УДК 519.22

В.А. ПЕПЕЛЯЄВ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *pepelaev@yahoo.com.*
О.М. ГОЛОДНІКОВ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна.
Н.О. ГОЛОДНІКОВА
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна.

МЕТОД ОПТИМІЗАЦІЇ НАДІЙНОСТІ, АЛЬТЕРНАТИВНИЙ bPOE

Анотація. Розроблено новий метод оптимізації надійності, альтернативний методу bPOE. Для порівняння ефективності роботи запропонованого методу та оригінального методу bPOE було проведено чисельні експерименти з використанням двох різних наборів даних. Аналіз результатів обчислень показав, що вони однакові для обох методів.

Ключові слова: bPOE, CVaR, мінімізація ймовірності відмов, хвіст функції розподілу, функція втрат, поріг.

ВСТУП

Традиційно задачу оптимізації надійності формулюють як мінімізацію ймовірності того, що випадкова величина Z перевищить деякий поріг h. У випадку, коли функція розподілу Z має розриви, розв'язання цієї задачі характеризується значними математичними труднощами [1, 2]. Для подолання цих вад у [1] для випадку $h = 0$ було запропоновано нову альтернативну міру ризику — «буферну ймовірність відмови». Ця міра ризику враховує ступінь перевищення порога відмови і є більш консервативною, ніж ймовірність відмови. В [3] запропоновано використовувати буферну ймовірність перевищення (Buffered Probability of Exceedance, bPOE) як міру ризику, яка узагальнює буферну ймовірність відмови. Ця bPOE тісно пов'язана з мірою ризику «Conditional Value-at-Risk (CVaR)», запропонованою в [4]. Замість терміна CVaR, поширеного у літературі з фінансової інженерії, застосовують також і універсальний термін «суперквантиль». Ці міри ризику використовують для оптимізації надійності складної технічної системи [5] і мінімізації ризику втрат урожаю [6–8].

У цій роботі пропонується метод оптимізації надійності, альтернативний bPOE. Для дослідження ефективності цього методу було проведено чисельні експерименти з використанням пакета програм AORDA PSG і даних, розроблених компанією American Optimal Decisions [9, 10].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай $X=(x_1,\dots,x_N)$ — вектор, компоненти якого є випадковими величинами. Випадкова величина x_n з однаковою ймовірністю $p=1/M$ набуває M значень $x_{1n},\dots,x_{Mn}$, $n=1,\dots,N$. Нехай $Y=(y_1,\dots,y_N)$ — вектор, компоненти якого задовольняють обмеження

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = 1, \tag{1}$$

$$y_i \ge 0,\ i=1,\dots N. \tag{2}$$

Розглянемо випадкову функцію втрат

$$\eta(X,Y) = b - \sum_{i=1}^{N} y_i x_i , \tag{3}$$

де b — константа. За фіксованих компонентів вектора Y, $\tilde{y}_1,\dots,\tilde{y}_N$, випадкова величина (3) набуває значення $b-\sum_{i=1}^{N}\widetilde{y}_i x_{1i}, \cdots, b-\sum_{i=1}^{N}\widetilde{y}_i x_{Mi}$ з однаковою ймовірністю $p=1/M$. Використовуючи термінологію [4], називаємо ці значення атомами. Таким чином, дискретна функція розподілу $\eta(X,\widetilde{Y})$ має M атомів і ймовірність кожного з них становить $p=1/M$.

Для заданого значення порога h класичну задачу оптимізації надійності формулюють як задачу мінімізації ймовірності відмов

$$\min_{y_1,\ldots,y_N} P\left\{ b-\sum_{i=1}^{N} y_i x_i > h \right\} \tag{4}$$

за обмежень (1), (2).

Під час розв'язання задач такого типу виникають значні технічні труднощі. Тому в [1] було запропоновано замість ймовірності відмов використовувати буферну ймовірність відмов з порогом $h=0$. Ця міра ризику є більш консервативною, ніж ймовірність відмов. Буферну ймовірність відмови було розвинено в [3], де пропонувалось як поріг вибирати середнє значення хвоста розподілу та було введено нову міру ризику — буферну ймовірність перевищення (bPOE). Відповідно до цього підходу замість функції цілі (4), мінімізація якої спричиняє значні технічні труднощі, пропонується використовувати буферну ймовірність перевищення:

$$\min_{y_1,\ldots,y_N} bPOE_h\left(b-\sum_{i=1}^{N} y_i x_i \right), \tag{5}$$

де bPOE для випадкової величини Z визначається так [3]:

$$bPOE_h(Z)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } h \ge \sup Z, \\ 1-\bar{q}^{-1}(h;z), & \text{якщо } EZ < h < \sup Z, \\ 1 & \text{інакше.} \end{cases} \tag{6}$$

Вираз $\bar{q}^{-1}(h;Z)$ у (6) позначає функцію, обернену до суперквантиля $\bar{q}(h;Z)$.

