

**В.М. СТАРКОВ**Інститут фізики НАН України, Київ, Україна,  
e-mail: [vjachnikstar@gmail.com](mailto:vjachnikstar@gmail.com).

## КАНОНІЧНІ РІВНЯННЯ ОПТИЧНОГО ГІСТЕРЕЗИСУ

**Анотація.** Роботу виконано у контексті конкурентної ідеології створення елементної бази цифрових оптичних комп'ютерів (трансфазорів, оптичних ключів, осередків пам'яті) на відмінній від інтерферометра Фабрі–Перо основі. Докладно розглянуто математичні моделі стаціонарної (варіант I) та нестаціонарної (варіант II) чотирипучкової лазерної взаємодії в оптично-нелінійних середовищах у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь із заданими граничними умовами (I) та системи інтегро-диференціальних рівнянь із граничними умовами (II). Введено оригінальні шукані функції  $z(x)$  (I) та  $u(z, t)$ ,  $v(z, t)$  (II). Завдяки цьому розв'язання задачі (I) зведено до розв'язання простого трансцендентного рівняння (канонічного рівняння оптичного гістерезису), а розв'язання задачі (II) – до розв'язання системи двох нелінійних інтегральних рівнянь відносно амплітуд інтерференційних картин (канонічної системи рівнянь нестаціонарного оптичного гістерезису).

**Ключові слова:** бістабільність, гістерезис, оптичний комп'ютер, математична модель, лазерна взаємодія, інтегральне рівняння.

### ВСТУП

У статті наведено докладний опис математичних методів і алгоритмів дослідження теоретичних моделей оптичного гістерезису (оптичної бістабільності). За основу взято теоретичні моделі стаціонарної та нестаціонарної чотирипучкової лазерної взаємодії в оптичних середовищах з дифузійним механізмом нелінійності. Вихідне математичне формулювання задачі стаціонарного варіанта моделі є крайовою задачею для системи звичайних диференціальних рівнянь щодо інтенсивностей лазерних пучків і різниці фаз. Теоретичну модель нестаціонарної чотирипучкової лазерної взаємодії визначають системою інтегро-диференціальних рівнянь із відповідними граничними умовами [1]. Стосовно актуальності роботи слід зазначити, що результати всебічного дослідження явища оптичної бістабільності у випадку обернення хвильового фронту лазерних пучків в електрооптичних кристалах з дифузійним механізмом нелінійності (сегнетоелектриках) мають велике значення для розроблення елементів цифрового оптичного комп'ютера. Ще у 1981 р. компанія «Bell» розробила аналог електронного транзистора — трансфазор [2]. Основою функціонування цього елемента є явище оптичної бістабільності [3], а сам трансфазор є одним з варіантів інтерферометра Фабрі-Перо у вигляді досить складного оптично-бістабільного пристрою [4]. Основною особливістю цього трансфазора є те, що теоретико-математичне обґрунтування принципу його функціонування є досить простим, а конструкторська та технологічна реалізація — дуже складними. Під час удосконалення та апробації основних компонентів цифрового оптичного комп'ютера (оптичних процесорів, осередків пам'яті) на основі інтерферометра Фабрі–Перо науковці з'ясували низку причин принципового характеру. Як виявилось, для того, щоб оптична ідеологія була конкурентоспроможною, потрібно здійснити прорив у забезпеченні функціонування всіх розроблених компонентів як єдиної системи та компактності оптичних елементів у створенні технологій масового виробництва [5]. Саме через це досі немає діючого цифрового оптичного комп'ютера.

© В.М. Старков, 2022

Слід наголосити, що ефекту оптичної бістабільності можна досягнути також у випадку взаємодії лазерного випромінювання з нелінійним середовищем, коли відбувається конкуренція між параметричною дифракцією та інтерференцією хвиль, що взаємодіють, під час обернення хвильового фронту в різних оптично-нелінійних середовищах. Наприклад, функціонування одного з варіантів оптичного транзистора ґрунтується на бістабільності під час обернення хвильового фронту світлових хвиль у сегнетоелектриках [6].

У цій роботі запропоновано теоретико-математичні основи альтернативного підходу до розв'язання проблеми створення елементної бази цифрових оптичних комп'ютерів. Першим етапом є дослідження складних систем звичайних диференціальних рівнянь відносно інтенсивностей лазерних пучків та різниці фаз, а також систем інтегро-диференціальних рівнянь із відповідними граничними умовами, для отримання канонічних рівнянь

#### МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ СТАЦІОНАРНОГО ЧОТИРИПУЧКОВОГО ОБЕРНЕННЯ ХВИЛЬОВОГО ФРОНТУ

Математична задача знаходження оптичного гістерезису по суті зводиться до дослідження теоретичної моделі стаціонарного чотирипучкового обернення хвильового фронту світлових пучків у середовищах з кубічною нелінійністю (рис. 1) [7]. Математично цю модель можна представити крайовою задачею відносно інтенсивностей лазерного випромінювання  $I_i(x) \in C^{(1)}(0, a) \cap C[0, a]$  та різниці фаз  $\Phi(x) \in C^{(1)}(0, a) \cap C[0, a]$  [8]:

$$\begin{aligned} \frac{d I_1(x)}{d x} &= -\frac{d I_3(x)}{d x} = \frac{1}{I_0(x)} [I_1(x)I_3(x) + \mu(x) \cos \Phi(x)], \\ \frac{d I_2(x)}{d x} &= -\frac{d I_4(x)}{d x} = \frac{1}{I_0(x)} [I_2(x)I_4(x) + \mu(x) \cos \Phi(x)], \\ \frac{d \Phi(x)}{d x} &= \frac{1}{2 I_0(x)} \left[ \frac{1}{I_3(x)} + \frac{1}{I_4(x)} - \frac{1}{I_1(x)} - \frac{1}{I_2(x)} \right] \mu(x) \sin \Phi(x), \quad x \in (0, a), \end{aligned} \quad (1)$$

