УДК 516.813

С.Л. КРИВИЙ
Київський Національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *sl.krivoi@gmail.com*.

В.М. ОПАНАСЕНКО
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *vlopanas@ukr.net.*

С.Б. ЗАВ'ЯЛОВ
ТОВ «Радіонікс», Київ, Україна, e-mail: *radionix13@gmail.com*.

АЛГЕБРАЇЧНІ ОПЕРАЦІЇ НАД НЕЧІТКИМИ МНОЖИНАМИ І ВІДНОШЕННЯМИ В АВТОМАТНІЙ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ З РЕАЛІЗАЦІЄЮ ЛОГІКОВИМИ АПАРАТНИМИ ЗАСОБАМИ

Анотація. Розглянуто алгебраїчні операції над нечіткими множинами і відношеннями та їхня реалізація апаратними засобами в автоматній інтерпретації. Описано два способи зображення значень функцій належності нечітких множин та методи перетворення таких зображень. Наведено відповідні оцінки складності виконання операцій з такими зображеннями та обґрунтування коректності алгоритмів.

Ключові слова: нечіткі множини, відношення, алгебраїчні операції, скінченні автомати, FPGA.

ВСТУП

Адаптація апаратних засобів для розв'язання задачі розбиття векторів з цілими координатами, яка розглядалася в [1–8], надає змогу реалізувати операції над нечіткими множинами і відношеннями. Запропонований у цій роботі підхід до виконання зазначених операцій відомий як «технологія реконфігуровного комп'ютингу» [2, 3] і його втілення в реальні проєкти стало можливим завдяки появі програмованих логікових інтегральних схем (ПЛІС).

Зокрема, в [4–8] розглядався метод розв'язання задачі адаптації апаратних засобів з формалізованим обґрунтуванням відповідних алгоритмів на основі адаптивних логічних мереж (АЛС), орієнтованих на реалізацію алгоритмів розбиття множини векторів з цілими координатами. З використанням алгоритмів такого розбиття у цій роботі на основі автоматного підходу пропонуються алгоритми виконання операцій над нечіткими множинами (НМ) і відношеннями (НВ).

АЛГЕБРАЇЧНІ ОПЕРАЦІЇ ТА ЇХНЯ РЕАЛІЗАЦІЯ

Операції над НМ і НВ поділяють на логічні і алгебраїчні. Для реалізації логічних операцій над НМ та НВ, як було показано в [1], потрібні операції віднімання, максимуму і мінімуму, а для реалізації алгебраїчних операцій — додавання, віднімання і множення. Далі будемо розглядати тільки алгебраїчні операції над НМ, до яких належать:

1) обчислення добутку НМ A і B, результатом якого є НМ $A \cdot B$ з функцією належності $\mu_{A \cdot B} = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$;

2) обчислення суми $A+B$ НМ A і B, результатом якої є НМ $A+B$ з функцією належності $\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$;

3) піднесення до степеня α НМ A, результатом якого є НМ A^α з функцією належності $\mu_A(x)^\alpha$, де α — додатне раціональне число;

4) множення на число α НМ A, результатом якого є НМ αA з функцією належності $\alpha \mu_A(x)$, де $\alpha \cdot \max\limits_{x \in A} \mu_A(x) \le 1$;

5) опукла комбінація НМ $A_1, \ldots, A_n$, результатом якої є НМ A з функцією належності $\mu_A(x) = \alpha_1 \mu_{A_1}(x) + \ldots + \alpha_n \mu_{A_n}(x)$, де $\alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_n \geq 0$ і $\alpha_1 + \ldots \ldots + \alpha_n = 1$, $\alpha_i \in [0, 1]$;

6) Декартів добуток НМ $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, результатом якого є НМ з функцією належності $\min(\mu_{A_1}(x_1), \ldots, \mu_{A_n}(x_n)) = \mu_A(x_1, \ldots, x_n)$;

7) отримання чіткої множини рівня α, результатом якої є чітка множина $A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$, де $\alpha \in (0, 1]$.

До наведених операцій іноді додається ще одна:

8) оператор Φ збільшення нечіткості множини A, що використовується для збільшення нечіткості нечіткої множини.

Нехай A — нечітка множина, E — універсальна множина і для всіх $x \in E$ визначені нечіткі множини $K(x)$. Результатом дії оператора Φ на нечітку множину A є нечітка множина

$$\Phi(A, K) = \bigcup_{x \in E} \mu_A(x) K(x),$$

де $\mu_A(x) K(x)$ — множення числа на НМ.

Згідно з визначеннями алгебраїчних операцій для їхньої реалізації потрібні автомати, що реалізують операції додавання (рис. 1), віднімання (рис. 2) і множення на 2 (рис. 3). Реалізація операції множення вимагає композиції цих автоматів і деякого керувального автомата, який буде описано далі.

Обчислення добутку двійкових чисел. Нехай маємо двійкові числа: $x = a_0 a_1 a_2 a_3$ і $y = b_0 b_1 b_2 b_3$, тоді добуток цих чисел визначається виразом

$$x \cdot y = x(b_0 + 2b_1 + 4b_2 + 8b_3) = xb_0 + 2xb_1 + 4xb_2 + 8xb_3. \tag{1}$$

З (1) випливає, що для правильного обчислення добутку двох двійкових чисел розрядність числа $x = a_0 a_1 a_2 a_3$ потрібно збільшити до дев'яти розрядів (у загальному випадку для n-розрядного числа — до $2n + 1$ розрядів) дописуванням нулів у старші розряди, тобто $x = 00000 a_0 a_1 a_2 a_3$, а в молодші розряди числа y — дописуванням значення b_i. Крім того, з виразу (1) випливає, що значення b_i можна розглядати як сигнал керування, для розпізнавання значення якого використовують керувальний автомат A_{01} без виходів (рис. 4).