2. МЕТОД ОПТИМІЗАЦІЇ НАДІЙНОСТІ, АЛЬТЕРНАТИВНИЙ bPOE

Нехай h — заданий поріг, β — змінна величина, яка задовольняє умову $0<\beta\le 1$. Для мінімізації ймовірності відмов пропонуємо наведену далі оптимізаційну модель.

Відшукати максимальне значення β:

$$\max \beta, \tag{7}$$

за якого існує вектор $Y=(y_1,\ldots,y_N)$, такий що

$$CVaR_\beta\left(b-\sum_{i=1}^{N} y_i x_i \right) \le h, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = 1, \tag{9}$$

$$y_i \ge 0, \quad i=1,\ldots,N. \tag{10}$$

Для розв'язання цієї задачі будемо використовувати пакет програм AORDA PSG [9]. На жаль, цей пакет не може оптимізувати $CVaR_\beta(\xi)$ відносно β. Тому, вводячи в цільову функцію штучну змінну t з нульовим коефіцієнтом, цю задачу зводимо до наведеної далі еквівалентної оптимізаційної задачі.

Відшукати максимальне значення β:

$$\max \beta, \tag{11}$$

за якого оптимізаційна задача має розв'язок

$$\max 0 \cdot t \tag{12}$$

за обмежень

$$CVaR_\beta\left(b - \sum_{i=1}^{N} y_i x_i\right) \le h, \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = 1, \tag{14}$$

$$y_i \ge 0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{15}$$

Для розв'язання цієї задачі пропонується використовувати дворівневий метод оптимізації.

На верхньому рівні вибирається значення β на одновимірному відрізку (0,1]. На нижньому рівні за фіксованого значення $\beta = \tilde{\beta}$ розв'язується оптимізаційна задача (12)–(15) з використанням пакета програм AORDA PSG [9]. З урахуванням того, що $CVaR_\beta$ є неперервною зростальною функцією β [3, 4], для пошуку максимального значення β, за якого оптимізаційна задача (12)–(15) має розв'язок, пропонується використовувати метод дихотомії. Цей метод одновимірної оптимізації дає змогу швидко відшукати максимальне значення β за будь-якою точністю.

3. РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЕНЬ

Порівняємо результати обчислень за моделями (5) і (7)–(10), отримані з використанням пакета програм AORDA PSG [9] і даних (case studies), розроблених компанією American Optimal Decisions [10]. Відповідні дані розміщено на сайті цієї компанії. Інформація на цьому сайті призначена для демонстрації математичних моделей і методів AORDA PSG, а також для проведення порівняльного аналізу.

Для обчислення було використано два варіанти даних для компонентів випадкового вектора $X = (x_1, \ldots, x_N)$:

1) matrix_style_classification_fidelity_magellan.txt (Case Study: Style Classification with Quantile Regression) [11];

2) matrix_omega_scenarios_without_hurdle.txt (Case Study: Omega Portfolio Rebalancing) [12].

3.1. Варіант 1. Використовувались $N = 4$ випадкові величини, значення яких розташовані в стовпчиках rlv, rlg, ruj та ruo в файлі matrix_style_classification_fidelity_magellan.txt [11]. Кожна випадкова величина набуває M=1264 значень. Було обрано довільну константу $b = 0.46$.

Матрицю сценаріїв для даних варіанта 1 наведено в табл. 1. Тут змінній x_1 відповідає стовпчик rlv в [11], змінній x_2 — стовпчик rlg, змінній x_3 — стовпчик ruj, змінній x_4 — стовпчик ruo. Всі випадкові величини набувають значення з інтервалу [– 0.2376, 1.8677]. Початкові значення коефіцієнтів функції втрат $\eta(X, Y)$ становили $y_1^0 = y_2^0 = y_3^0 = y_4^0 = 0.25$. Для обчислення було обрано поріг $h = VaR_{0.8}\,(\eta(X, Y^0)) = 0.499415$, де $Y^0 = (y_1^0, \ldots, y_4^0)$.

