УДК 519.21

П.С. КНОПОВ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *knopov1@yahoo.com*.

Т.В. ПЕПЕЛЯЄВА
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *pepelaev@yahoo.com*.

ДЕЯКІ БАГАТОВИМІРНІ СТОХАСТИЧНІ МОДЕЛІ КЕРУВАННЯ ЗАПАСАМИ ІЗ СЕПАРАБЕЛЬНОЮ ФУНКЦІЄЮ ВИТРАТ[1]

Анотація. Досліджено багатономеклатурні моделі теорії запасів з використанням фактів теорії багатокомпонентних керованих випадкових процесів. Розглянуто марковські та напівмарковські керовані стохастичні системи. Визначено структуру оптимальної стратегії для багатономенклатурної системи запасів.

Ключові слова: марковські процеси, керування запасами, (s,S)-стратегія, критерій оптимальності, оптимальна стратегія.

ВСТУП

У статті досліджено багатономенклатурну модель керування запасами за деяких припущень про структуру витрат. Цю систему описано за допомогою (керованих) марковських або напівмарковських процесів із дискретним часом. Для однономенклатурних моделей аналогічні моделі розглянуто у роботах [1–4]. Для дослідження багатономеклатурних моделей суттєвою мірою використано загальні результати роботи [5].

Статтю побудовано в такий спосіб: спочатку наведено загальні факти з теорії керованих багатокомпонентних випадкових процесів, потім ці результати застосовано для дослідження багатономеклатурних моделей теорії запасів. При цьому використано деякі результати, отримані в роботах [6–7].

1. МАРКОВСЬКІ КЕРОВАНІ СТОХАСТИЧНІ СИСТЕМИ

Розглянемо модель керування системою з багатовимірними фазовим простором і простором прийняття рішень.

Нехай простір станів є Декартовим добутком m множин, тобто $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$. Простір прийняття рішень $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$. Простори X та A є сепарабельними метричними просторами з борелівськими σ-алгебрами $\aleph$ та $\Im$ відповідно. Будемо вважати, що $\Delta = \{(x, a),\ x \in X,\ a \in A_x\} \in (\aleph \otimes \Im)$ — борелівські підмножини простору $X \times A$.

Для кожної пари $x_i \in X_i$, $a_i \in A_i$, позначимо $r_i(x_i, a_i)$ очікувані витрати за один період, якщо i-а підсистема перебуває у стані x_i на початку періоду, і приймається рішення $a_i \in A_i$.

Нехай очікувані витрати всієї системи за один період $r(x, a)$, де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, є сепарабельною функцією, тобто має вигляд $r(x, a) = \sum_{i=1}^{m} r_i(x_i, a_i)$. Загальною допустимою стратегією керування системою є послідовність $\delta = \{\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n, \ldots\}$ перехідних імовірностей така, що ймовірнісна міра $\delta_n(\cdot \mid x_0, a_0, \ldots, x_n)$ на $(A, \Im)$ зосереджена на A_{x_n}.

[1] Роботу виконано за часткової підтримки Національного фонду досліджень України. Грант № 2020.02/0121.

Далі будемо вважати, що простори X_i, A_i, $i = 1, \ldots, m$, і функції $r_i(x_i, a_i)$ задовольняють відповідні умови, наведені вище для $r(x, a)$ загального вигляду.

Нехай $\Re$ — клас допустимих стратегій і $\Re_1$ — клас стаціонарних марковських детермінованих стратегій.

Тоді критерій φ-оптимальності відповідної стратегії можна записати у такий спосіб:

$$\varphi(x, \delta) = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n+1} E_x^\delta \sum_{k=0}^{n} r(X_k, D_k) = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n+1} E_x^\delta \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{m} r_i(x_i^k, d_i^k),$$

де $X_k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_m^k)$ — стан системи у момент часу k, $D_k = (a_1^k, a_2^k, \ldots, a_m^k)$ — вибране керування у момент часу k.

Позначимо $\Xi_1(X)$ Банахів простір обмежених вимірних за Борелем функцій на X з нормою $v(x) = \sum_{i=1}^{m} \sup_{x_i \in X_i} |v_i(x_i)|$.