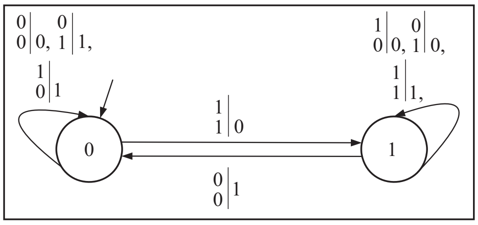

Рис. 1. Автомат додавання двійкових чисел A_+

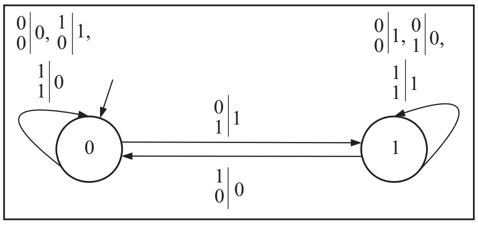

Рис. 2. Автомат віднімання A_- двійкових чисел x, y $(x \geq y)$

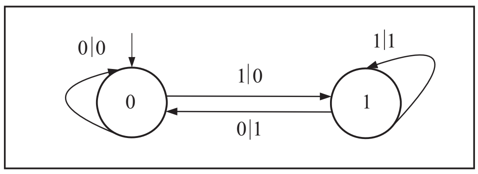

Рис. 3. Автомат A_2 множення на 2

У цьому автоматі стан 0 — розпізнавання значення b_i, з якого передається керування подальшими обчисленнями або на автомат Мілі A_0, який на довільний вхідний сигнал слова x реагує виходом 0 (рис. 5, стан 1), коли $b_i = 0$, або на автомат Мілі A_+, або A_2, коли $b_i = 1$ (див. рис. 5, стан 2). Після цього композиція таких автоматів для обчислення операції множення реалізується схемою (див. рис. 5).

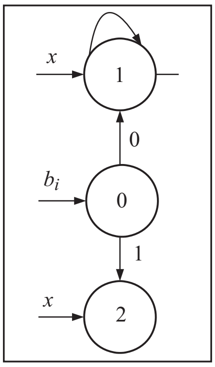

Рис. 4. Керувальний автомат A_{01}

Як бачимо, автомат $A_{\times}$, що реалізує операцію множення, складніший у порівнянні з автоматами для обчислення логічних операцій [1].

Якщо для реалізації операцій 1–5 і 7 потрібні операції додавання, віднімання і множення, то для обчислення операції Декартового добутку і оператора 8 достатньо мережі із автоматів $A_{\min}$.

З викладеного випливає, що для реалізації алгебраїчних операцій потрібно мати реалізацію автоматів A_{01}, $A_{\min}$, A_{-}, A_{+} і $A_{\times}$, а також мережі із цих автоматів та їхні композиції.

Подальший синтез і конфігурація мережі (та її реконфігурація) виконуються за структурою алгебраїчного виразу (1) і функції належності.

