УДК 519.6

В.А. СТОЯН
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *v_a_stoyan@ukr.net.*

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТАНУ ДИНАМІЧНИХ МУЛЬТИПЛІКАТИВНО НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Анотація. Поставлено і за середньоквадратичним критерієм розв'язано початково-крайові задачі динаміки нелінійних просторово-розподілених систем. Розглянуто системи, математична модель яких побудована добутком двох (або кількох) диференціальних перетворень їхньої функції стану. Будуються аналітичні залежності цієї функції за наявності дискретно і неперервно визначених початково-крайових спостережень за ними без обмежень на кількість та якість останніх. Оцінено точність множин отриманих розв'язків та досліджено їхню однозначність.

Ключові слова: нелінійні динамічні системи, системи з невизначеностями, системи з розподіленими параметрами, просторово-розподілені системи, псевдорозв'язки, некоректні початково-крайові задачі.

ВСТУП

Дослідження нелінійних просторово-розподілених динамічних систем є достатньо складною проблемою [1], незважаючи на їхню актуальність [2].

Проблеми розв'язання початково-крайових задач будуть взагалі непідйомними, якщо ці задачі формулюються некоректно за кількістю та якістю (дискретні, неперервні) гранично-початкових спостережень.

Для розв'язання задач динаміки просторово-розподілених недовизначених за початково-крайовими спостереженнями лінійних динамічних систем у роботі [3] запропоновано, а в працях [4, 5] доведено до завершення методику середньоквадратичного математичного моделювання впливу наявних початково-крайових збурень на стан системи дискретно і неперервно визначеними моделювальними функціями. Побудова розв'язків диференціально визначених математичних моделей таких систем, які за середньоквадратичним критерієм узгоджувалися із заданими дискретними та неперервними початково-крайовими спостереженнями, грунтується на інтегральних аналогах цих диференціальних моделей.

Запропонований в [6] підхід до побудови ядер інтегральних математичних моделей просторово-розподілених динамічних систем у випадку поширення [7, 8] на нелінійні динамічні процеси дав змогу за середньоквадратичним критерієм побудувати псевдообернення деяких класів нелінійних диференціально визначених математичних моделей. Останнє в поєднанні з методикою [3, 5] математичного моделювання лінійних динамічних систем дало змогу побудувати та дослідити середньоквадратичні наближення до функції стану цих класів систем і в обмежених просторово-часових областях. Якщо в [9, 10] це було зроблено для квадратично уточнених лінійно розподілених систем, то в цій роботі з використанням результатів запропонованого в [7] псевдообернення мультиплікативно нелінійних просторово розподілених динамічних систем розв'язуватимемо деякі початково-крайові задачі і для цих систем. Зокрема, досліджено квадратично-нелінійні динамічні системи та мультиплікативно нелінійні системи довільного порядку нелінійності для дискретних та неперервних спостережень за їхнім початково-крайовим станом. Буде побудовано та досліджено множини моделювальних факторів для таких спостережень, а за їхнім використанням — і розв'язків розглядуваних задач.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СИСТЕМИ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ МОДЕЛЮВАННЯ

Розглянемо проблеми дослідження нелінійних динамічних систем, поданих в [7, 8]. Особливість цих систем полягає в тому, що їхня нелінійна диференціальна модель утворюється добутком

$$\prod_{k=1}^{N} L_k(\partial_s)\, y(s) = u(s), \quad s \in S_0^T = S_0 \times [0, T] \tag{1}$$

двох $(N=2)$ (або кількох) лінійних диференціальних перетворень $L_k(\partial_s)y(s)$ $(k=\overline{1,N})$ функції стану $y(s)$ системи.

У працях [7, 8] показано, що диференціальну модель (1), як і у випадку лінійних динамічних систем, можна [6] замінити інтегральною математичною моделлю вигляду

$$y(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}G_k(s-s')u_k(s')ds' \quad (k\in\overline{\{1,N\}}), \tag{2}$$

де $G_k(s-s')$ — функція Гріна оптимально за певним критерієм [7, 8] вибраного k-го лінійного диференціального перетворення

$$L_k(\partial_s)y(s)=u(s)$$

у необмеженій просторово-часовій області, $u_k(s)$ — нелінійно з урахуванням операторів $L_j(\partial_s)$ $(j=\overline{1,N},\ j\neq k)$ перетворене зовнішньодинамічне збурення $u(s)$ системи (1). Зауважимо принагідно, що [7, 8] заміна диференціальної моделі (1) на інтегральну виконувалася у необмеженій просторово-часовій області. Ця заміна, на відміну від лінійних динамічних систем, не є адекватною і виконувалася за середньоквадратичним критерієм. У процесі заміни функцій $u(s)$ та $y(s)$ (одна або обидві одночасно) вважалися дискретно визначеними.

Проте, незважаючи на сказане, перехід від математичної моделі (1) до моделі вигляду (2) є виправданим, оскільки (як доведено далі) дає змогу з використанням методик математичного моделювання динаміки лінійних динамічних систем [4, 5] побудувати функцію $y(s)$ стану системи (1) також і в обмеженій просторово-часовій області S_0^T.

Для дослідження динаміки системи (1) в обмеженій просторово-часовій області, як і в роботах [9, 10], припускатимемо, що в початковий момент часу $t=0$ та на контурі Γ просторової області S_0 мають місце такі спостереження:

а) випадок дискретно визначених початково-крайових умов:

$$L_r^0(\partial_t)y(s)\Big|_{\substack{t=0\\x=x_l^0}}=Y_{rl}^0\ \ (x_l^0\in S_0,\ l=\overline{1,L_0},\ r=\overline{1,R_0}), \tag{3}$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)\Big|_{x=x_l^\Gamma}=Y_{\rho l}^\Gamma\ \ (s_l^\Gamma\in\Gamma\times[0,T],\ l=\overline{1,L_\Gamma},\ \rho=\overline{1,R_\Gamma}); \tag{4}$$

б) випадок неперервно визначених початково-крайових умов:

$$L_r^0(\partial_t)y(s)\Big|_{t=0}=Y_r^0(x)\ (x\in S_0,\ r=\overline{1,R_0}), \tag{5}$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)\Big|_{x=x^\Gamma\in\Gamma}=Y_\rho^\Gamma(x^\Gamma,\ t)\ (t\in[0,T],\ \rho=\overline{1,R_\Gamma}). \tag{6}$$

Тут, як і вище, $L_r^0(\partial_t)\ (r=\overline{1,R_0})$ та $L_\rho^\Gamma(\partial_x)\ (\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ — лінійні диференціальні оператори, $Y_r^0(x)\ (r=\overline{1,R_0})$ та $L_\rho^\Gamma(x,t)\ (\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ — задані функції, а $Y_{rl}^0\ (l=\overline{1,L_0},\ r=\overline{1,R_0})$ та $Y_{\rho l}^\Gamma\ (l=\overline{1,L_\Gamma},\ \rho=\overline{1,R_\Gamma})$ — задані значення цих функцій.