де  $x = 2x' k_0 \Delta\chi / \cos \theta$  — безрозмірна координата по товщині кристала,  $x'$  — розмірна координата,  $\Delta\chi$  — амплітуда модуляції показника заломлення дифузійним полем,  $k_0 = 2\pi / \lambda$  — хвильове число,  $I_0(x) \equiv \sum_{i=1}^4 I_i(x)$  — сумарна інтенсивність,  $2\theta$  — кут сходження хвиль  $I_1(x=0)$  і  $I_3(x=0)$ ,  $\Phi \equiv \Phi_3 - \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_4$  — різниця фаз.

Систему звичайних диференціальних рівнянь (1) отримують у результаті спільного розгляду рівнянь Максвелла та рівнянь електропереносу – дифузії для електрооптичного кристала [9].

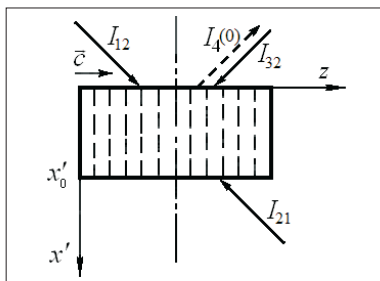


Рис. 1. Схема чотирипучкової лазерної взаємодії

Розв'язують крайову задачу, коли:

$$\begin{aligned} I_1(x=0) &= I_{12} \text{ — опорна хвиля;} \\ I_3(x=0) &= I_{32} \text{ — сигнальна хвиля;} \\ I_2(x=a) &= I_{21} \text{ — зустрічна опорна хвиля;} \\ I_4(x=a) &= I_{41}; \quad \Phi(x=a) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Важливе значення розв'язання задачі (1), (2) полягає у визначенні характеру залежності оберненої хвилі  $I_4(x=0)$  від рівня сигнальної хвилі  $I_3(x=0)$ . Ця залежність дає

зможу фактично виявити наявність оптичного гістерезису. Принциповою особливістю запропонованого методу розв'язання крайової задачі (1), (2) є введення такої функції  $z(x)$ , що [10]:

$$I_1(x) = \alpha \sin^2 \left[ \frac{z(x) + \eta}{2} \right], \quad I_3(x) = \alpha \cos^2 \left[ \frac{z(x) + \eta}{2} \right], \quad \alpha = I_{12} + I_{32},$$

$$I_2(x) = \beta \cos^2 \frac{z(x)}{2}, \quad I_4(x) = \beta \sin^2 \frac{z(x)}{2}, \quad \beta = I_{21} + I_{41}. \quad (3)$$

Слід зазначити, що введення функції  $z(x)$  та метод розв'язання крайової задачі (1), (2) вперше описано у роботі [10].

Алгоритм розв'язання задачі складається з таких етапів послідовного виконання операцій:

1.  $I_1(x) = \alpha \sin^2 \left[ \frac{z(x) + \eta}{2} \right];$
2.  $I_2(x) = \beta \cos^2 \frac{z(x)}{2};$
3.  $I_3(x) = \alpha \cos^2 \left[ \frac{z(x) + \eta}{2} \right];$
4.  $I_4(x) = \beta \sin^2 \frac{z(x)}{2};$
5.  $\frac{dI_1(x)}{dx} = 0.5 \alpha \sin [z(x) + \eta] z'(x);$
6.  $\frac{dI_3(x)}{dx} = -0.5 \alpha \sin [z(x) + \eta] z'(x);$
7.  $\frac{dI_2(x)}{dx} = -0.5 \beta \sin [z(x)] z'(x);$
8.  $\frac{dI_4(x)}{dx} = 0.5 \beta \sin [z(x)] z'(x);$
9.  $I_0 \equiv \sum_{i=1}^4 I_i(x) = \alpha + \beta;$
10.  $\mu(x) \equiv \left( \prod_{i=1}^4 I_i(x) \right)^{1/2} = 1/4 \alpha \beta \sin [z(x)] \sin [z(x) + \eta];$
11.  $\frac{1}{I_0(x)} [I_1(x)I_3(x) + \mu(x) \cos \Phi(x)] =$   

$$= \frac{\alpha \sin [z(x) + \eta] (\alpha \sin [z(x) + \eta] - \beta \sin [z(x)])}{4(\alpha + \beta)};$$
12.  $z'(x) = \frac{\alpha \sin [z(x) + \eta] - \beta \sin [z(x)]}{2(\alpha + \beta)};$
13.  $\frac{dz}{(\alpha \cos \eta - \beta) \sin z + \alpha \sin \eta \cos z} = \frac{dx}{2(\alpha + \beta)};$
14.  $\int \frac{dz}{aa \sin z + bb \cos z} = \frac{\ln \tan[0.5(z + \arctan [bb/aa])]}{\sqrt{aa^2 + bb^2}};$   

$$aa := \alpha \cos \eta - \beta; \quad bb := \alpha \sin \eta; \quad [11, \text{ C.163}]$$