Скористаємося таким твердженням з [1].

Теорема 1. Нехай A — компактний простір і відображення $A: X \to \Im$ є напівнеперервним зверху, а також нехай існує $\mu_i(X_i) > 0$ на $(X, \aleph)$, $i = \overline{1, m}$:

$$\mu_i(X_i) \le Q_i(B_i / x_i, a_i), \; B_i \in \aleph, \; i = \overline{1, m}.$$

Нехай також виконано такі умови:

1) функції $r_i(x_i, a_i)$ є напівнепрервними знизу на (x_i, a_i);

2) перехідні ймовірності $Q_i(B_i / x_i, a_i)$ є слабко неперервними на (x_i, a_i).

Тоді у класі стаціонарних марковських детермінованих стратегій існує оптимальна стратегія з мінімальною вартістю

$$W = \int V(x)\mu(dx),$$

де

$$V = \inf_{a\in A} \left\{ r(x, a) + \int_X V(y) Q'(dy / x, a) \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \inf_{a_i \in A_i} \left\{ r_i(x_i, a_i) + \int_{X_i} V_i(y_i) [Q_i(dy_i / x_i, a_i) - \mu_i(dy_i) \prod_{j=1,\, j\ne i}^{m} \mu_j(x_j)] \right\}.$$

2. НАПІВМАРКОВСЬКІ КЕРОВАНІ СТОХАСТИЧНІ СИСТЕМИ

Розглянемо модель керування системою, у якої простір станів є Декартовим добутком m множин, тобто $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$. Простір прийняття рішень $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$. Позначимо x_i^k стан i-ї підсистеми після k-го переходу, a_i^k — прийняте рішення, τ_i^k — час перебування i-ї підсистеми у цьому стані, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Якщо у стані $x_i \in X_i$ прийнято рішення $a_i \in A_{x_i}$ і час, проведений у стані x_i, дорівнює t_i, то очікувані витрати i-ї підсистеми за час s_i $(s_i \le t_i)$ дорівнюють $r_i(s_i / x_i, a_i)$. Функції $r_i(s_i / x_i, a_i)$ вважаються вимірними за Борелем на $[0; +\infty) \times \Delta$.

Нехай очікувані витрати всієї системи за час s $r(s / x, a)$, де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, є сепарабельною функцією, тобто має вигляд $r(s / x, a) = \sum_{i=1}^{m} r_i(s_i / x_i, a_i)$.

Далі будемо вважати, що простори X_i, A_i і функції $r_i(s_i / x_i, a_i)$, $i = 1, \ldots, m$, задовольняють відповідні умови.

Для обраної стратегії розглянемо такий критерій оптимальності.

Середня очікувана вартість стратегії δ визначається величиною

$$\varphi(x, \delta) = \sum_{i=1}^{m} \limsup_{n \to \infty} \frac{E_x^{\delta} \sum_{k=0}^{n} r_i(\tau_i^k / x_i^k, a_i^k)}{E_x^{\delta} \sum_{k=0}^{n} \tau_i^k}.$$

Стратегія δ^* є оптимальною щодо цього критерію, якщо $\varphi(x, \delta^*) = \inf_{\delta \in R} \varphi(x, \delta)$, $x \in X$.

Позначимо

$$\tau_i(x_i, a_i) = \int_{X_i} \int_0^{\infty} t \, d\Phi_i(t / x_i, a_i, y) P(dy / x_i, a_i),$$

$$r_i(x_i, a_i) = \int_{X_i} \int_0^{\infty} r_i(t / x_i, a_i) \, d\Phi_i(t, a_i, y) P(dy / x_i, a_i),$$

$$\Phi_i(t / x_i, a_i, y) = \begin{cases} 1, & t \geq \tau_i(x_i, a_i), \\ 0, & t < \tau_i(x_i, a_i), \end{cases}$$

$$r_i(t / x_i, a_i) = \begin{cases} 0, & t < \tau_i(x_i, a_i), \\ r_i(x_i, a_i), & t \geq \tau_i(x_i, a_i), \end{cases}$$

$$r(x, a) = \sum_{i=1}^{m} r_i(x_i, a_i).$$

Нехай $\Xi_1(X)$ — Банахів простір обмежених вимірних за Борелем функцій на X з нормою $v(x) = \sum_{i=1}^{m} \sup_{x_i \in X_i} |v_i(x_i)|$.