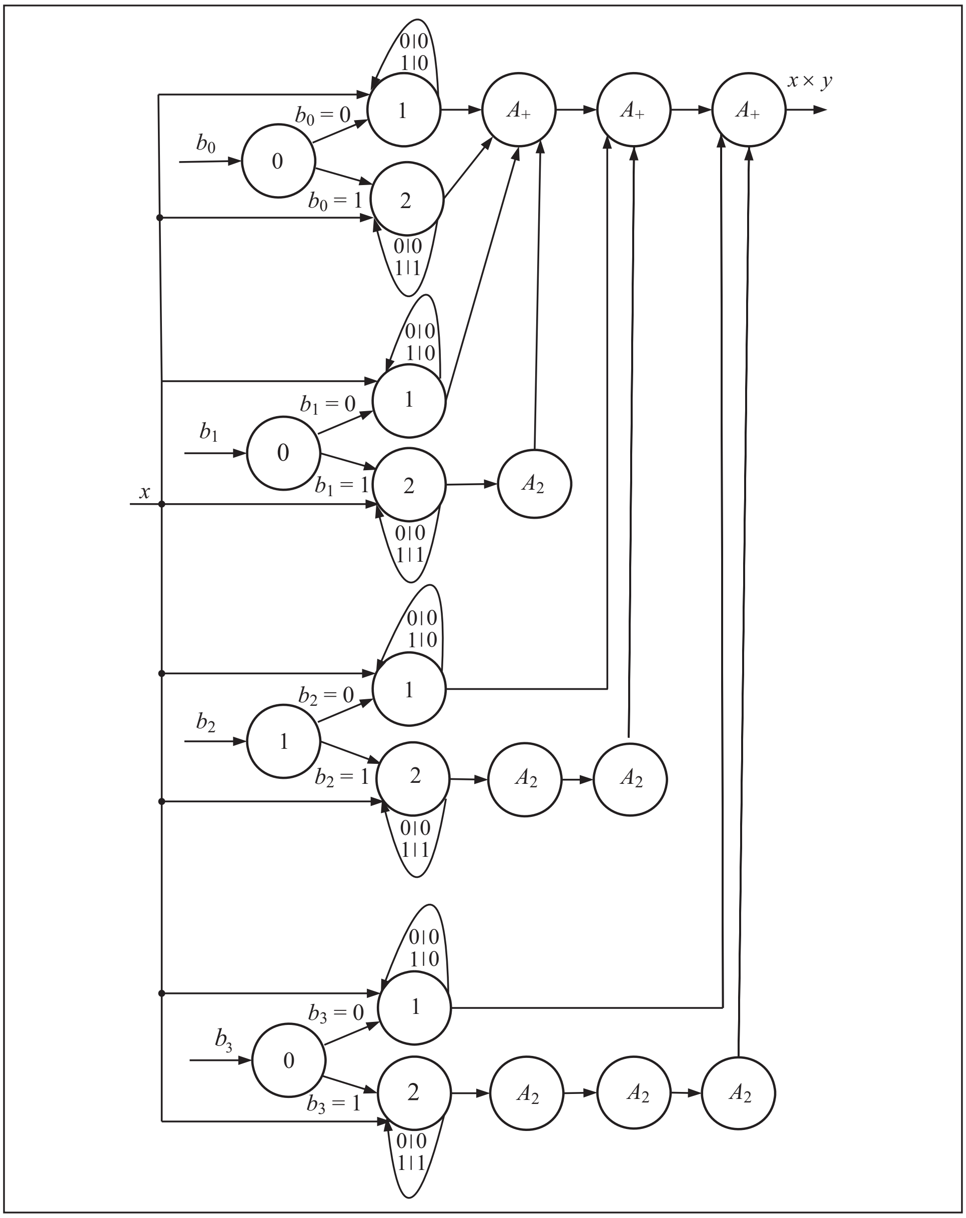

Рис. 5. Композиція автоматів $A_{\times}$

Спочатку розглянемо деякі приклади для ілюстрації викладеного.

Приклад 1. Обчислити НМ

$$V = 2(A \bigcap B) + (A \bigcup C), \tag{2}$$

де

$$A = \{0{,}2 \,|\, x_1 + 0{,}5 \,|\, x_2 + 0{,}4 \,|\, x_3\}; \; B = \{0{,}4 \,|\, x_1 + 0{,}6 \,|\, x_2 + 0{,}1 \,|\, x_3\};$$

$$C = \{0{,}1 \,|\, x_1 + 0 \,|\, x_2 + 1 \,|\, x_3\}.$$

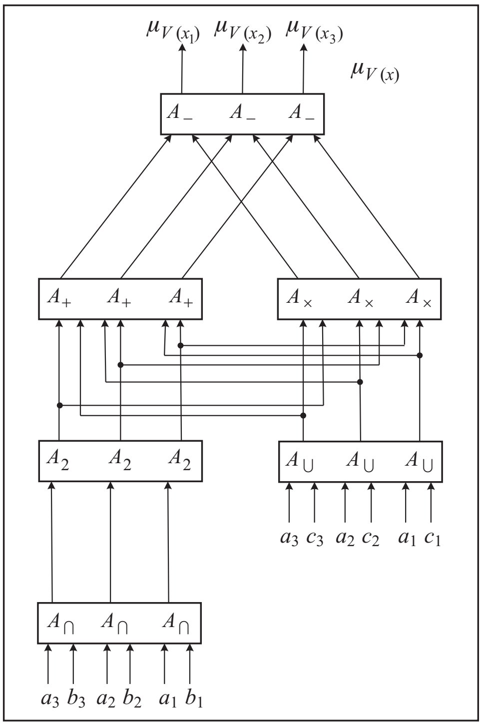

Рис. 6. Мережа для обчислення НМ V

Розв'язання. З (2) випливає, що для обчислення НМ V потрібні автомати $A_{\min} = A_{\bigcap}$, $A_{\max} = A_{\bigcup} A_{-}$, A_{+} і $A_{\times}$ [1]. Синтезуємо мережу за структурою виразу (2) (рис. 6).

Обчислення, які виконуються цією мережею, ілюструє табл. 1.

У результаті дістаємо

$$V = \{0{,}52 \,|\, x_1 + 1 \,|\, x_2 + 1 \,|\, x_3\}.$$

Для реалізації операцій додавання, віднімання і множення потрібно описати зображення їхніх аргументів, які є дійсними числами з інтервалу належності [0, 1], оскільки їхня реалізація має певні особливості. У цій роботі розглядаються два способи зображення таких значень:

1) зображення парою цілих чисел;

2) зображення дробовими двійковими числами.

Перший спосіб полягає в зображенні значення функції належності

Таблиця 1

x_1	x_2	x_3	**Функції належності**
$\mu_A(x) \to 0{,}2$	0,5	0,4	
$\mu_B(x) \to 0{,}4$	0,6	0,1	
0,2	0,5	0,1	$\leftarrow \mu_{A \bigcap B}(x)$
0,4	1	0,2	$\leftarrow \mu_{2(A \bigcap B)}(x)$
$\mu_A(x) \to 0{,}2$	0,5	0,4	
$\mu_C(x) \to 0{,}1$	0	1	
0,2	0,5	1	$\leftarrow \mu_{A \bigcup C}(x)$
$\mu_{2(A \bigcap B)}(x) \to 0{,}4$	1	0,2	
$\mu_{A \bigcup C}(x) \to 0{,}2$	0,5	1	
0,6	1,5	1,2	$\leftarrow \mu_{(A \bigcup C)} + \mu_{2(A \bigcap C)}$
0,08	0,5	0,2	$\leftarrow \mu_{(A \bigcup C)} \cdot \mu_{2(A \bigcap C)}$
$\mu_{(A \bigcup C)} + \mu_{2(A \bigcap C)} \to 0{,}6$	1,5	1,2	
$\mu_{(A \bigcup C)} \cdot \mu_{2(A \bigcap C)} \to 0{,}08$	0,5	0,2	
0,52	1	1	$\leftarrow \mu_{(A \bigcup C)} + \mu_{2(A \bigcap C)} - \mu_{(A \bigcup C)} \cdot \mu_{2(A \bigcap C)}$