15. 
$$\frac{\ln \tan[0.5(z + \arctan[bb/aa])]}{\sqrt{aa^2 + bb^2}} = \frac{x}{2(\alpha + \beta)} + D1;$$
16. 
$$B1 \exp\left[\frac{x r}{2(\alpha + \beta)}\right] = \tan\left[\frac{z + \theta}{2}\right]; \theta = \arctan\left[\frac{\alpha \sin \eta}{\alpha \cos \eta - \beta}\right];$$

$$r = \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta \cos \eta + \beta^2}; B1 = \exp[rD1];$$
17. 
$$z = 2\arctan\left[B1 \exp\left[\frac{x r}{2(\alpha + \beta)}\right]\right] - \theta;$$
18. 
$$\left(\frac{I_1(x)}{I_3(x)}\right)^{1/2} = \tan\left[\frac{z(x) + \eta}{2}\right],$$

$$\left(\frac{I_1(x=0)}{I_3(x=0)}\right)^{1/2} = \sqrt{I_{12} / I_{32}} = \tan\left[\frac{z(0) + \eta}{2}\right];$$
19. 
$$z(0) = 2\arctan[\sqrt{I_{12} / I_{32}}] - \eta;$$
20. 
$$\left(\frac{I_4(x)}{I_2(x)}\right)^{1/2} = \tan\left[\frac{z(x)}{2}\right], \left(\frac{I_{41}(x=a)}{I_{21}(x=a)}\right)^{1/2} = \sqrt{I_{41} / I_{21}} = \tan\left[\frac{z(a)}{2}\right];$$
21. 
$$z(a) = 2\arctan[\sqrt{I_{41} / I_{21}}];$$
22. 
$$z(a) = 2\arctan\left[B1 \exp\left[\frac{a r}{2(\alpha + \beta)}\right]\right] - \theta;$$
23. 
$$B1 = \tan[(z(a) + \theta) / 2] \exp\left[\frac{-a r}{2(\alpha + \beta)}\right];$$
24. 
$$z(x) = 2\arctan\left[\tan[(z(a) + \theta) / 2] \exp\left[\frac{(x-a)r}{2(\alpha + \beta)}\right]\right] - \theta;$$
25. 
$$z(0) = 2\arctan\left[\tan[(z(a) + \theta) / 2] \exp\left[\frac{-a r}{2(\alpha + \beta)}\right]\right] - \theta;$$
26. 
$$\tan[(z(0) + \theta) / 2] = \tan[(z(a) + \theta) / 2] \exp\left[\frac{-a r}{2(\alpha + \beta)}\right];$$
27. 
$$\tan[(z(0) + \theta) / 2] = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos[z(0) + \theta]}{1 + \cos[z(0) + \theta]}};$$
28. 
$$\tan[(z(0) + \theta) / 2] = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos[z(a) + \theta]}{1 + \cos[z(a) + \theta]}} \exp\left[\frac{-a r}{2(\alpha + \beta)}\right];$$
29. 
$$\frac{1 - \cos[z(0) + \theta]}{1 + \cos[z(0) + \theta]} = \frac{1 - \cos[z(a) + \theta]}{1 + \cos[z(a) + \theta]} \exp\left[\frac{-a r}{(\alpha + \beta)}\right];$$
30. 
$$(1 - \cos[z(0) + \theta])(1 + \cos[z(a) + \theta]) -$$

$$- \exp\left[\frac{-a r}{(\alpha + \beta)}\right](1 + \cos[z(0) + \theta])(1 - \cos[z(a) + \theta]) = 0; \quad (4)$$

Отже, розв'язання вихідної крайової задачі (1), (2) зведено до побудови функції

$$z(x) = 2\arctan \left[ \tan [(z(a) + \theta) / 2] \exp \left[ \frac{(x - a) r}{2(\alpha + \beta)} \right] \right] - \theta, \quad (5)$$

в якій

$$z(0) = 2\arctan [\sqrt{I_{12} / I_{32}}] - \eta; \quad z(a) = 2\arctan [\sqrt{I_{41} / I_{21}}]; \quad \theta = \arctan \left[ \frac{\alpha \sin \eta}{\alpha \cos \eta - \beta} \right];$$

$$r = \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta \cos \eta + \beta^2}, \quad \alpha = I_{12} + I_{32}, \quad \beta = I_{21} + I_{41}.$$

Параметр  $\eta$  визначається як розв'язок трансцендентного рівняння

$$(1 - \cos [z(0) + \theta]) (1 + \cos [z(a) + \theta]) - \exp \left[ \frac{-a r}{(\alpha + \beta)} \right] (1 + \cos [z(0) + \theta]) (1 - \cos [z(a) + \theta]) = 0, \quad (6)$$

яке називають канонічним, якщо це визначення розуміти як твердо встановлене і взяте за зразок рівняння.

Якщо перейти до безрозмірних значень інтенсивностей

$$I_i(x) \in C^{(1)}(0, a) \cap C[0, a], \quad \text{поклавши } I_0 \equiv \sum_{i=1}^4 I_i(x) = \alpha + \beta = 1,$$

то вираз (5) для функції  $z(x)$  набуває вигляду

$$z(x) = 2\arctan [\tan [(z(a) + \theta) / 2] \exp[(x - a) r / 2]] - \theta. \quad (7)$$

Канонічне рівняння (6), корені якого визначають аналітичний вигляд функції  $z(x)$ , є дуже простим:

$$(1 - \cos [z(0) + \theta]) (1 + \cos [z(a) + \theta]) - e^{-a r} (1 + \cos [z(0) + \theta]) (1 - \cos [z(a) + \theta]) = 0. \quad (8)$$

#### МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЧОТИРИПУЧКОВОЇ ЛАЗЕРНОЇ ВЗАЄМОДІЇ В ОПТИЧНО-НЕЛІНІЙНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Найбільш важливою та складною проблемою у фізиці взаємодії лазерного випромінювання з нелінійним середовищем є задача нестационарної чотирипучкової взаємодії в оптично-нелінійних середовищах та, зокрема, математичне моделювання цієї взаємодії.