Так само, як у випадку дослідження лінійних динамічних систем [4, 5], критерії розв'язання задач (1), (3), (4) та (1), (5), (6) матимуть вигляд:

а) для задачі (1), (3), (4)

$$\sum_{r=1}^{R_0}\sum_{l=1}^{L_0}\left(L_r^0(\partial_t)y(s)\Big|_{\substack{t=0\\x=x_l^0}}-Y_{rl}^0\right)^2+$$

$$+\sum_{\rho=1}^{R_\Gamma}\sum_{l=1}^{L_\Gamma}\left(L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma}-Y_{\rho l}^\Gamma\right)^2\to\min_{y(s)}; \tag{7}$$

б) для задачі (1), (5), (6)

$$\sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} \left(L_r^0(\partial_t) y(s) \Big|_{t=0} - Y_r^0(x) \right)^2 dx +$$
$$+ \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{\Gamma \times [0, T]} (L_\rho^\Gamma(\partial_x) y(s) - Y_\rho^\Gamma(x, t))^2 ds \to \min_{y(s)} . \tag{8}$$

Для розв'язання задач (7), (8) щодо системи (1) функцію $y(s)$ стану останньої, як і вище, подамо у вигляді суми

$$y(s) = y_\infty(s) + y_0(s) + y_\Gamma(s), \tag{9}$$

складові якої визначають вплив на $y(s)$ розподілених просторово-часових збурень $u(s)$, початкових (3) або (5) та крайових (4) або (6) умов.

Залежно від постановки та особливостей розв'язання задач складову $y_\infty(s)$ функції (9) запишемо відповідно до показуваної цією постановкою модифікації представлення (2) розв'язку рівняння (1) в необмеженій просторово-часовій області. Аналогічні представлення виберемо для функцій $y_0(s)$ та $y_\Gamma(s)$. Як і раніше, функція $u_k(s)$ нелінійно перетвореного розподіленого зовнішньодинамічного збурення $u(s)$ буде замінена функціями $u_{k0}(s)$ та $u_{k\Gamma}(s)$ нелінійно перетворених та визначених в областях $S^0 = S_0 \times (-\infty, 0]$ та $S^\Gamma = (R^n \setminus S_0) \times [0, T]$ моделювальних функцій $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ відповідно.

Розглянемо особливості вибору представлення складової $y_\infty(s)$ (а отже і $y_0(s)$ та $y_\Gamma(s)$), а також побудови моделювальних функцій $u_{k0}(s)$ та $u_{k\Gamma}(s)$ залежно від особливостей постановки початково-крайових задач для системи (1).

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕПЕРЕРВНО ВИЗНАЧЕНИХ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ УМОВ ДЛЯ КВАДРАТИЧНО-НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Розглянемо задачу побудови функцій $y(s)$ стану системи (1) для $N = 2$ за умови, що початковий $(t = 0)$ стан системи визначається співвідношенням (9). Складову $y_\infty(s)$ виберемо [7, 8] у вигляді

$$y_\infty(s) = \bar{G}_k(s)\bar{u}_k, \tag{10}$$

де

$$\bar{u}_k = \mathrm{col}(u_k(s'_m),\ m = \overline{1, M})\sqrt{\Delta s'_M},$$

— вектор значень нелінійно перетвореної функції $u(s)$ розподілених зовнішньо-динамічних збурень в точках $s'_m \in S_0^T$ $(m = \overline{1, M})$,

$$\bar{G}_k(s) = \mathrm{str}(G_k(s - s'_m),\ m = \overline{1, M})\sqrt{\Delta s'_M},$$

— рядок значень (у цих же точках) функції Гріна $G_k(s - s')$, індекс k якої (як і перетворення $u_k(s'_m)$) вибирається згідно викладеного в [8].

Уведемо до розгляду (як і до розгляду лінійних динамічних систем) моделювальні функції $u_0(s)$, $s \in S^0 = S_0 \times (-\infty, 0]$, та $u_\Gamma(s)$, $s \in S^\Gamma = (R^n \setminus S_0) \times [0, T]$, а також їхні нелінійні (аналогічно $u_k(s)$) перетворення $u_{k0}(s)$ та $u_{k\Gamma}(s)$ співвідношеннями

$$y_0(s) = \bar{G}_{k0}(s)\bar{u}_{k0}, \tag{11}$$

$$y_\Gamma(s) = \bar{G}_{k\Gamma}(s)\bar{u}_{k\Gamma}, \tag{12}$$

де

$$\bar{u}_{k0} = \mathrm{col}\,(u_{k0}(s_m^0), m = \overline{1, M_0})\ \ (s_m^0 \in S^0),$$
$$\bar{u}_{k\Gamma} = \mathrm{col}(u_{k\Gamma}(s_m^\Gamma), m = \overline{1, M_\Gamma})\ \ (s_m^\Gamma \in S^\Gamma),$$
$$\bar{G}_{k0}(s) = \mathrm{str}(G_k(s - s_m^0), m = \overline{1, M_0}),$$

$$\overline{G}_{k\Gamma}(s) = \mathrm{str}(G_k(s - s_m^{\Gamma}), m = \overline{1, M_{\Gamma}}),$$

та визначимо складові $y_0(s)$ та $y_{\Gamma}(s)$ розв'язку (9).