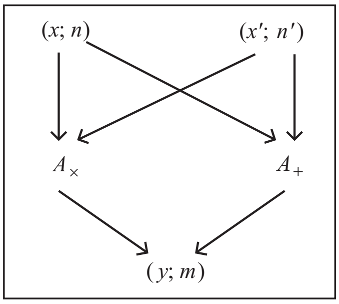

Рис. 7. Схема мережі із двох автоматів $(A_\times, A_+)$

$\mu(x) = y$ у вигляді пари цілих невід'ємних чисел $(y; n)$, де y — ціле число, яке зображує значення $\mu(x)$, а n — кількість знаків після коми в десятковому зображенні значення y. Наприклад, для значення $x = 0{,}235$ відповідна пара буде мати вигляд (235; 3). Таке зображення дає змогу оперувати двійковими числами, які зображують компоненти пар. Уведене зображення значень функції належності вимагає обґрунтування правил обчислення значень додавання і віднімання. Для обчислення обох операцій потрібне просте перетворення, яке полягає у «вирівнюванні» компонентів пар. Це вирівнювання реалізується так: у процесі обчислення значень операцій над парами $(x; n)$ і $(x'; n')$, коли, наприклад, $n = n'+2$, другу пару потрібно перетворити у $(x'00; n)$. Отже, у результаті віднімання від пари (15; 3) пари (1; 2) остання перетворюється у (10; 3), після чого виконується віднімання, яке дає (5; 3). Оскільки положення коми у випадку виконання операцій додавання і віднімання не змінюється, після вирівнювання другі компоненти під час обчислення цих операцій залишаються незмінними і над ними не виконується жодних дій. Для зображення цієї ситуації введемо спеціальний автомат A_i, який не змінює значень вхідних даних.

Розглянемо в цьому зображенні спосіб обчислення добутку двох дійсних чисел з інтервалу належності [0, 1]. У процесі виконання операції множення кома переміщується на величину, що залежить від довжин мантис аргументів в операції множення. Тоді для виконання операції множення двох чисел $(x; n)$ і $(x'; n')$ перші компоненти множаться, як цілі числа (тобто ігнорується кома), а другі компоненти додаються, отже, отримуємо пару $(y; m)$, яка зображує результат множення.

Наприклад, результатом множення (21; 2) і (123; 3) буде пара (2583; 5), тобто спочатку обчислюється значення 2583 як результат множення 21 на 123 і значення 5 як результат додавання 2 і 3, а потім число 5 вказує, що значення 2583 слід перетворити у 0,02583. Визначення місця коми вказує друга компонента в парі. Отже, операція множення реалізується такою неоднорідною мережею з двох автоматів $(A_\times, A_+)$, на вхід якої надходять пари аргументів $(x; n)$ і $(x'; n')$, а на виході отримуємо пару $(y = xx'; m = n + n')$, схема якої представлена на рис. 7.

Приклад 2. Обчислити НМ

$$X = ((A + B)\cdot C) \bigcap (A \cdot C), \tag{3}$$

де A, B, C є НМ з прикладу 1.

Розв'язання. Мережа із автоматів синтезується за структурою виразу функції належності, яка задає НМ (3) і показана на рис. 8.

Якщо $xz \le z(x + y - xy)$, то на виході буде xz, k', інакше на виході буде пара $(z(x + y - xy, k = n'')$.

Для наочності будемо виконувати обчислення кожної операції окремо. Тоді НМ

$$A = \{0{,}2 \,|\, x_1 + 0{,}5 \,|\, x_2 + 0{,}4 \,|\, x_3\};\; B = \{0{,}4 \,|\, x_1 + 0{,}6 \,|\, x_2 + 0{,}1 \,|\, x_3\};$$

$$C = \{0{,}1 \,|\, x_1 + 0 \,|\, x_2 + 1 \,|\, x_3\}$$

перетворюються до вигляду

$$A = \{(2;1) \mid x_1 + (5;1) \mid x_2 + (4;1) \mid x_3\};$$

$$B = \{(4;1) \mid x_1 + (6;1) \mid x_2 + (1;1) \mid x_3\};$$

$$C = \{(1;1) \mid x_1 + (0;0) \mid x_2 + (1;0) \mid x_3\}.$$

Подаючи на вхід мережі із автоматів $(A_\times, A_+)$ перетворені значення функції належності НМ A і B, отримуємо

$$(A_\times(A, B), A_+(A, B)) =$$
$$= \{(8;2) \mid x_1 + (30;2) \mid x_2 + (4;2) \mid x_3\} = S$$
.

Обчислення суми значень функцій належності НМ (A, B) не потребує вирівнювання (оскільки другі компоненти однакові в цих НМ), і для мережі із автоматів $A_\times, A_i$ дістаємо таке значення (автомат A_i зберігає другу компоненту незмінною):

$$(A_\times(A, B), A_i(A, B)) = \{(6;1) \mid x_1 +$$
$$+ (11;1) \mid x_2 + (5;1) \mid x_3\} = S_1.$$