Таблиця 1. Значення випадкових величин у варіанті 1

b	x_1	x_2	x_3	x_4
0.46	0.0410971	0.0531805	0.0315522	0.0134202
0.46	0.0410971	0.0531805	0.0367395	0.0610463
....	....	....	....	....
0.46	0.0465449	0.0756534	0.0345887	0.0896047

З використанням цих даних за допомогою пакета AORDA PSG [9] було отримано оптимальний розв'язок $Y^{*1} = (y_1^{*1}, \dots, y_4^{*1})$ стандартної задачі мінімізації bPOE (5) за обмежень (1), (2):

$$y_1^{*1} = 0.789751, \quad y_2^{*1} = 0, \quad y_3^{*1} = 0.210248, \quad y_4^{*1} = 0. \tag{16}$$

Для розв'язання задачі (11)–(15) використовувався запропонований дворівневий метод оптимізації з порогом $h = 0.499415$ і було отримано:

- максимальне значення $\beta^* = 0.62867$, за якого виконується нерівність (13) з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$;
- оптимальний розв'язок $Y^{*2} = (y_1^{*2}, \dots, y_4^{*2})$ задачі (12)–(15)

$$y_1^{*2} = 0.789751, \quad y_2^{*2} = 0, \quad y_3^{*2} = 0.210248, \quad y_4^{*2} = 0, \tag{17}$$

який повністю збігається з розв'язком (16) стандартної задачі мінімізації bPOE (5) за обмежень (1), (2).

Отже, для набору даних варіанта 1 обидва методи дають однаковий результат. Зауважимо, що отриманий результат суттєво залежить від точності, з якою обчислюється максимальне значення β^*.

3.2. Варіант 2. Використовувались $N = 9$ випадкових величин, значення яких розташовані в стовпчиках manager_1, manager_2, ..., manager_9 у файлі matrix_omega sub scenarios_without_hurdle.txt [12]. Кожна випадкова величина набуває $M = 641$ значень. Обрано довільну константу $b = 0.64$.

Матрицю сценаріїв для даних варіанта 2 наведено у табл. 2. Тут змінній x_i відповідає стовпчик manager_i в [12], $i = 1, \dots, 9$. Початкові значення коефіцієнтів функції втрат $\eta(X, Y)$ становили $y_1^0 = \dots = y_8^0 = 0.1111$, $y_9^0 = 0.1112$. Для обчислення було обрано поріг $h = VaR_{0.8}(\eta(X, Y^0)) =$ 6.685744E–02.

З використанням цих даних за допомогою пакета AORDA PSG [9] було отримано оптимальний розв'язок $Y^{*1} = (y_1^{*1}, \dots, y_9^{*1})$ стандартної задачі мінімізації bPOE (5) за обмежень (1), (2):

$$y_1^{*1} = 5.1412\text{E}-02, \quad y_2^{*1} = 3.7064\text{E}-01, \quad y_3^{*1} = y_4^{*1} = 0, \quad y_5^{*1} = 3.1470\text{E}-01,$$
$$y_6^{*1} = 3.8992\text{E}-02, \quad y_7^{*1} = 1.5936\text{E}-02,$$
$$y_8^{*1} = 1.3687\text{E}-01, \quad y_9^{*1} = 7.1450\text{E}-02. \tag{18}$$

Для розв'язання задачі (11)–(15) використовувався запропонований дворівневий метод оптимізації і було отримано:

- максимальне значення $\beta^* = 0.93642$, за якого виконується нерівність (13) з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$, де поріг $h = 6.685744\text{E}-02$;
- оптимальний розв'язок $Y^{*2} = (y_1^{*2}, \dots, y_9^{*2})$ задачі (12)–(15)

$$y_1^{*1} = 5.1412\text{E}-02, \quad y_2^{*1} = 3.7064\text{E}-01, \quad y_3^{*1} = y_4^{*1} = 0, \quad y_5^{*1} = 3.1470\text{E}-01,$$
$$y_6^{*1} = 3.8992\text{E}-02, y_7^{*1} = 1.5936\text{E}-02, y_8^{*1} = 1.3687\text{E}-01, y_9^{*1} = 7.1450\text{E}-02,$$

Т а б л и ц я 2. Значення випадкових величин у варіанті 2

b	x_1	x_2	…	x_7	x_8	x_9
6.4E – 02	2.900E – 03	–5.956E – 04	…	1.125E – 02	5.200E – 03	–4.508E – 04
6.4E – 02	–3.191E – 03	2.781E – 03	…	–3.401E – 03	–7.687E – 03	–5.981E – 04
…	…	…	…	…	…	…
6.4E – 02	–3.260E – 03	6.652E – 04	…	–8.804E – 03	–4.258E – 03	–1.148E – 03

який повністю збігається з розв'язком (18) стандартної задачі мінімізації bPOE (5) за обмежень (1), (2).