Під час аналіза виразів (11) та (12) функції $y(s)$ стану системи (1), (5), (6) знехтуємо визначеннями моделювальних функцій $u_0(s)$, $u_{\Gamma}(s)$ або їхніх значень $u_0(s_m^0)$, $u_{\Gamma}(s_m^{\Gamma})$ та обмежимося знаходженням компонент

$$u_{k0m} = u_{k0}(s_m^0) \ \ (m = \overline{1, M_0})$$

та

$$u_{k\Gamma m} = u_{k\Gamma}(s_m^{\Gamma}) \ \ (m = \overline{1, M_{\Gamma}})$$

векторів $\overline{u}_{k0} = \mathrm{col}(u_{k0m},\ m = \overline{1, M_0})$ та $\overline{u}_{k\Gamma} = \mathrm{col}(u_{k\Gamma m},\ m = \overline{1, M_{\Gamma}})$ відповідно. Вектори $\overline{u}_{k0}$ та $\overline{u}_{k\Gamma}$ знайдемо середньоквадратичним оберненням рівнянь, отриманих з (5) та (6) після підстановки туди (9) з урахуванням (10)–(12). Ці рівняння матимуть вигляд

$$B_{k11}(x)\overline{u}_{k0} + B_{k12}(x)\overline{u}_{k\Gamma} = Y^0(x) \ \ (x \in S_0), \tag{13}$$

$$B_{k21}(s)\overline{u}_{k0} + B_{k22}(s)\overline{u}_{k\Gamma} = Y^{\Gamma}(s) \ \ (s \in \Gamma \times [0, T]), \tag{14}$$

де

$$B_{k11}(x) = \mathrm{col}(L_r^0(\partial_t)\overline{G}_{k0}(s)\Big|_{t=0}, r = \overline{1, R_0}),$$

$$B_{k12}(x) = \mathrm{col}(L_r^0(\partial_t)\overline{G}_{k\Gamma}(s)\Big|_{t=0}, r = \overline{1, R_0}),$$

$$B_{k21}(s) = \mathrm{col}(L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_x)\overline{G}_{k0}(s), \rho = \overline{1, R_{\Gamma}}),$$

$$B_{k22}(s) = \mathrm{col}(L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_x)\overline{G}_{k\Gamma}(s),\ \rho = \overline{1, R_{\Gamma}}),$$

$$Y^0(x) = \mathrm{col}(Y_r^0(x), r = \overline{1, R_0}),$$

$$Y^{\Gamma}(s) = \mathrm{col}(Y_{\rho}^0(x, t), \rho = \overline{1, R_{\Gamma}}).$$

Об'єднуючи два вектори $\overline{u}_{k0}$ та $\overline{u}_{k\Gamma}$ в один

$$\overline{u}_{k0\Gamma} = \mathrm{col}(\overline{u}_{k0}, \overline{u}_{k\Gamma}) \tag{15}$$

та вводячи до розгляду матричну та векторну функції

$$B_k(s) = \begin{pmatrix} (B_{k11}(x)(x \in S_0))(B_{k12}(x)(x \in S_0)) \\ (B_{k21}(s)(s \in \Gamma \times [0, T]))(B_{k22}(s)(s \in \Gamma \times [0, T])) \end{pmatrix},$$

$$Y(s) = \begin{pmatrix} Y^0(x)(x \in S_0) \\ Y^{\Gamma}(s)(s \in \Gamma \times [0, T]) \end{pmatrix},$$

систему (13), (14) запишемо у вигляді

$$B_k(s)\overline{u}_{k0\Gamma} = Y(s). \tag{16}$$

Останнє означає, що визначення введених у (11) та (12) векторів $\overline{u}_{k0}$ та $\overline{u}_{k\Gamma}$ зводиться до середньоквадратичного обернення системи (16) або (що еквівалентно) до знаходження вектора

$$\overline{u}_{k0\Gamma} = \arg \min_{\overline{u} \in R^{M_0 + M_{\Gamma}}} \left\| \int_{(\cdot)} (B_k(s)\overline{u} - Y(s))\, ds \right\|^2. \tag{17}$$

Зауважимо, що інтегрування тут, як і надалі, виконується згідно визначання аргументу s.

Розв'язком системи (16), знайденим згідно (17), буде вектор

$$\overline{u}_{k0\Gamma} = P_k^+ B_{kY} + \upsilon_k - P_k^+ P_k \upsilon_k \ \ \forall \upsilon_k \in R^{M_0 + M_{\Gamma}}, \tag{18}$$

де

$$P_k = \int_{(\cdot)} B_k^T(s) B_k(s) ds = \begin{pmatrix} P_{k11} & P_{k12} \\ P_{k21} & P_{k22} \end{pmatrix},$$

$$B_{kY} = \int_{(\cdot)} B_k^T(s) Y(s) ds = \begin{pmatrix} B_{kY1} \\ B_{kY2} \end{pmatrix}$$

для

$$P_{k11} = \int_{S_0} B_{k11}^T(x) B_{k11}(x) dx,$$

$$P_{k12} = \int_{\Gamma \times [0,T]} B_{k21}^T(s) B_{k21}(s) ds,$$

$$P_{k21} = \int_{S_0} B_{k12}^T(x) B_{k12}(x) dx,$$

$$P_{k22} = \int_{\Gamma \times [0,T]} B_{k22}^T(s) B_{k22}(s) ds,$$

$$B_{kY1} = \int_{S_0} B_{k11}^T(x) Y^0(x) dx + \int_{\Gamma \times [0,T]} B_{k21}^T(s) Y^\Gamma(s) ds,$$

$$B_{kY2} = \int_{S_0} B_{k12}^T(x) Y^0(x) dx + \int_{\Gamma \times [0,T]} B_{k22}^T(s) Y^\Gamma(s) ds.$$

Зауважимо, що наявний у (18) вектор v_k дорівнює нулю, якщо $\det P_k > 0$, а

$$\varepsilon^2 = \min_{\bar{u}_{k0\Gamma}} \left\| \int_{(\cdot)} (B_k(s)\bar{u} - Y(s) ds \right\|^2 = Y^2 - B_{kY}^T P_k^+ B_{kY} \tag{19}$$

для

$$Y^2 = \int_{S_0} (Y^0(x))^T Y^0(x) dx + \int_{\Gamma \times [0,T]} (Y^\Gamma(s))^T Y^\Gamma(s) ds.$$

Визначений співвідношенням (18) вектор $\bar{u}_{k0\Gamma}$, а отже і вектори (див. (15)) $\bar{u}_{k0}, \bar{u}_{k\Gamma}$, дають змогу згідно з (11) та (12) знайти складові $y_0(s)$ та $y_\Gamma(s)$. З долученням визначеної згідно з (10) складової $y_\infty(s)$ співвідношенням (9) визначимо і функцію $y(s)$ стану розглядуваної системи (1) з початково-крайовими умовами (5), (6). Точність, з якою знайдена таким чином функція $y(s)$ задовольнятиме початково-крайовим умовам (5), (6), буде визначатися величиною ε^2 (див. (19)).