Під час розгляду нестационарних ефектів для чотирипучкового обернення хвильового фронту досліджують випадок [12], коли хвиля накачування  $A_2$  є некогерентною до хвиль

$$A_m(z, t) = \sqrt{I_m(z, t)} \exp[i\varphi_m(z, t)], \quad m = 1, 3.$$

У випадку симетричної геометрії взаємодії в ізотропному середовищі розглядають крайову задачу відносно інтенсивностей

$$I_m(z, t) \in C^{(1,0)}((0, a) \times [0, T]) \cap C([0, a] \times [0, T]), \quad m = \overline{1, 4}$$

та різниць фаз

$$\varphi_{13}(z, t), \varphi_{42}(z, t) \in C^{(1,0)}((0, a) \times [0, T]) \cap C([0, a] \times [0, T]).$$

Ця задача була зведена Н.В Кухтарьовим [12] до розв'язання такої системи інтегро-диференціальних рівнянь:

$$1) \frac{\partial I_3(z, t)}{\partial z} = 2\delta\sqrt{I_1 I_3} \int_0^t e^{\tau-t} d\tau \{ \sqrt{I_1 I_3} \sin \varphi^{(13)} + \sqrt{I_2 I_4} \sin \varphi^{(4213)} \},$$

$$2) \frac{\partial I_3(z, t)}{\partial z} + \frac{\partial I_1(z, t)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial I_4(z, t)}{\partial z} + \frac{\partial I_2(z, t)}{\partial z} = 0,$$

$$3) \frac{\partial I_4(z, t)}{\partial z} = 2\delta\sqrt{I_2 I_4} \int_0^t e^{\tau-t} d\tau \{ \sqrt{I_2 I_4} \sin \varphi^{(42)} + \sqrt{I_1 I_3} \sin \varphi^{(1342)} \},$$

$$4) \frac{\partial \varphi_{13}(z, t)}{\partial z} = \frac{\delta(I_3 - I_1)}{\sqrt{I_1 I_3}} \int_0^t e^{\tau-t} d\tau \{ \sqrt{I_1 I_3} \cos \varphi^{(13)} + \sqrt{I_2 I_4} \cos \varphi^{(4213)} \},$$

5)

$$\frac{\partial \varphi_{42}(z, t)}{\partial z} = \frac{\delta(I_4 - I_2)}{\sqrt{I_2 I_4}} \int_0^t e^{\tau-t} d\tau \{ \sqrt{I_2 I_4} \cos \varphi^{(42)} + \sqrt{I_1 I_3} \cos \varphi^{(1342)} \}, \quad (9)$$

де  $\varphi^{(mn)} = \varphi_{mn}(\tau) - \varphi_{mn}(t)$ ,  $\varphi^{(ikmn)} = \varphi_{ik}(\tau) - \varphi_{mn}(t)$ ,

$$\varphi_{mn}(t) = \varphi_m(t) - \varphi_n(t), \quad \delta = k_0 \Delta\chi (I_0 \cos \theta)^{-1}, \quad I_0 = \sum_{i=1}^4 I_i, \quad t = t' / \tau_0,$$

$\Delta\chi$  — світлоіндукована зміна показника заломлення,  $t'$  — час,  $2\theta$  — кут сходження пучків  $A_1$  і  $A_3$ ,  $z$  — координата по товщині середовища.

Граничні умови задачі є такими:

$$I_{1,3}(z=0, t) = I_{10,30}(t); \quad I_{2,4}(z=a, t) = I_{21,41}(t);$$

$$\varphi_{13}(z=0, t) = \varphi_{13}^{(0)}(t); \quad \varphi_{42}(z=a, t) = \varphi_{42}^{(1)}(t). \quad (10)$$

У результаті розв'язання цієї задачі вкрай важливо виявити та дослідити зміни бістабільності (багатозначності оберненої хвилі залежно від інтенсивності  $I_4(z, t)$ ) у часі. Однак, представлену математичну модель чотирипучкової взаємодії в оптично-нелінійних середовищах важко назвати компактною, доступною для огляду і фізично прозорою. Доцільно модифікувати цю модель до системи нелінійних інтегральних рівнянь, адекватної вихідній задачі (9)–(10). Інакше кажучи, бажано отримати канонічну систему нелінійних інтегральних рівнянь, що моделюють нестационарну бістабільність.

Перетворення починаємо з уведення двох допоміжних функцій:

$$\Phi_1(z, t) = \int_0^t e^{\tau-t} d\tau \{ \sqrt{I_1 I_3} \sin \varphi_{13}(\tau) + \sqrt{I_2 I_4} \sin \varphi_{42}(\tau) \},$$

$$\Phi_2(z, t) = \int_0^t e^{\tau-t} d\tau \{ \sqrt{I_1 I_3} \cos \varphi_{13}(\tau) + \sqrt{I_2 I_4} \cos \varphi_{42}(\tau) \}. \quad (11)$$