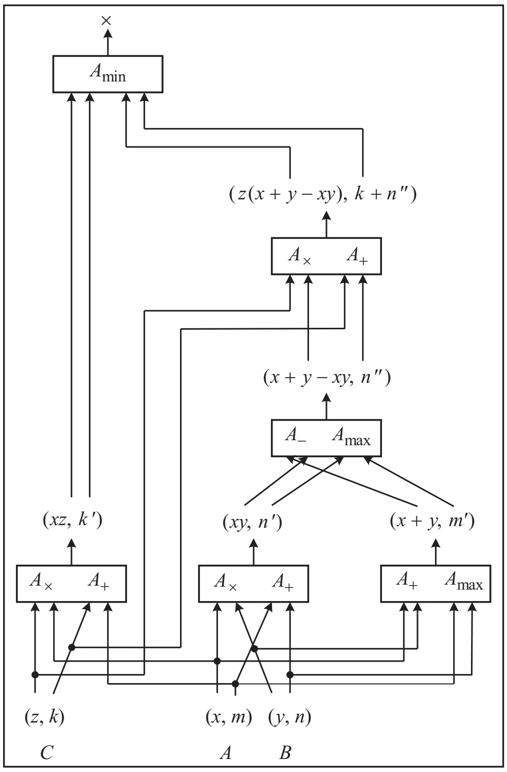

Рис. 8. Мережа автоматів для реалізації виразу X

Для виконання операції віднімання вирівнюємо другі компоненти в отриманій множині S_1, що дає множину $S_1 = \{(60;2) \mid x_1 + (110;2) \mid x_2 + (50;2) \mid x_3\}$. Тепер мережа із автоматів A_+, A_i дає НМ $(A+B)$:

$$A + B = A_+(S_1, S) = \{(52;2) \mid x_1 + (80;2) \mid x_2 + (46;2) \mid x_3\},$$

тобто $A + B = \{0{,}52 \mid x_1 + 0{,}8 \mid x_2 + 0{,}46 \mid x_3\}$. А мережа із автоматів $A_\times, A_+$ дає НМ для підвиразу $(A+B)\cdot C$:

$$(A_+((A+B)\cdot C), A_+((A+B)\cdot C)) = \{(52;3) \mid x_1 + (0;2) \mid x_2 + (46;2) \mid x_3\}.$$

Обчислення добутку $(A \cdot C)$ дає таку НМ після вирівнювання:

$$(A_\times(A\cdot C), A_+(A\cdot C)) = \{(20;3) \mid x_1 + (0;2) \mid x_2 + (40;2) \mid x_3\}.$$

Остаточна НМ обчислюється мережею:

$$(A_{\min}((A+B)\cdot C \cap A\cdot C), A_i((A+B)\cdot C \cap A\cdot C)) = \{(20;3) \mid x_1 + (0;2) \mid x_2 + (46;2) \mid x_3\},$$

тобто $(A+B)\cdot C \cap A\cdot C = \{0{,}02 \mid x_1 + 0 \mid x_2 + 0{,}46 \mid x_3\}$.

Другий спосіб оперує представленням чисел двійковими дробовими числами:

$$x = 0,(a_1 2^{-1})(a_2 2^{-2})(a_3 2^{-3})(a_4 2^{-4})(a_5 2^{-5})(a_6 2^{-6})(a_7 2^{-7})(a_8 2^{-8}),$$

де $x \in [0.5 \div 1)$, $a_i \in [0 \vee 1]$ і $\forall a_i$, $i = 1, \ldots, 8$,

$$a_1 2^{-1} = \begin{cases} 0{,}5, & \text{якщо } a_1 = 1, \\ 0, & \text{якщо } a_1 = 0, \end{cases} \quad a_2 2^{-2} = \begin{cases} 0{,}25, & \text{якщо } a_2 = 1, \\ 0, & \text{якщо } a_2 = 0, \end{cases}$$

$$a_3 2^{-3} = \begin{cases} 0{,}125, & \text{якщо } a_3 = 1, \\ 0, & \text{якщо } a_3 = 0, \end{cases} \quad a_4 2^{-4} = \begin{cases} 0{,}625, & \text{якщо } a_4 = 1, \\ 0, & \text{якщо } a_4 = 0, \end{cases}$$

$$a_5 2^{-5} = \begin{cases} 0{,}03125, & \text{якщо } a_5 = 1, \\ 0, & \text{якщо } a_5 = 0, \end{cases} \quad a_6 2^{-6} = \begin{cases} 0{,}0015625, & \text{якщо } a_6 = 1, \\ 0, & \text{якщо } a_6 = 0, \end{cases}$$

$$a_7 2^{-7} = \begin{cases} 0{,}00078125, & \text{якщо } a_7 = 1, \\ 0, & \text{якщо } a_7 = 0, \end{cases} \quad a_8 2^{-8} = \begin{cases} 0{,}000390625, & \text{якщо } a_8 = 1, \\ 0, & \text{якщо } a_8 = 0. \end{cases}$$

Варто зазначити, що функції належності будуть мати неточні значення за рахунок обмеженої розрядності сітки зображення дробових чисел. Наприклад, для

$$\mu = 0{,}1 \Rightarrow 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-7} + 2^{-8} = 0{,}06250_{10} + 0{,}03125_{10} + 0{,}0015625_{10} +$$

$$+ 0{,}007825_{10} + 0{,}00390625_{10} = 0{,}096484375_{10} = 0{,}00011111_2;$$

$$\mu = 0{,}2 \Rightarrow 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-8} = 0{,}125 + 0{,}0625 + 0{,}03125 +$$

$$+ 0{,}0007825 + 0{,}00390625 = 0{,}20079375 = 0{,}00111011_2;$$

$$\mu = 0{,}3 \Rightarrow 2^{-2} + 2^{-4} = 0{,}25 + 0{,}0625 = 0{,}3125 = 0{,}010100_2;$$

$$\mu = 0{,}4 \Rightarrow 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-5} = 0{,}25 + 0{,}125 + 0{,}03125 = 0{,}40625 = 0{,}011010_2;$$

$$\mu = 0{,}5 \Rightarrow 2^{-1} = 0{,}5 = 0{,}100000_2;$$

$$\mu = 0{,}6 \Rightarrow 2^{-1} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-7} + 2^{-8} = 0{,}5 + 0{,}0625 + 0{,}03125 +$$