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИСКРЕТНО ВИЗНАЧЕНИХ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ УМОВ ДЛЯ КВАДРАТИЧНО-НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Розглянемо особливості дослідження динаміки системи (1) у разі, коли початково-крайовий стан її спостерігається згідно з (3), (4).

Для побудови функції $y(s)$ стану розглядуваної системи, яка б згідно з (7) задовольняла умовам (3), (4), застосуємо представлення (9) цієї функції. Як і вище, складові $y_\infty(s)$, $y_0(s)$ та $y_\Gamma(s)$ визначимо співвідношеннями (10)–(12).

Для визначення моделювальних векторів $\bar{u}_{k0}$ та $\bar{u}_{k\Gamma}$ функцію (9) з урахуванням (11), (12) підставимо в (3), (4). У результаті отримаємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$A_{k11}\bar{u}_{k0} + A_{k12}\bar{u}_{k\Gamma} = Y^0, \tag{20}$$

$$A_{k21}\bar{u}_{k0} + A_{k22}\bar{u}_{k\Gamma} = Y^\Gamma, \tag{21}$$

де

$$A_{k11} = \mathrm{col}((L_r^0(\partial_t)\bar{G}_{k0}(s)\Big|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0}},\ l = \overline{1, L_0}),\ r = \overline{1, R_0}),$$

$$A_{k12} = \text{col}((L_r^0(\partial_t)\overline{G}_{k\Gamma}(s)\Big|_{\substack{t=0\\ x=x_l^0}},\ l=\overline{1, L_0}),\ r=\overline{1, R_0}),$$

$$A_{k21} = \text{col}((L_\rho^\Gamma(\partial_x)\overline{G}_{k0}(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma},\ l=\overline{1, L_\Gamma}),\ \rho=\overline{1, R_\Gamma}),$$

$$A_{k22} = \text{col}((L_\rho^\Gamma(\partial_x)\overline{G}_{k\Gamma}(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma},\ l=\overline{1, L_\Gamma}),\ \rho=\overline{1, R_\Gamma}),$$

$$Y^0 = \text{col}((Y_{rl}^0,\ l=\overline{1, L_0}),\ r=\overline{1, R_0}),$$

$$Y^\Gamma = \text{col}((Y_{\rho l}^\Gamma,\ l=\overline{1, L_\Gamma}),\ \rho=\overline{1, R_\Gamma}).$$

Позначивши

$$A_k = \begin{pmatrix} A_{k11} & A_{k12} \\ A_{k21} & A_{k22} \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} Y^0 \\ Y^\Gamma \end{pmatrix},\ \overline{u}_k = \begin{pmatrix} \overline{u}_{k0} \\ \overline{u}_{k\Gamma} \end{pmatrix},$$

систему (20), (21) запишемо у вигляді

$$A_k \overline{u}_k = Y,$$

звідки

$$\overline{u}_k = \arg \min_{u \in R^{M_0+M_\Gamma}} \| A_k u - Y \|^2 = A_k^+ Y + v_k - A_k^+ A_k v_k \tag{22}$$

за довільного $v_k \in R^{M_0+M_\Gamma}$ такого, що $v_k \equiv 0$ для $\det(A_k^T A_k) > 0$. При цьому

$$\varepsilon^2 = \min_{\overline{u}_k} \| A_k \overline{u}_k - Y \|^2 = Y^T Y - Y^T A_k A_k^+ Y.$$

Величиною ε^2 визначатимемо і точність, з якою виконуватимуться початково-крайові співвідношення (3), (4) для $y(s)$ визначеного згідно з (9) з урахуванням (10)–(12) та отриманих з (22)

$$\overline{u}_{k0} = (Q_{k11}, Q_{k12})Y + v_{k1} - (Q_{k11}, Q_{k12})A_k v_k,$$
$$\overline{u}_{k\Gamma} = (Q_{k21}, Q_{k22})Y + v_{k2} - (Q_{k21}, Q_{k22})A_k v_k$$

для

$$\begin{pmatrix} Q_{k11} & Q_{k12} \\ Q_{k21} & Q_{k22} \end{pmatrix} = P_k^+,\ \begin{pmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \end{pmatrix} = v_k.$$

ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОБМЕЖЕНИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ ЗА ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИМ СТАНОМ СИСТЕМИ

Розглянуті задачі математичного моделювання стану системи (1) розв'язано за наявності початково-крайових умов (3), (4) та (5), (6), якими передбачаються початково-крайові спостереження за системою як з використанням функції $y(s)$ стану системи, так і лінійних комбінацій $L_r^0(\partial_t)\,y(s)$ $(r=\overline{1, R_0})$, $L_\rho^\Gamma(\partial_x)\,y(s)$ $(r=\overline{1, R_\Gamma})$ похідних від цієї функції. Зауважимо, що отримані розв'язки мають місце і у разі, коли $R_0 = R_\Gamma = 1$ та $L_r^0(\partial_t) = L_\rho^\Gamma(\partial_x) = 1$, а спостереження за початково-крайовим станом системи виконується тільки з використанням функції $y(s)$. Більша доступність таких спостережень для практики дає змогу використовувати особливості розв'язання розглянутих вище задач для цього випадку.