Якщо використати ці функції в системі (9), то вона матиме вигляд

$$1) \frac{\partial I_3(z, t)}{\partial z} = 2\delta\sqrt{I_1 I_3} \{ \Phi_1(z, t) \cos \varphi_{13}(t) - \Phi_2(z, t) \sin \varphi_{13}(t) \},$$

$$2) \frac{\partial I_3(z, t)}{\partial z} + \frac{\partial I_1(z, t)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial I_4(z, t)}{\partial z} + \frac{\partial I_2(z, t)}{\partial z} = 0,$$

$$\begin{aligned}
3) \quad & \frac{\partial I_4(z, t)}{\partial z} = 2\delta\sqrt{I_2 I_4} \{ \Phi_1(z, t) \cos \varphi_{42}(t) - \Phi_2(z, t) \sin \varphi_{42}(t) \}, \\
4) \quad & \frac{\partial \varphi_{13}(z, t)}{\partial z} = \frac{\delta(I_3 - I_1)}{\sqrt{I_1 I_3}} \{ \Phi_1(z, t) \sin \varphi_{13}(t) + \Phi_2(z, t) \cos \varphi_{13}(t) \}, \\
5) \quad & \frac{\partial \varphi_{42}(z, t)}{\partial z} = \frac{\delta(I_4 - I_2)}{\sqrt{I_2 I_4}} \{ \Phi_1(z, t) \sin \varphi_{42}(t) + \Phi_2(z, t) \cos \varphi_{42}(t) \}. \quad (12)
\end{aligned}$$

За аналогією з (3) вводимо нові функції  $u(z, t)$  і  $v(z, t)$  такі, що шукаємо

$$\begin{aligned}
I_1(z, t) &= \alpha(t) \cos^2 \frac{u(z, t)}{2}, \quad I_3(z, t) = \alpha(t) \sin^2 \frac{u(z, t)}{2}, \\
I_2(z, t) &= \beta(t) \cos^2 \frac{v(z, t)}{2}, \quad I_4(z, t) = \beta(t) \sin^2 \frac{v(z, t)}{2}, \quad (13)
\end{aligned}$$

де  $\alpha(t) = I_{10}(t) + I_{30}(t)$ ,  $\beta(t) = I_{21}(t) + I_{41}(t)$ .

Оскільки

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_3(z, t)}{\partial z} &= -\frac{\partial I_1(z, t)}{\partial z} = \frac{1}{2} \alpha(t) \sin u(z, t) \frac{\partial u(z, t)}{\partial z}, \\
\sqrt{I_1(z, t) I_3(z, t)} &= \frac{1}{2} \alpha(t) \sin u(z, t), \\
\frac{\partial I_4(z, t)}{\partial z} &= -\frac{\partial I_2(z, t)}{\partial z} = \frac{1}{2} \beta(t) \sin v(z, t) \frac{\partial v(z, t)}{\partial z}, \\
\sqrt{I_2(z, t) I_4(z, t)} &= \frac{1}{2} \beta(t) \sin v(z, t), \\
I_1(z, t) - I_3(z, t) &= \alpha(t) \cos u(z, t), \quad I_2(z, t) - I_4(z, t) = \beta(t) \cos v(z, t), \\
\frac{1}{\sqrt{I_1(z, t) I_3(z, t)}} \frac{\partial I_3(z, t)}{\partial z} &= \frac{\partial u(z, t)}{\partial z}, \quad \frac{\sqrt{I_1(z, t) I_3(z, t)}}{I_1(z, t) - I_3(z, t)} = \frac{1}{2} \frac{\sin u(z, t)}{\cos u(z, t)}, \\
\frac{1}{\sqrt{I_2(z, t) I_4(z, t)}} \frac{\partial I_4(z, t)}{\partial z} &= \frac{\partial v(z, t)}{\partial z}, \quad \frac{\sqrt{I_2(z, t) I_4(z, t)}}{I_2(z, t) - I_4(z, t)} = \frac{1}{2} \frac{\sin v(z, t)}{\cos v(z, t)},
\end{aligned}$$

система (12) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
1) \quad & \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = 2\delta \{ \Phi_1(z, t) \cos \varphi_{13}(t) - \Phi_2(z, t) \sin \varphi_{13}(t) \}, \\
2) \quad & \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = 2\delta \{ \Phi_1(z, t) \cos \varphi_{42}(t) - \Phi_2(z, t) \sin \varphi_{42}(t) \}, \quad (14) \\
3) \quad & \sin u(z, t) \frac{\partial \varphi_{13}(z, t)}{\partial z} = \\
& = -2\delta \cos u(z, t) \{ \Phi_1(z, t) \sin \varphi_{13}(t) + \Phi_2(z, t) \cos \varphi_{13}(t) \}, \\
4) \quad & \sin v(z, t) \frac{\partial \varphi_{42}(z, t)}{\partial z} = \\
& = -2\delta \cos v(z, t) \{ \Phi_1(z, t) \sin \varphi_{42}(t) + \Phi_2(z, t) \cos \varphi_{42}(t) \},
\end{aligned}$$

де

$$\Phi_1(z, t) = \frac{1}{2} \int_0^t e^{\tau-t} d\tau \{ \alpha(\tau) \sin u(z, \tau) \sin \varphi_{13}(\tau) + \beta(\tau) \sin v(z, \tau) \sin \varphi_{42}(\tau) \}, \quad (15)$$

$$\Phi_2(z, t) = \frac{1}{2} \int_0^t e^{\tau-t} d\tau \{ \alpha(\tau) \sin u(z, \tau) \cos \varphi_{13}(\tau) + \beta(\tau) \sin v(z, \tau) \cos \varphi_{42}(\tau) \}.$$