У роботі [1] доведено таку теорему.

Теорема 2. Нехай A — компактний простір і відображення $F \colon X \to (2)_{\text{set}}^{A}$, $x \to A_x$, є напівнеперервним зверху. Крім того, нехай виконуються такі припущення.

1) $0 < l < \tau_i(x_i, a_i) \leq L < \infty$, $(x_i, a_i) \in \Delta_i$, $i = \overline{1, m}$;

2) для кожного $i = \overline{1, m}$, існує невід'ємна міра μ_i на $(X_i, \aleph_i)$, така, що виконуються нерівності:

а) $\mu_i(X_i) \leq Q_i(B_i / x_i, a_i)$, $B_i \in \aleph_i$, $i = \overline{1, m}$.

б) $\mu_i(X_i) > 0$.

Нехай також виконано такі умови:

1) функції $r_i(x_i, a_i)$ є напівнепрервними зверху на (x_i, a_i), а $\tau_i(x_i, a_i)$ є неперервними за x_i, a_i, $(x_i, a_i) \in \Delta_i$;

2) перехідні ймовірності $Q_i(B_i / x_i, a_i)$ є слабко неперервними за (x_i, a_i).

Тоді у класі стаціонарних марковських детермінованих стратегій $\Re_0$ існує оптимальна стратегія δ^* з мінімальною вартістю

$$W = \frac{1}{L} \int V(x) \mu(dx),$$

де

$$V=\inf_{a\in A}\left\{r(x,a)+\int_X V(y)Q'(dy/x,a)\right\}=\sum_{i=1}^{m}\inf_{a_i\in A_i}\left\{r_i(x_i,a_i)+\right.$$

$$\left.+\int_{X_i}V_i(y_i)\left[Q_i(dy_i/x_i,a_i)-\frac{1}{L}\mu_i(dy_i)\tau_i(x_i,a_i)\prod_{j=1,\,j\neq i}^{m}\mu_j(X_j)\right]\right\}.$$

3. БАГАТОНОМЕНКЛАТУРНІ МАРКОВСЬКІ МОДЕЛІ КЕРУВАННЯ ЗАПАСАМИ ІЗ ЗАГАЛЬНОЮ ФУНКЦІЄЮ ВИТРАТ

Розглянемо багатономенклатурну модель керування запасами системи, що враховує вартість запасу (яка може включати витрати виробництва), вартість зберігання та дефіцит для кожного *i*-го продукту. Витрати зберігання рівня запасу x_i *i*-го продукту в одиницю часу становлять $C_i^1(x_i)$, $C_i^1:[0,Q_i]\to R_+$, а вартість замовлення продукції в розмірі x_i для *i*-го товару — $C_i^2(x_i)$, $C_i^2:[0,Q_i]\to R_+$, витрати, зумовлені дефіцитом, становлять $C_i^3(x_i)$, якщо вимоги x_i не можуть бути виконані, $x\ge 0$, $G_i:R_+\to R_+$.

Припустимо, що

1) $C_i^1,\ C_i^2,\ C_i^3,\ i=\overline{1,m},$ — монотонні неспадні невід’ємні функції;

2) $C_i^3(x_i)$, $x_i\in[0,\infty)$, задовольняє умову $C_i^3(0)=0$, $i=\overline{1,m}$, $\int_0^\infty C_i^3(y)dG_i(y)<\infty$.