Якщо для побудови функції стану системи (1) для випадку, коли

$$y(s)|_{t=0} = Y^0(x) \quad (x \in S_0),$$

$$y(s)|_{x=x^\Gamma \in \Gamma} = Y^\Gamma(x^\Gamma, t) \quad (t \in [0, T]),$$

альтернатив розглядуваному вище варіанту розв'язання задачі (1), (5), (6) немає, то за наявності спостережень

$$y(s)\Big|_{\substack{t=0\\ x=x_l^0\in S^0}} = Y_l^0 \quad (l=\overline{1, L_0}), \tag{23}$$

$$y(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma\in\Gamma\times[0,T]} = Y_l^\Gamma \quad (l=\overline{1, L_\Gamma}) \tag{24}$$

за станом системи такі альтернативи можливі. Дійсно, у цьому випадку відправними можуть бути як залежність (10), так і залежності з [7]

$$\bar{y} = A_k \bar{u}_k \tag{25}$$

та з [8]

$$\bar{y} = \int_{S_0^T} \overline{G}_k(s')u_k(s')ds', \tag{26}$$

якими визначається вектор $\bar{y} = \mathrm{col}(y(s_1),\ldots, y(s_L))$ $(s_l \in S_0^T,\ l=\overline{1, L})$ значень функції $y(s)$ стану системи (1) через функцію $u_k(s)$ (або вектор $\bar{u}_k$ її значень) нелінійно перетворених зовнішньодинамічних збурень $u(s)$.

Перш ніж коментувати співвідношення (25), (26) та використовувати їх для дослідження стану системи (1) за наявності спостережень (23), (24) за нею, зауважимо, що для обчислення значень функції стану $y(s)$ в точках $s_1,\ldots, s_L$ згідно з (25), (26) вибір значення k визначений в [7, 8], а

$$\bar{u}_k = \mathrm{col}(u_k(s'_m),\ m=\overline{1, M}),$$

$$A_k = [G_k(s_l - s'_m)]_{l,\,m=1}^{l=L,\,m=M},$$

$$\overline{G}_k(s') = \mathrm{col}(G_k(s_l - s'),\ l=\overline{1, L}).$$

Неважко бачити, що залежність (25) для $N=2$ є частинним випадком прийнятої нами до розгляду залежності (10). Однак залежність (25) побудована в [7] для довільного порядку нелінійності розглядуваної системи, а саме для випадку, коли динаміка її визначається рівнянням (1) за довільного N. Такий же статус має з [7] і залежність (26).

Враховуючи, що зовнішньої залежності співвідношень (25) та (26) від порядку N нелінійності рівняння (1) немає (вона міститься у нелінійних залежностях функції $u_k(s)$ та вектора $\bar{u}_k$ від розподілених просторово-часових збурень $u(s)$), задачу математичного моделювання початково-крайових спостережень (23) та (24) розв'язуватимемо, знехтуючи значеннями N.

Зауважимо принагідно і особливості використання співвідношень (25) та (26) для розв'язання однієї і тієї ж задачі — побудови функції $y(s)$ стану системи (1), спостережуваної згідно з (23) та (24). Розв'язання задачі, що базується на співвідношенні (25) і є простішим для чисельної реалізації, дає змогу знайти моделювальні фактори тільки в дискретно визначених точках. Використання співвідношення (26) для розв'язання розглядуваної задачі є більш загальним, оскільки моделювальні фактори у цьому разі можна знайти функціонально.

ВИПАДОК ДИСКРЕТНО ВИЗНАЧЕНИХ МОДЕЛЮВАЛЬНИХ ФАКТОРІВ

Розглянемо варіант розв'язання задачі побудови вектора $\bar{y} = \mathrm{col}(y(s_l),\ l=\overline{1, L})$ значень функції $y(s)$ стану системи (1) у дискретно заданих точках $s_l = S_0^T$ $(l=\overline{1, L})$ за умови, коли інформація про початково-крайовий стан системи визначена співвідношеннями (23), (24).

Для розв'язання задачі побудови вектора $\bar{y}$, який за середньоквадратичним критерієм задовольняє співвідношенням (23), (24), будемо виходити з того, що

$$\bar{y} = \bar{y}_\infty + \bar{y}_0 + \bar{y}_\Gamma, \tag{27}$$

де згідно з (25)

$$\bar{y}_\infty = A_k \bar{u}_k. \tag{28}$$

Аналогічно з (28) подамо складові

$$\bar{y}_0 = A_{k0}\bar{u}_{k0}, \tag{29}$$

$$\bar{y}_\Gamma = A_{k\Gamma}\bar{u}_{k\Gamma}. \tag{30}$$

Тут

$$\bar{u}_{k0} = \mathrm{col}(u_k(\sigma_m^0),\ m = \overline{1, M_0}),$$
$$\bar{u}_{k\Gamma} = \mathrm{col}(u_k(\sigma_m^\Gamma),\ m = \overline{1, M_\Gamma}),$$
$$A_{k0} = [G_k(s_l - \sigma_m^0)]_{l,m=1}^{l=L,\, m=M_0},$$
$$A_{k\Gamma} = [G_k(s_l - \sigma_m^\Gamma)]_{l,m=1}^{l=L,\, m=M_\Gamma}.$$

При цьому

$$\sigma_m^0 \in S^0 = S_0 \times (-\infty, T]\ (m = \overline{1, M_0}),$$
$$\sigma_m^\Gamma \in S^\Gamma = (R^v \setminus S_0) \times [0, T]\ (m = \overline{1, M_\Gamma}).$$

Для знаходження моделювальних векторів $\bar{u}_{k0}$ та $\bar{u}_{k\Gamma}$, які фігурують в (29) та (30), використовуватимемо співвідношення (23) та (24). Враховуючи, що

$$\mathrm{col}(y(s_l^0),\ l = \overline{1, L_0}) = A_k^0\bar{u}_k + A_k^{00}\bar{u}_{k0} + A_k^{0\Gamma}\bar{u}_{k\Gamma},$$
$$\mathrm{col}(y(s_l^\Gamma),\ l = \overline{1, L_\Gamma}) = A_k^\Gamma\bar{u}_k + A_k^{\Gamma 0}\bar{u}_{k0} + A_k^{\Gamma\Gamma}\bar{u}_{k\Gamma},$$