У результаті розв'язання першого та третього рівнянь системи (14) відносно функцій  $\Phi_1(z, t)$  і  $\Phi_2(z, t)$  отримуємо

$$\begin{aligned} 2\delta \cos u(z, t) \Phi_1(z, t) &= \cos u(z, t) \cos \varphi_{13}(z, t) \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} - \\ &\quad - \sin u(z, t) \sin \varphi_{13}(z, t) \frac{\partial \varphi_{13}(z, t)}{\partial z}, \\ 2\delta \cos u(z, t) \Phi_2(z, t) &= -\cos u(z, t) \sin \varphi_{13}(z, t) \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} - \\ &\quad - \sin u(z, t) \cos \varphi_{13}(z, t) \frac{\partial \varphi_{13}(z, t)}{\partial z}, \end{aligned}$$

тобто

$$\begin{aligned} 2\delta \cos u(z, t) \Phi_1(z, t) &= \frac{\partial}{\partial z} [\cos \varphi_{13}(z, t) \sin u(z, t)], \\ 2\delta \cos u(z, t) \Phi_2(z, t) &= -\frac{\partial}{\partial z} [\sin \varphi_{13}(z, t) \sin u(z, t)], \end{aligned}$$

або у комплексній формі

$$\begin{aligned} 2\delta \cos u(z, t) [\Phi_1(z, t) - i \Phi_2(z, t)] &= \\ &= \frac{\partial}{\partial z} [\cos \varphi_{13}(z, t) + i \sin \varphi_{13}(z, t)] \sin u(z, t). \end{aligned}$$

Відповідно до формул (15) маємо:

$$\begin{aligned} \Phi_1(z, t) - i \Phi_2(z, t) &= \frac{1}{2} \int_0^t e^{\tau-t} \left\{ \alpha(\tau) \sin u(z, \tau) [\sin \varphi_{13}(\tau) - i \cos \varphi_{13}(\tau)] + \right. \\ &\quad \left. + \beta(\tau) \sin v(z, \tau) [\sin \varphi_{42}(\tau) - i \cos \varphi_{42}(\tau)] \right\} d\tau = \\ &= -\frac{i}{2} \int_0^t e^{\tau-t} \left\{ \alpha(\tau) \sin u(z, \tau) \exp[i\varphi_{13}(\tau)] + \right. \\ &\quad \left. + \beta(\tau) \sin v(z, \tau) \exp[i\varphi_{42}(\tau)] \right\} d\tau, \end{aligned}$$

отже

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z} \{ \sin u(z, t) \exp[i\varphi_{13}(z, t)] \} = \\ &= -i \delta \cos u(z, t) \int_0^t e^{\tau-t} \left\{ \alpha(\tau) \sin u(z, \tau) \exp[i\varphi_{13}(\tau)] + \right. \\ &\quad \left. + \beta(\tau) \sin v(z, \tau) \exp[i\varphi_{42}(\tau)] \right\} d\tau. \quad (16) \end{aligned}$$

У результаті аналогічних дій з другим і четвертим рівняннями системи (14) отримуємо

$$\begin{aligned} 2\delta \cos v(z, t) \Phi_1(z, t) &= \cos v(z, t) \cos \varphi_{42}(z, t) \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} - \\ &\quad - \sin v(z, t) \sin \varphi_{42}(z, t) \frac{\partial \varphi_{42}(z, t)}{\partial z}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
2\delta \cos v(z, t) \Phi_2(z, t) &= -\cos v(z, t) \sin \varphi_{42}(z, t) \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} - \\
&\quad - \sin v(z, t) \cos \varphi_{42}(z, t) \frac{\partial \varphi_{42}(z, t)}{\partial z}, \\
2\delta \cos v(z, t) \Phi_1(z, t) &= \frac{\partial}{\partial z} [\cos \varphi_{42}(z, t) \sin v(z, t)], \\
2\delta \cos v(z, t) \Phi_2(z, t) &= -\frac{\partial}{\partial z} [\sin \varphi_{42}(z, t) \sin v(z, t)], \\
2\delta \cos v(z, t) [\Phi_1(z, t) - i \Phi_2(z, t)] &= \\
&= \frac{\partial}{\partial z} \{[\cos \varphi_{42}(z, t) + i \sin \varphi_{42}(z, t)] \sin v(z, t)\}, \\
&\quad \frac{\partial}{\partial z} \{\sin v(z, t) \exp[i\varphi_{42}(z, t)]\} = \\
&= -i \delta \cos v(z, t) \int_0^t e^{\tau-t} \left\{ \begin{aligned} &\alpha(\tau) \sin u(z, \tau) \exp[i\varphi_{13}(\tau)] + \\ &+ \beta(\tau) \sin v(z, \tau) \exp[i\varphi_{42}(\tau)] \end{aligned} \right\} d\tau. \quad (17)
\end{aligned}$$

Якщо ввести комплексні функції

$$w_1(z, t) = \sin u(z, t) \exp[i\varphi_{13}(z, t)], \quad w_2(z, t) = \sin v(z, t) \exp[i\varphi_{42}(z, t)], \quad (18)$$

то рівняння (16), (17) набудуть такого вигляду:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_1(z, t)}{\partial z} &= -i \delta \sqrt{1-|w_1(z, t)|^2} \int_0^t e^{\tau-t} [\alpha(\tau) w_1(z, \tau) + \beta(\tau) w_2(z, \tau)] d\tau, \\
\frac{\partial w_2(z, t)}{\partial z} &= -i \delta \sqrt{1-|w_2(z, t)|^2} \int_0^t e^{\tau-t} [\alpha(\tau) w_1(z, \tau) + \beta(\tau) w_2(z, \tau)] d\tau. \quad (19)
\end{aligned}$$

Комплексні функції  $w_1(z, t)$  та  $w_2(z, t)$  з фізичного погляду можна інтерпретувати як відносні амплітуди інтерференційних картин.

