. Киев: Вища школа, 1980. 215 с.

34. Beauzamy B. Introduction to Banach spaces and their geometry. Amsterdam: North-Holland, 1985. 307 p.

35. Aoyama K., Kohsaka F. Strongly relatively nonexpansive sequences generated by firmly nonexpansive-like mappings. *Fixed Point Theory Appl.* 2014. P. 95. https://doi.org/10.1186/1687-1812-2014-95.

36. Xu H.K. Inequalities in Banach spaces with applications. *Nonlinear Anal.* 1991. Vol. 16, Iss. 12. P. 1127–1138.

V.V. Semenov, S.V. Denisov

CONVERGENCE OF EXTRAPOLATION FROM THE PAST METHOD FOR VARIATIONAL INEQUALITIES IN UNIFORMLY CONVEX BANACH SPACES

Abstract. The authors analyze two new algorithms for solving variational inequalities in Banach spaces. The first algorithm is a modification of Popov's two-stage method that uses the Albert generalized projection instead of the metric one. The second algorithm is an adaptive version of the first one, where the step size update rule is used, which does not require knowledge of the Lipschitz constants and calculation of the operator values at additional points. For variational inequalities with monotone, Lipschitz operators acting in a 2-uniformly convex and uniformly smooth Banach space, theorems on the weak convergence of the methods are proved.

Keywords: variational inequality, monotone operator, Albert generalized projection, 2-uniformly convex Banach space, uniformly smooth Banach space, algorithm, convergence.

Надійшла до редакції 20.01.2022