де $s_l^0 = (0, x_l^0)$, $\bar{u}_k$ визначені вище, а також

$$A_k^0 = [G_k(s_l^0 - s'_m)]_{l,m=1}^{l=L_0,\, m=M},$$
$$A_k^\Gamma = [G_k(s_l^\Gamma - s'_m)]_{l,m=1}^{l=L_\Gamma,\, m=M},$$
$$A_k^{00} = [G_k(s_l^0 - \sigma_m^0)]_{l,m=1}^{l=L_0,\, m=M_0},$$
$$A_k^{0\Gamma} = [G_k(s_l^0 - \sigma_m^\Gamma)]_{l,m=1}^{l=L_0,\, m=M_\Gamma},$$
$$A_k^{\Gamma 0} = [G_k(s_l^\Gamma - \sigma_m^0)]_{l,m=1}^{l=L_\Gamma,\, m=M_0},$$
$$A_k^{\Gamma\Gamma} = [G_k(s_l^\Gamma - \sigma_m^\Gamma)]_{l,m=1}^{l=L_\Gamma,\, m=M_\Gamma},$$

та позначивши

$$Y^0 = \mathrm{col}(Y_l^0,\ l = \overline{1, L_0}),$$
$$Y^\Gamma = \mathrm{col}(Y_l^\Gamma,\ l = \overline{1, L_\Gamma})$$

вектори спостережуваних згідно з (23) та (24) початково-крайових умов, отримуємо систему алгебраїчних рівнянь стосовно векторів $\bar{u}_{k0}$ та $\bar{u}_{k\Gamma}$:

$$A_k^{00}\bar{u}_{k0} + A_k^{0\Gamma}\bar{u}_{k\Gamma} = Y^0 - A_k^0\bar{u}_k, \tag{31}$$

$$A_k^{\Gamma 0}\bar{u}_{k0} + A_k^{\Gamma\Gamma}\bar{u}_{k\Gamma} = Y^\Gamma - A_k^\Gamma\bar{u}_k. \tag{32}$$

Для розв'язання (середньоквадратичного обернення) системи (31), (32) її запишемо у вигляді

$$A_k\bar{u}_{k0\Gamma} = \bar{Y}, \tag{33}$$

де

$$A_k = \begin{pmatrix} A_k^{00} & A_k^{0\Gamma} \\ A_k^{\Gamma 0} & A_k^{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix},\ \bar{u}_{k0\Gamma} = \begin{pmatrix} \bar{u}_{k0} \\ \bar{u}_{k\Gamma} \end{pmatrix},\ \bar{Y} = \begin{pmatrix} Y^0 - A_k^0\bar{u}_k \\ Y^\Gamma - A_k^\Gamma\bar{u}_k \end{pmatrix}.$$

Розв'язком (33) таким, що

$$\bar{u}_{k0\Gamma} = \arg \min_{u \in R^{M_0+M_\Gamma}} \| A_k u - \bar{Y} \|,$$

буде

$$\bar{u}_{k0\Gamma} = P_k^+ A_k^T \bar{Y} + v_k - P_k^+ P_k v_k$$

за довільного $v_k \in R^{M_0+M_\Gamma}$ та $P_k = A_k^T A_k$. Звідки

$$\bar{u}_{k0} = (Q_{11}, Q_{12})(A_k^T \bar{Y} - P_k v_k) + v_{k1}, \tag{34}$$

$$\bar{u}_{k\Gamma} = (Q_{21}, Q_{22})(A_k^T \bar{Y} - P_k v_k) + v_{k2} \tag{35}$$

для

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} = P_k^+, \quad \begin{pmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \end{pmatrix} = v_k.$$

З урахуванням (34), (35), а далі і (28)–(30) співвідношенням (27) визначимо розв'язок задачі. Узгодженість цього розв'язку зі спостереженнями (23) та (24) за системою визначатиметься точністю розв'язання (псевдообернення) системи (33), а саме:

$$\min_{\bar{u}_{k0\Gamma}} \| A_k \bar{u}_{k0\Gamma} - \bar{Y} \|^2 = \bar{Y}^T \bar{Y} - \bar{Y}^T A_k P_k^+ A_k^T \bar{Y}.$$

Розв'язок розглядуваної задачі буде однозначним $(v_k \equiv 0)$, якщо $\det P_k > 0$.

ВИПАДОК НЕПЕРЕРВНО ВИЗНАЧЕНИХ МОДЕЛЮВАЛЬНИХ ФАКТОРІВ

Розглянемо варіант розв'язання зазначеної вище задачі побудови вектора $\bar{y} = \mathrm{col}(y(s_l),\ l = \overline{1, L})$ $(s_l \in S_0^T)$ значень функції $y(s)$ стану системи (1) згідно з (23), (24) з урахуванням розв'язку (26) рівняння (1) в необмеженій просторово-часовій області.

Подамо, як і раніше, розв'язок задачі співвідношенням (27) та представимо компоненти-вектори $\bar{y}_\infty$, $\bar{y}_0$, $\bar{y}_\Gamma$ на відміну від (28)–(30) у вигляді:

$$\bar{y}_\infty = \int_{S_0^T} \bar{G}_k(s) u_k(s) ds, \tag{36}$$

$$\bar{y}_0 = \int_{S^0} \bar{G}_{k0}(s) u_{k0}(s) ds, \tag{37}$$

$$\bar{y}_\Gamma = \int_{S^\Gamma} \bar{G}_{k\Gamma}(s) u_{k\Gamma}(s) ds. \tag{38}$$

Тут $u_k(s)$ $(s \in S_0^T)$ — нелінійно перетворена, як і у [7], функція розподілених зовнішньодинамічних збурень $u(s)$; $u_{k0}(s)$ $(s \in S^0)$ та $u_{k\Gamma}(s)$ $(s \in S^\Gamma)$ — нелінійно (аналогічно $u_k(s)$) перетворені моделювальні функції $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$, а також

$$\bar{G}_k(s) = \mathrm{col}(G_k(s_l - s),\ l = \overline{1, L}) \ (s \in S_0^T),$$

$$\bar{G}_{k0}(s) = \mathrm{col}(G_k(s_l - s),\ l = \overline{1, L}) \ (s \in S^0),$$

$$\bar{G}_{k\Gamma}(s) = \mathrm{col}(G_k(s_l - s),\ l = \overline{1, L}) \ (s \in S^\Gamma).$$