Дійсно, оскільки

$$A_m(z, t) = \sqrt{I_m(z, t)} \exp[i\varphi_m(z, t)], \quad m = \overline{1, 4},$$

і справджуються співвідношення (13), то

$$\begin{aligned}
w_1(z, t) &= \sin u(z, t) \exp[i\varphi_{13}(z, t)] = 2A_1(z, t)A_3^*(z, t) / \alpha(t), \\
w_2(z, t) &= \sin v(z, t) \exp[i\varphi_{42}(z, t)] = 2A_2^*(z, t)A_4(z, t) / \beta(t). \quad (20)
\end{aligned}$$

Граничні умови для системи (19) набувають вигляду

$$\begin{aligned}
w_1(z=0, t) &= w_{10}(t) = 2\sqrt{I_{10}(t)I_{30}(t)} \exp[i\varphi_{13}^{(0)}(t)] / \alpha(t), \\
w_2(z=a, t) &= w_{21}(t) = 2\sqrt{I_{21}(t)I_{41}(t)} \exp[i\varphi_{42}^{(1)}(t)] / \beta(t). \quad (21)
\end{aligned}$$

У результаті інтегрування кожного рівняння системи (19) за просторовою змінною отримаємо [13]

$$\begin{aligned}
w_1(z, t) &= w_{10}(t) - i \delta \int_0^z \int_0^t e^{\tau-t} \sqrt{1 - |w_1(x, \tau)|^2} [\alpha(\tau) w_1(x, \tau) + \beta(\tau) w_2(x, \tau)] d\tau dx, \\
w_2(z, t) &= w_{21}(t) + \\
&+ i \delta \int_0^a \int_0^t e^{\tau-t} \sqrt{1 - |w_2(x, \tau)|^2} [\alpha(\tau) w_1(x, \tau) + \beta(\tau) w_2(x, \tau)] d\tau dx - \\
&- i \delta \int_0^z \int_0^t e^{\tau-t} \sqrt{1 - |w_2(x, \tau)|^2} [\alpha(\tau) w_1(x, \tau) + \beta(\tau) w_2(x, \tau)] d\tau dx, \quad (22)
\end{aligned}$$

або

$$w_2(z, t) = w_{21}(t) + i \delta \int_z^a \int_0^t e^{\tau-t} \sqrt{1 - |w_2(x, \tau)|^2} [\alpha(\tau) w_1(x, \tau) + \beta(\tau) w_2(x, \tau)] d\tau dx.$$

Взаємодія інтерференційних картин  $w_1(z, t)$  і  $w_2(z, t)$  реалізується в середовищі з дифузійною нелінійністю зміною амплітуди ґраток діелектричної проникності:

$$\Delta \varepsilon(z, t) = 0.5 \eta \int_0^t e^{\tau-t} [\alpha(\tau) w_1(x, \tau) + \beta(\tau) w_2(x, \tau)] d\tau dx.$$

Отже, математичну модель чотирипучкової взаємодії в оптично-нелінійних середовищах у вигляді системи інтегро-диференційних рівнянь (9) з граничними умовами (10) перетворено на компактну і доступну для огляду систему двох нелінійних інтегральних рівнянь відносно амплітуд інтерференційних картин. Тому є всі підстави для того, щоб отриману систему двох нелінійних інтегральних рівнянь (22) можна було назвати канонічною системою рівнянь нестационарного оптичного гістерезису. Слід зазначити, що вперше систему двох нелінійних інтегральних рівнянь (22) щодо амплітуд інтерференційних картин описано в [13]. Важливою особливістю та перевагою канонічної системи рівнянь нестационарного оптичного гістерезису є те, що її теоретичне дослідження та конструктивне рішення можна реалізувати з використанням методів нелінійних операторних рівнянь [14–16].

## ВИСНОВКИ

У роботі наведено докладний аналіз теоретичних моделей стаціонарної та не-стаціонарної чотирипучкової лазерної взаємодії в оптично-нелінійних середовищах. Фізичні моделі були отримані та описані Н.В. Кухтарьовим у роботах [7], [9] та [12]. У цій роботі представлено математичне формулювання крайової задачі відносно інтенсивностей лазерного випромінювання для дослідження теоретичної моделі стаціонарного чотирипучкового обернення хвильового фронту світлових пучків у середовищах з кубічною нелінійністю у вигляді системи звичайних диференційних рівнянь із заданими граничними умовами.

Як основу методу розв'язання крайової задачі (системи звичайних диференційних рівнянь із заданими граничними умовами) відносно інтенсивностей лазерного випромінювання запропоновано ідею їхнього представлення через функцію  $z(x)$ . Реалізація цієї ідеї дала змогу звести розв'язання крайової задачі до пошуку коренів  $\eta$  досить простого трансцендентного рівняння

$$\begin{aligned}
&(1 - \cos[z(0) + \theta]) (1 + \cos[z(a) + \theta]) - \\
&- e^{-a r} (1 + \cos[z(0) + \theta]) (1 - \cos[z(a) + \theta]) = 0,
\end{aligned}$$

яке названо канонічним рівнянням оптичного гістерезису. Зауважимо, що вперше цей метод було опубліковано у роботі [10].

Алгоритм розв'язання задачі містить докладний і повний перелік операцій.