Отже, і для даних варіанта 2 обидва методи дають однаковий результат.

ВИСНОВКИ

У цій роботі запропоновано новий метод оптимізації надійності як альтернатива методу bPOE. Описаний метод відрізняється від bPOE наявністю додаткової змінної $\beta \in (0,1)$ і обмеження на цю змінну (8), а також потребою у розв'язанні додаткової задачі одновимірної оптимізації.

Для порівняння ефективності роботи запропонованого методу і оригінального методу bPOE було проведено чисельні експерименти з використанням двох різних наборів даних, розташованих на сайті компанії American Optimal Decisions. Обидва методи дали однаковий результат для кожного набору даних. Отримані результати можна перевірити, використовуючи ці та інші дані на сайті American Optimal Decisions [10], які призначені для проведення порівняльного аналізу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Rockafellar T., Royset J.O. On buffered failure probability in design and optimization of structures. *Journal of Reliability Engineering and System Safety.* 2010. Vol. 95, N 5. P. 499–510. https://doi.org/10.1016/j.ress.2010.01.001.
2. Rockafellar R.T. Convexity and reliability in engineering optimization. *Proc. of the 9th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (Chiangrai, Thailand).* 2015. P. 1–10. URL: https://sites.math.washington.edu/~rtr/papers/rtr239-Reliability.pdf.
3. Mafusalov A., Uryasev S. Buffered probability of exceedance: Mathematical properties and optimization. *SIAM. J. Optim.* 2018. Vol. 28. P. 1077–1103. https://doi.org/10.1137/15M1042644.
4. Rockafellar R.T., Uryasev S. Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance.* 2002. Vol. 26, N 7. P. 1443–1471. https://doi.org/10.1016/S0378-4266(02)00271-6.
5. Zrazhevsky G.M., Golodnikov A.N., Uryasev S.P., Zrazhevsky A.G. Application of buffered probability of exceedance in reliability optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2020. Vol. 56, N 3. P. 476–484. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00263-4.
6. Пепеляєв В.А., Голодніков О.М., Голоднікова Н.О. Оптимізація надійності в рослинництві. *Кібернетика та системний аналіз.* 2022. Т. 58, N 2. С. 35–41.
7. Пепеляєв В.А., Голоднікова Н.О. Оптимізація структури сільськогосподарського виробництва для забезпечення продовольчої безпеки України. *Компьютерная математика.* 2011. Вып. 1. С. 46–55. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Koma_2011_1_7.
8. Пепеляев В.А., Голодникова Н.А. Математические методы оценки риска потерь урожая и его учет при планировании структуры посевных площадей. *Кибернетика и системный анализ.* 2014. Т. 50, № 1. 67–77. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/bitstream/handle/123456789/115763/06-Pepelyayev.pdf?sequence=1.
9. Portfolio Safeguard. URL: http://www.aorda.com/index.php/portfolio-safeguard/.
10. Test problems for nonlinear, stochastic, mixed-integer optimization. URL: http://uryasev.ams.stonybrook.edu/index.php/research/testproblems.
11. Case study: Style classification with quantile regression. URL: http://uryasev.ams.stonybrook.edu/wp-content/uploads/2014/02/data_problem_kb_err_style_classification_fidelity_magellan_0p1_short.zip.
12. Case study: Omega portfolio rebalancing. URL: http://uryasev.ams.stonybrook.edu/wp-content/uploads/2018/05/data_problem_omega_short.zip.

V.A. Pepelyaev, A.N. Golodnikov, N.A. Golodnikova

RELIABILITY OPTIMIZATION METHOD ALTERNATIVE TO bPOE

Abstract. A new method of reliability optimization, alternative to the bPOE method, is developed. To compare the efficiency of the proposed method and of the original bPOE method, numerical experiments were performed using two different data sets. Analysis of the calculations showed that both methods gave the same results.

Keywords: bPOE, CVaR, minimization of failure probability, tail distribution function, loss function, threshold.

Надійшла до редакції 09.03.2022