Позначивши

$$\bar{G}_k^0(s) = \mathrm{col}(G_k(s_l^0 - s),\ l = \overline{1, L_0}) \ (s \in S_0^T),$$

$$\bar{G}_{k0}^0(s) = \mathrm{col}(G_k(s_l^0 - s),\ l = \overline{1, L_0}) \ (s \in S^0),$$

$$\bar{G}_{k\Gamma}^0(s) = \mathrm{col}(G_k(s_l^0 - s),\ l = \overline{1, L_0}) \ (s \in S^\Gamma)$$

для $s_l^0 = (x_l^0, 0)$ $(x_l^0 \in S_0)$, а також

$$\overline{G}_k^{\Gamma}(s) = \mathrm{col}(G_k(s_l^{\Gamma} - s),\ l = \overline{1, L_\Gamma})\ \ (s \in S_0^T),$$
$$\overline{G}_{k0}^{\Gamma}(s) = \mathrm{col}(G_k(s_l^{\Gamma} - s),\ l = \overline{1, L_\Gamma})\ \ (s \in S^0),$$
$$\overline{G}_{k\Gamma}^{\Gamma}(s) = \mathrm{col}(G_k(s_l^{\Gamma} - s),\ l = \overline{1, L_\Gamma})\ \ (s \in S^{\Gamma})$$

для $s_l^{\Gamma} \in \Gamma \times [0, T]$, з урахуванням (36)–(38) системою векторів

$$\overline{y}^0 = \mathrm{col}(y(s_l^0),\ l = \overline{1, L_0}) = \int_{S_0^T} \overline{G}_k^0(s) u_k(s) ds + \\ + \int_{S^0} \overline{G}_{k0}^0(s) u_{k0}(s) ds + \int_{S^{\Gamma}} \overline{G}_{k\Gamma}^0(s) u_{k\Gamma}(s) ds, \tag{39}$$

$$\overline{y}^{\Gamma} = \mathrm{col}(y(s_l^{\Gamma}),\ l = \overline{1, L_\Gamma}) = \int_{S_0^T} \overline{G}_k^{\Gamma}(s) u_k(s) ds + \\ + \int_{S^0} \overline{G}_{k0}^{\Gamma}(s) u_{k0}(s) ds + \int_{S^{\Gamma}} \overline{G}_{k\Gamma}^{\Gamma}(s) u_{k\Gamma}(s) ds \tag{40}$$

знаходимо значення функції $y(s)$ у точках спостереження початкового (23) та крайового (24) станів досліджуваної системи.

З урахуванням (39), (40) отримуємо з (23), (24) систему інтегральних рівнянь для знаходження моделювальних функцій $u_{k0}(s)$ та $u_{k\Gamma}(s)$:

$$\int_{S^0} \overline{G}_{k0}^0(s) u_{k0}(s) ds + \int_{S^{\Gamma}} \overline{G}_{k\Gamma}^0(s) u_{k\Gamma}(s) ds = \overline{Y}^0, \tag{41}$$

$$\int_{S^0} \overline{G}_{k0}^{\Gamma}(s) u_{k0}(s) ds + \int_{S^{\Gamma}} \overline{G}_{k\Gamma}^{\Gamma}(s) u_{k\Gamma}(s) ds = \overline{Y}^{\Gamma}, \tag{42}$$

де

$$\overline{Y}^0 = Y^0 - \int_{S_0^T} \overline{G}_k^0(s) u_k(s) ds,$$
$$\overline{Y}^{\Gamma} = Y^{\Gamma} - \int_{S_0^T} \overline{G}_k^{\Gamma}(s) u_k(s) ds.$$

Для розв’язання (середньоквадратичного обернення, якщо розв’язка не існує) системи (41), (42) її приведемо до вигляду

$$\int_{(\cdot)} A_k(s) \overline{u}_k(s) ds = \overline{Y}, \tag{43}$$

де

$$A_k(s) = \begin{pmatrix} (\overline{G}_{k0}^0(s)\ \ (s \in S^0)) & (\overline{G}_{k\Gamma}^0(s)\ \ (s \in S^{\Gamma})) \\ (\overline{G}_{k0}^{\Gamma}(s)\ \ (s \in S^0)) & (\overline{G}_{k\Gamma}^{\Gamma}(s)\ \ (s \in S^{\Gamma})) \end{pmatrix},$$
$$\overline{u}_k(s) = \begin{pmatrix} u_{k0}(s)\ \ (s \in S^0) \\ u_{k\Gamma}(s)\ \ (s \in S^{\Gamma}) \end{pmatrix},\ \ \overline{Y} = \begin{pmatrix} \overline{Y}^0 \\ \overline{Y}^{\Gamma} \end{pmatrix},$$

а інтегрування виконується за аргументом s.

Розв’язком (43) таким, що

$$\hat{\overline{u}}_k(s) = \arg \min_{\overline{u}_k(s)} \left\| \int_{(\cdot)} A_k(s) \overline{u}_k(s) ds - \overline{Y} \right\|^2,$$

буде вектор-функція

$$\hat{\bar{u}}_k(s) = A_k^T(s)P_k^+\bar{Y} + v_k(s) - A_k^T(s)P_k^+ A_{kv}$$

за довільної інтегровної в області зміни аргументу s вектор-функції

$$v_k(s) = \begin{pmatrix} v_{k1}(s) & (s \in S^0) \\ v_{k2}(s) & (s \in S^\Gamma) \end{pmatrix}$$

та

$$P_k = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \quad A_{kv} = \begin{pmatrix} A_{kv1} \\ A_{kv2} \end{pmatrix}$$