$$+ 0{,}0015625 + 0{,}00078125 + 0{,}000390625 = 0{,}596484375 = 0{,}10011111_2;$$

$$\mu = 0{,}7 \Rightarrow 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-7} + 2^{-8} = 0{,}5 + 0{,}125 + 0{,}0625 +$$

$$+ 0{,}03125 + 0{,}007825 + 0{,}00390625 = 0{,}703125 = 0{,}101101_2;$$

$$\mu = 0{,}8 \Rightarrow 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-6} = 0{,}5 + 0{,}125 + 0{,}03125 +$$

$$+ 0{,}015625 = 0{,}796875 = 0{,}110111_2;$$

$$\mu = 0{,}9 \Rightarrow 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-5} = 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}125 + 0{,}03125 = 0{,}903125 = 0{,}111010_2;$$

$$\mu = 1{,}0 \Rightarrow 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-6} = 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}125 + 0{,}0625 + 0{,}03125 +$$

$$+ 0{,}015625 + 0{,}00078125 + 0{,}00039125 = 0{,}98125 = 0{,}11111111_2.$$

Приклад 3. Обчислити суму $A + B$ двох НМ, де

$$A = \{0{,}2 \,|\, x_1 + 0{,}5 \,|\, x_2 + 0{,}4 \,|\, x_3\},$$

$$A = \{(0{,}001111_2) \,|\, x_1 + (0{,}100000_2) \,|\, x_2 + (0{,}011010_2) \,|\, x_3\};$$

$$B = \{0{,}4 \,|\, x_1 + 0{,}6 \,|\, x_2 + 0{,}1 \,|\, x_3\},$$

$$B = \{(0{,}011010_2) \,|\, x_1 + (0{,}100110_2) \,|\, x_2 + (0{,}000111_2) \,|\, x_3\}.$$

1. Обчислимо другим способом значення функції μ^1_{A+B} для елемента x_1: оскільки $\mu^1_A(x_1) = 0{,}2$; $\mu^1_B(x_1) = 0{,}4$, то

$$\mu^1_{(A+B)}(x_1) = \mu^1_A(x_1) + \mu^1_B(x_1) - \mu^1_A(x_1) \cdot \mu^1_B(x_1) = 0{,}2 + 0{,}4 - (0{,}2 \times 0{,}4) = 0{,}52.$$

Спочатку обчислимо значення операції добутку функцій належності $\mu_A^1(x_1)\cdot\mu_B^1(x_1)$:

$$\mu_A^1(x_1)\cdot\mu_B^1(x_1)=(0{,}001111_2)\cdot(0{,}011010_2)=0{,}000110_2=0{,}09375_{10},$$

потім — різницю $\mu_B^1-\mu_A^1\cdot\mu_B^1$:

$$\mu_B^1-\mu_A^1\cdot\mu_B^1=0{,}011010_2-0{,}000110_2=0{,}010100_2=0{,}3125_{10}.$$

Отже, значення функції належності $\mu_{A+B}^1(x_1)$ буде таким:

$$\mu_{A+B}^1(x_1)=\mu_A^1(x_1)+\mu_B^1(x_1)-\mu_A^1(x_1)\cdot\mu_B^1(x_1)=0{,}001111_2+0{,}010100_2=$$
$$=0{,}100011_2=0{,}546875_{10}.$$

2. Обчислимо значення функції μ_{A+B}^2 для елемента x_2:

$$\mu_A^2(x_2)=0{,}5;\ \mu_B^2(x_2)=0{,}6;\ \mu_{A+B}^2(x_2)=0{,}5+0{,}6-(0{,}5\cdot 0{,}6)=0{,}8.$$

Спочатку обчислимо значення першої операції, яка є добутком функцій належності $\mu_A^2(x_2)\cdot\mu_B^2(x_2)$:

$$\mu_A^2(x_2)\cdot\mu_B^2(x_2)=(0{,}100000_2)\cdot(0{,}100111_2)=0{,}010011_2=0{,}296875_{10},$$

потім — різницю $\mu_B^2-\mu_A^2\cdot\mu_B^2$:

$$\mu_{A+B}^2(x_2)=\mu_B^2(x_2)-\mu_A^2(x_2)\cdot\mu_B^2(x_2)=0{,}100111_2-0{,}010011_2=$$
$$=0{,}010100_2=0{,}296875_{10}.$$

Отже, значення функції належності $\mu_{A+B}^2(x_2)$ буде таким:

$$\mu_{A+B}^2(x_2)=\mu_A^2(x_2)+\mu_B^2(x_2)-\mu_A^2(x_2)\cdot\mu_B^2(x_2)=$$
$$=0{,}100000_2+0{,}010100_2=0{,}110101_2=0{,}8125_{10}.$$

3. Обчислимо значення функції належності μ_{A+B}^3 для елемента x_3:

$$\mu_A^3(x_3)=0{,}4;\ \mu_B^3(x_3)=0{,}1;\ \mu_{A+B}^3(x_3)=0{,}1+0{,}4-(0{,}1\times 0{,}4)=0{,}46.$$

Спочатку обчислимо значення першої операції, яка є добутком функцій належності $\mu_A^3(x_3)\cdot\mu_B^3(x_3)$:

$$\mu_A^3(x_3)\cdot\mu_B^3(x_3)=(0{,}011010_2)\cdot(0{,}000111_2)=0{,}000010_2=0{,}03125_{10},$$

потім — різницю $\mu_B^3-\mu_A^3\cdot\mu_B^3$:

$$\mu_{A+B}^3(x_3)=\mu_B^3(x_3)-\mu_A^3(x_3)\cdot\mu_B^3(x_3)=0{,}000111_2-0{,}000010_2=$$
$$=0{,}000101_2=0{,}078125_{10}.$$

Остаточне значення функції належності $\mu^3_{A+B}(x_3)$ буде таким:

$$\mu^3_{A+B}(x_3) = \mu_A(x_3) + \mu^3_B(x_3) - \mu^3_A(x_3) \cdot \mu^3_B(x_3) =$$

$$= 0{,}011010_2 + 0{,}000100_2 = 0{,}011110_2 = 0{,}46875_{10}.$$

Аналогічно виконуються операції над іншими елементами НМ.