Для зведення задачі нестационарної чотирипучкової взаємодії в оптично-нелінійних середовищах до канонічного вигляду використано ідею, аналогічну стаціонарному варіанту застосування функції  $z(x)$ . Уведено нові функції  $u(z, t)$  і  $v(z, t)$  такі, що шукають

$$I_1(z, t) = \alpha(t) \cos^2 \frac{u(z, t)}{2}, \quad I_3(z, t) = \alpha(t) \sin^2 \frac{u(z, t)}{2},$$
$$I_2(z, t) = \beta(t) \cos^2 \frac{v(z, t)}{2}, \quad I_4(z, t) = \beta(t) \sin^2 \frac{v(z, t)}{2}.$$

Цей підхід дав змогу перетворити математичну модель чотирипучкової взаємодії в оптично-нелінійних середовищах у вигляді системи інтегро-диференціальних рівнянь з граничними умовами на компактну та осяжну систему двох нелінійних інтегральних рівнянь відносно амплітуд інтерференційних картин. Внаслідок цього отриману систему двох нелінійних інтегральних рівнянь названо канонічною системою рівнянь нестационарного оптичного гістерезису. Важливою особливістю та перевагою канонічної системи рівнянь нестационарного оптичного гістерезису є те, що її теоретичне дослідження та конструктивне рішення можна здійснювати з позицій методів нелінійних операторних рівнянь. Слід зазначити, що ідею введення функції  $z(x)$  та метод розв'язання крайової задачі вперше опубліковано в роботі [10], а систему двох нелінійних інтегральних рівнянь відносно амплітуд інтерференційних картин також вперше представлено у [13]. Отже, детальний виклад математичних моделей, методів та алгоритмів розв'язання розглянутих задач є основою змістовної частини запропонованої роботи.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Starkov V.N., Tomchuk P.M. Problems, methods and algorithms in models of physical fundamentals of elements of optical computers. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, N 1. P. 153–166. <https://doi.org/10.1007/s10559-019-00120-z>.
2. Белов П.А., Беспалов В.Г., Васильев В.Н., Козлов С.А., Павлов А.В., Симовский К.Р., Шполянский Ю.А. Оптические процессоры: достижения и новые идеи. В кн.: Проблемы когерентной и нелинейной оптики. Гуров И.П., Козлов С.А. (Ред.). СПб: ИТМО, 2006. 266 с.
3. Гиббс Х. Оптическая бистабильность. Управление светом с помощью света. Москва: Мир, 1988. 520 с.
4. Днепровский В.С. Оптическая бистабильность и проблема создания оптического транзистора. *Соросовский образовательный журнал*. 1999. № 11. С. 103–109.
5. Startup with optical solver supercomputer targets 17 exaFLOPS by 2020. URL: <https://www.nextbigfuture.com/2014/08/startup-with-optical-solver.html>.
6. Кухтарев Н.В., Семенец Т.И., Старков В.Н. Оптическая бистабильность и гистерезис при обращении волнового фронта световых волн в сегнетоэлектриках. Сегнетоэлектрики и пьезоэлектрики. Калинин: Калининский гос. ун-т, 1984. С. 115–122.
7. Кухтарев Н.В., Одулов С.Г. Обращение волнового фронта при четырехволновом взаимодействии в средах с нелокальной нелинейностью. *Письма в ЖЭТФ*. 1979. Т. 30, № 1. С. 6–11.

8. Кухтарев Н.В., Старков В.Н. Оптическая бистабильность при обращении волнового фронта световых пучков в электрооптических кристаллах с диффузионной нелинейностью. *Письма в ЖТФ*. 1981. Т. 7, № 11. С. 692–695.
9. Винецкий В.Л., Кухтарев Н.В., Марков В.Б., Одулов С.Г., Соскин М.С. Усиление когерентных световых пучков динамическими голограммами в сегнетоэлектрических кристаллах. *Изв. АН СССР*. 1977. Т. 41, № 4. С. 811–820.
10. Старков В.Н. О многозначности решения задачи обращения волнового фронта лазерных пучков в электрооптических кристаллах. *Сборник: Вычислит. математика ВЦ СО АН СССР*. 1982. № 2. С. 41–42.
11. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Физматгиз, 1963. 1100 с.
12. Кухтарев Н.В. Самосогласованная теория объемной динамической голографии: автореф. дис. ... д-ра физ-мат. наук. Киев, 1983. 30 с.
13. Старков В.Н. Нелинейные интегральные уравнения в задачах динамической голографии. *Матеріали міжнародної конференції «Асимптотичні та якісні методи в теорії нелінійних коливань»* (18–23 серпня 1997, Київ, Україна). Київ, 1997. С. 166–167.
14. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. Москва: Наука, 1977. 744 с.
15. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рунтцкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. Москва: Наука, 1969. 456 с.
16. Baker C. The numerical treatment of integral equations. Oxford: Clarendon press, 1977. 1034 p.

## V. Starkov

### CANONICAL ALIGNMENT OF OPTICAL HYSTERESIS

**Abstract.** The content of the study is in line with the competitive ideology of creating the element base of digital optical computers (transphasors, optical switches, memory devices) on a basis other than the Fabry–Perot interferometer. Mathematical models of stationary (variant I) and nonstationary (variant II) four-beam laser interaction in optically nonlinear media are considered in detail in the form of a system of ordinary differential equations with given boundary conditions (I) and a system of integro-differential equations with boundary conditions (II). The original desired functions  $z(x)$  (I) and  $u(z, t)$ ,  $v(z, t)$  (II) are introduced. As a result, the solution of problem (I) is reduced to solving a simple transcendental equation (canonical equation of optical hysteresis), and the solution of problem (II) is reduced to a system of two nonlinear integral equations with respect to the amplitudes of interference patterns (canonical system of equations of nonstationary optical hysteresis).

**Keywords:** bistability, hysteresis, optical computer, mathematical model, laser interaction, integral equation.

*Надійшла до редакції 06.03.2022*