для

$$P_{11} = \int_{S^0} \bar{G}_{k0}^0(s)(\bar{G}_{k0}^0(s))^T ds + \int_{S^\Gamma} \bar{G}_{k\Gamma}^0(s)(\bar{G}_{k\Gamma}^0(s))^T ds,$$

$$P_{12} = \int_{S^0} \bar{G}_{k0}^0(s)(\bar{G}_{k0}^\Gamma(s))^T ds + \int_{S^\Gamma} \bar{G}_{k\Gamma}^0(s)(\bar{G}_{k\Gamma}^\Gamma(s))^T ds,$$

$$P_{21} = \int_{S^0} \bar{G}_{k0}^\Gamma(s)(\bar{G}_{k0}^0(s))^T ds + \int_{S^\Gamma} \bar{G}_{k\Gamma}^\Gamma(s)(\bar{G}_{k\Gamma}^0(s))^T ds,$$

$$P_{22} = \int_{S^0} \bar{G}_{k0}^\Gamma(s)(\bar{G}_{k0}^\Gamma(s))^T ds + \int_{S^\Gamma} \bar{G}_{k\Gamma}^\Gamma(s)(\bar{G}_{k\Gamma}^\Gamma(s))^T ds,$$

$$A_{kv1} = \int_{S^0} \bar{G}_{k0}^0(s)v_{k1}(s)ds + \int_{S^\Gamma} \bar{G}_{k\Gamma}^0(s)v_{k2}(s)ds,$$

$$A_{kv2} = \int_{S^0} \bar{G}_{k0}^\Gamma(s)v_{k1}(s)ds + \int_{S^\Gamma} \bar{G}_{k\Gamma}^\Gamma(s)v_{k2}(s)ds.$$

Звідси знаходимо

$$u_{k0}(s) = ((\bar{G}_{k0}^0(s))^T, (\bar{G}_{k0}^\Gamma(s))^T)P_k^+(\bar{Y} - A_{kv}) + v_{k1}(s), \tag{44}$$

$$u_{k\Gamma}(s) = ((\bar{G}_{k\Gamma}^0(s))^T, (\bar{G}_{k\Gamma}^\Gamma(s))^T)P_k^+(\bar{Y} - A_{kv}) + v_{k2}(s). \tag{45}$$

З урахуванням (44), (45), а далі і (36)–(38) співвідношенням (27) визначимо розв'язок розглядуваної задачі. Точність цього розв'язку стосовно початково-крайових спостережень (23) та (24) визначатиметься точністю розв'язання (псевдообернення) системи інтегральних рівнянь (43), а саме:

$$\min_{\bar{u}_k(s)} \left\| \int_{(\cdot)} A_k(s)\bar{u}_k(s)ds - \bar{Y} \right\|^2 = \bar{Y}^T\bar{Y} - \bar{Y}^T P_k P_k^+ A_k^T \bar{Y}.$$

Знайдений розв'язок може бути однозначним $(v_k(s) \equiv 0)$, якщо

$$\lim_{N \to \infty} \det[A_k^T(s_i)A_k(s_j)]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0$$

для s_i $(i = \overline{1, N})$ та s_j $(j = \overline{1, N})$ з області зміни аргументу s матричної функції $A_k(s)$.

ВИСНОВКИ

У статті розв'язано задачі дослідження динаміки нелінійних просторово-розподілених систем, математична модель яких визначається добутком двох (кількох) лінійних диференціально визначених перетворень їхньої функції стану. Задачі розв'язано для дискретно та неперервно заданих значень гранично-початкових зовнішньодинамічних збурювальних факторів, узгодження розв'язку з якими визначається за середньоквадратичним критерієм. Виконання цих вимог досягається у випадку псевдообернення непростих розв'язувальних рівнянь, які для дискретно визначеної функції стану системи визначаються за початково-крайовими умовами функціонування системи. Проблеми узгодженості розв'язку з нелінійною математичною моделлю системи вирішуються [7, 8] на етапі переходу від диференціальної форми моделі до її інтегрального еквівалента. Стосовно квадратично-нелінійних систем задачі розв'язано для неперервно визначеної функції стану.

Результатом цього наукового дослідження є прості і доступні для практичної реалізації розрахункові формули, які для цих складних і в загальному випадку некоректно сформульованих початково-крайових задач методами класичної та обчислювальної математики побудувати неможна.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. Москва: Наука, 1980. 288 с.
2. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. Москва: Наука, 1978. 206 с.
3. Стоян В.А. Об одном подходе к исследованию начально-краевых задач матфизики. *Проблемы управления и информатики*. 1998. № 1. С. 79–86.
4. Скопецький В.В., Стоян В.А., Кривонос Ю.Г. Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. Київ: Наукова думка, 2002. 361 с.
5. Стоян В.А. Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2011. 320 с.
6. Стоян В.А., Двірничук В.Б. До побудови інтегрального еквіваленту лінійних диференціальних моделей. *Доповіді НАН України*. 2012. № 9. С. 36–43.
7. Стоян В.А. К построению интегральных математических моделей двух классов нелинейных пространственно распределенных систем. I. Случай дискретно определенных внешнединамических возмущений. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. Т. 55, № 5. С. 115–127.
8. Стоян В.А. К построению интегральных математических моделей двух классов нелинейных пространственно распределенных систем. II. Случай непрерывно определенных внешнединамических возмущений. *Кибернетика и системный анализ*. 2020. Т 56, № 1. С. 118–127.
9. Стоян В.А. Математичне моделювання квадратично нелінійних просторово розподілених систем. I. Випадок дискретно визначених початково-крайових зовнішньо-динамічних збурень. *Кібернетика та системний аналіз*. 2021. Т 57, № 2. С. 84–97.
10. Стоян В.А. Математичне моделювання квадратично нелінійних просторово розподілених систем. II. Випадок неперервно визначених початково-крайових зовнішньо-динамічних збурень. *Кібернетика та системний аналіз*. 2021. Т 57, № 6. С. 72–83.

V.A. Stoyan

MATHEMATICAL MODELING OF THE STATE OF DYNAMIC MULTIPLICATIVE NONLINEAR SYSTEMS

Abstract. The author formulates and solves, by the root-mean-square criterion, the initial–boundary-problems of the dynamics of nonlinear spatially distributed systems. Systems whose mathematical model is generated by the product of two or more differential transformations of their functions of state are considered. Analytical dependencies of this function are constructed in the presence of their discretely and continuously defined initial-boundary observations, without constraints for the number and quality of the latter. The accuracy of the sets of the obtained solutions is evaluated and their uniqueness is analyzed.

Keywords: nonlinear dynamical systems, systems with uncertainties, systems with distributed parameters, spatially distributed systems, pseudosolutions, ill-posed initial–boundary-value problems.

Надійшла до редакції 11.11.2021