Розглянемо складність зображення чисел першим і другим способом, а також складність виконання операцій цими способами.

Для першого способу відомо, що алгоритм переведення цілого числа n з однієї системи числення до іншої має складність $O((\log n)^2)$ незалежно від основи [12]. Але виникає запитання: як наблизити результат за умов обмеженої розрядності? Для цього теж використовується цей самий алгоритм. Дійсно, переведемо отриманий результат множення із двійкового зображення в десяткове, залишимо перші три розряди після коми і вилучимо решту розрядів. Потім знову перетворимо отримане число в двійкове. Таким чином, складність збільшиться вдвічі, але при цьому гарантується адекватність результату.

Для реалізації проєкту з врахуванням часових затримок розглянемо обчислення суми двох НМ другим способом.

Приклад 4. Нехай НМ A і B такі, як у прикладі 3, і обчислюється та сама НМ, яка в ньому визначалася:

$$A = \{\mu^1_A | x_1 + \mu^2_A | x_2 + \mu^3_A | x_3 + \mu^4_A | x_4 + \mu^5_A | x_5\},$$

$$B = \{\mu^1_B | x_1 + \mu^2_B | x_2 + \mu^3_B | x_3 + \mu^4_B | x_4 + \mu^5_B | x_5\}.$$

Отримана множина C має вигляд:

$$C = A + B = \{\mu^1_C | x_1 + \mu^2_C | x_2 + \mu^3_C | x_3 + \mu^4_C | x_4 + \mu^5_C | x_5\}.$$

Для обчислення значення операції алгебраїчної суми $\mu^i_{A+B}(x_i) = \mu^i_A(x_i) + \mu^i_B(x_i) - \mu^i_A(x_i) \cdot \mu^i_B(x_i)$ скористаємося таким алгоритмом.

Алгоритм (*x*, *y*) (розрядність компонентів 16 біт).

Вхід: x — вектор значень функції належності НМ A, y — вектор значень функції належності НМ B.

Вихід: z — вектор значень функції належності НМ $A+B$.

Метод:

1. $x[1{,}5] := \mu^1_A = 0{,}2$; $\mu^2_A = 0{,}5$; $\mu^3_A = 0{,}4$; $\mu^4_A = 0{,}7$; $\mu^5_A = 0{,}7$;

$y[1{,}5] := \mu^1_B = 0{,}4$; $\mu^2_B = 0{,}6$; $\mu^3_B = 0{,}1$; $\mu^4_B = 0{,}3$; $\mu^5_B = 0{,}8$;

2. Для $i = 1 \div 5$ виконати

2.1. Обчислити $\mu^i_{C=A+B}(x_i) = \mu^i_A(x_i) + \mu^i_B(x_i) - \mu^i_A(x_i) \cdot \mu^i_B(x_i)$.

2.2. З результату множення вилучити половину молодших розрядів.

2.3. Присвоїти отримане значення $z[i]$ $(* = \mu_{A+B}(x_i) *)$.

3. Отримати вектор z значень функції належності НМ $A+B$.

Виконаємо реалізацію і моделювання проєкту (з урахуванням часових затримок) алгоритму обчислення операції алгебраїчної суми нечітких множин (елементи НМ представлено в прямих кодах) на основі мікросхем FPGA (серії XA6SLX9-2FTGI 256) з використанням САПР ISE 14.07 (Integrated Synthesis Environment) Foundation фірми Xilinxi системи моделювання ModelSimSE 10.4c.

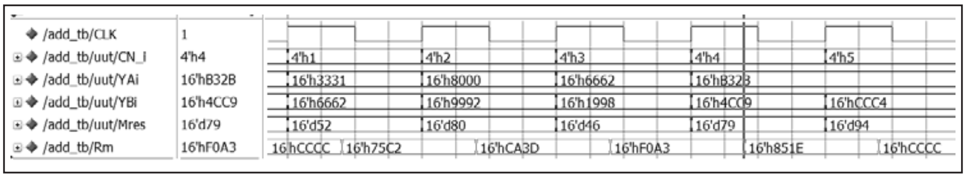

Рис. 9. Часова діаграма алгоритму реалізації операцій додавання НМ

Результати моделювання (часову діаграму представлено на рис. 9) підтверджують правильність функціонування структури для реалізації арифметичної операції додавання НМ і мають такі позначення:

для $i = 1 = CN\_1 = 4'h1$

$$\mu_A^1 = 0{,}2 = YA1 = 16'h3331,\ \mu_B^1 = 0{,}4 = YB1 = 16'h6662,$$

$$\mu_C^1 = 0{,}52 = Mres = 16'd52,\ Rm = 16'75C2;$$

для $i = 2 = CN\_2 = 4'h2$

$$\mu_A^2 = 0{,}5 = YA2 = 16'h8000,\ \mu_B^2 = 0{,}6 = YB2 = 16'h9992,$$

$$\mu_C^2 = 0{,}52 = Mres = 16'd80,\ Rm = 16'C3AD;$$

для $i = 3 = CN\_3 = 4'h3$

$$\mu_A^3 = 0{,}4 = YA3 = 16'h6662,\ \mu_B^3 = 0{,}1 = YB3 = 16'h1998,$$

$$\mu_C^3 = 0{,}46 = Mres = 16'd46,\ Rm = 16'hF0A3;$$

для $i = 4 = CN\_4 = 4'h4$

$$\mu_A^4 = 0{,}7 = YA4 = 16'hB32B,\ \mu_B^4 = 0{,}3 = YB4 = 16'h4CC9,$$

$$\mu_C^4 = 0{,}79 = Mres = 16'd79,\ Rm = 16'h851E;$$

для $i = 5 = CN\_5 = 4'h5$

$$\mu_A^5 = 0{,}7 = YA5 = 16'hB32B,\ \mu_B^5 = 0{,}8 = YB5 = 16'hCCC4,$$

$$\mu_C^5 = 0{,}94 = Mres = 16'd94,\ Rm = 16'hCCCC.$$

У розглянутому прикладі 4 реалізації алгебраїчної операції суми НМ виконується з тактовою частотою 375 МГц (період синхросигналу 2,66 нс).

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто автоматну інтерпретацію алгебраїчних операцій над нечіткими множинами і як приклад наведено апаратну реалізацію алгебраїчних операцій за допомогою відповідних мереж з автоматів. Якщо задано аналітичний вираз НМ, то за структурою цього виразу синтезується адаптивна логічна мережа, яка обчислює його значення. При цьому використання тотожностей алгебри нечітких множин дає змогу оптимізувати вираз, а це оптимізує апаратні засоби реконфігуруванням логічної мережі. Для реалізації алгебраїчних операцій використовувалися автомати і мережі з автоматів типів $A_{\min}(A_{\cap})$, $A_{\max}(A_{\cup})$, A_{-}, A_{+}, A_{01}, A_2.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Kryvyi S.L., Opanasenko V.N., Zavyalov S.B. Logical operations over fuzzy sets and relations in automaton interpretation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56, N 6. P. 1012–1020. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00321-x.
2. Opanasenko V.N., Kryvyi S.L. Synthesis of neural-like networks on the basis of conversion of cyclic Hamming codes. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2017. Vol. 53, N 4. P. 627–635. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9965-z.
3. Kryvyi S.L., Opanasenko V.M., Zavyalov S.B. Partitioning a set of vectors with integer coordinates by means of logical hardware. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, N 3. P. 462–473. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00154-3.
4. Kryvyi S.L., Opanasenko V.M. Partitioning a set of vectors with nonnegative integer coordinates using logical hardware. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 2. P. 310–319. https://doi.org/10.1007/s10559-018-0033-0.
5. Kondratenko Y.P., Sidenko Ie.V. Decision-making based on fuzzy estimation of quality level for cargo delivery. *Recent Developments and New Directions in Soft Computing. Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Cham: Springer, 2014. Vol. 317. P. 331–344. https://doi.org/10.1007/978-3-319-06323-2_21.
6. Palagin A.V., Opanasenko V.N., Kryvyi S.L. Resource and energy optimization oriented development of FPGA-based adaptive logical networks for classification problem. *Green IT Engineering: Components, Networks and Systems Implementation.* Kharchenko V., Kondratenko Y., Kacprzyk J. (Eds.). 2017. Vol. 105. P. 195–218. https://doi.org/10.1007978-3-319-55595-9_10.
7. Борисов А.Н., Алексеев А.В., Меркурьева Г.В. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений. Москва: Радиосвязь, 1989. 304 с.
8. Palagin A., Opanasenko V. The implementation of extended arithmetics on FPGA-based structures. *IEEE 9th International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS 2017).* Bucharest, Romania, 2017. Vol. 2. P. 1014–1019. https://doi.org/10.1109/IDAACS.2017.8095239.
9. Kondratenko Y.P., Kondratenko N.Y. Soft computing analytic models for multiplication of asymmetrical fuzzy numbers. Recent Developments and the New Direction in Soft-Computing Foundations and Applications. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Cham: Springer, 2021. Vol. 393. P. 201–214. https://doi.org/10.1007/978-3-030-47124-8_17.
10. Drozd J., Drozd O., Antoshchuk S., Kucshnerov A., Nikul V. Effectiveness of matrix and pipeline FPGA-based arithmetic components of safety-related systems. *Proc. of 8th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems (IDAACS 2015)* (24–26 Sept., 2015, Warsaw, Poland). 2015. Vol. 2. P. 785–789. https://doi.org/10.1109/IDAACS.2015.7341410.
11. Беллман Р., Заде Л. Принятие решений в расплывчатых условиях. Вопросы анализа и процедуры принятия решений. Москва: Мир, 1976. С. 172–215.
12. Кривий С.Л. Вступ до методів створення програмних продуктів. Київ: НаУКМА, 2018. 449 с.

S.L. Kryvyi, V.M. Opanasenko, S.B. Zavyalov

ALGEBRAIC OPERATIONS OVER FUZZY SETS AND RELATIONS IN AUTOMATA INTERPRETATION WITH REALIZATION BY LOGICAL HARDWARE MEANS

Abstract. Algebraic operations over fuzzy sets and relations and their implementation by hardware in automata interpretation are considered. Two ways of representing the values of membership functions of fuzzy sets and methods of transformation of such images are described. Appropriate estimates of the complexity of operations with such images are given and correctness of the algorithms is substantiated**.**

Keywords: fuzzy sets, fuzzy relations, algebraic operations, finite automata, FPGA.

Надійшла до редакції 03.12.2021