Як і раніше, для системи, що перебуває у стані *x* на початку періоду, у разі прийняття рішення $a\in A$ очікувані витрати за один період становлять $r(x,a)=\sum_{i=1}^{m}r_i(x_i,a_i)$, де $r_i(x_i,a_i)$ — очікувані витрати за *i*-м продуктом за один період часу, якщо стан цього продукту дорівнює x_i, і на початку періоду прийнято рішення d^{a_i}:

$$r_i(x_i,d^0)=C_i^1(x_i)+\int_{x_i}^{\infty}C_i^3(y-x_i)dG_i(y),\ i=\overline{1,m},$$

і для $a_i>0$

$$r_i(x_i,d^{a_i})=C_i^1(x_i+a_i)+C_i^2(a_i)+\int_{x_i+a_i}^{\infty}C_i^3(y-(x_i+a_i))dG_i(y),\ i=\overline{1,m}.$$

Ймовірності переходу на X_i для будь-якої борелівської підмножини $[0,Q_i]$ задають так:

$$P([y_i^1,y_i^2]/x_i,d^{a_i})=G_i(x_i+a_i-y_i^1)-G_i(x_i+a_i-y_i^2),$$

$$a_i\in[0,Q_i-x_i],\ 0\le y_i^1\le y_i^2\le x_i+a_i,$$

$$P(\{0\}/x_i,d^{a_i})=1-G_i(x_i+a_i-),\ x_i\in[0,Q_i].$$

Ймовірності переходу системи $P(B/x,d^a)=\prod_{i=1}^{m}P(B_i/x_i,d^{a_i})$, де B_i — борелівські підмножини $[0,Q_i]$. Мають місце такі твердження.

Теорема 3 [6]. Нехай функції C_i^1,C_i^2,C_i^3, $i=\overline{1,m}$, є напівнеперервними знизу.

Тоді для моделі керування у класі $\Re$ всіх допустимих стратегій існує φ-оптимальна стратегія з мінімальною вартістю $W=\int V(x)\mu(dx)$.

Тут $\mu(\cdot)=\mu_1(\cdot)\ldots\mu_m(\cdot)$, $\mu_i(\cdot)$ — міра, сконцентрована в точці 0, з вагою $\overline{G_i}=1-G(x)$, $i=\overline{1,m}$, $\overline{G}=\overline{G_1}\ldots\overline{G_m}$, а $V(x)$ задовольняє рівняння оптимальності

$$V(x)=LV(x)=\sum_{i=1}^{m}\min_{a\in A}\left\{\left[C_i^1(x_i)+\int_{x_i}^{\infty}C_i^3(y-x_i)dG_i(y)+C_i^1(x_i+a_i)+C_i^2(a_i)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{x_i+a_i}^{\infty}C_i^3(y-(x_i+a_i))\,dG_i(y)\right]+\int_{X_i}V_i(y_i)\left[P(dy_i/x_i,a_i)-\mu_i(dy_i)\prod_{j=1,\,j\neq i}^{m}\mu_j(x_j)\right]\right\}.$$

Наступний результат стосується структури оптимальної стратегії.

Теорема 4 [6]. Нехай виконуються умови теореми 3, а також такі умови:

1) $\forall x_i\in X_i$ $L_i(a_i,x_i)=C_i^1(x_i+a_i)+\int_{x_i+a_i}^{\infty}C_i^3(y-(x_i+a_i))\,dG_i(y)+C_i^2(a_i)$

монотонно спадають за $a_i\in(0,Q_i-x_i]$;

2) $\widetilde{L}_i(x_i)=C_i^1(x_i)+\int_{x_i}^{\infty}C_i^3(y-x_i)\,dG_i(y)-C_i^2(Q_i-x_i)$, $x_i\in[0,Q_i)$ монотонно

спадає за $x_i\in[0,Q_i)$.

Тоді φ-оптимальна стратегія $\delta^*\in\Re_1$ для задачі керування запасів має такий вигляд: існує поріг $x^*=(x_1^*,\ldots,x_m^*)\in[0,Q_1]\times\ldots\times[0,Q_m]$ такий, що $\delta^*=$ $=(\delta_1^*,\ldots,\delta_m^*)$ і для $i=\overline{1,m}$,

$$\delta_i^*=\begin{cases}d_{Q_i-x_i},\ x_i<x_i^*;\\ d_0,\ x_i\geq x_i^*.\end{cases}$$

Доведення теорем здійснено на основі результатів роботи [1] та наведено у [6].

4. БАГАТОНОМЕНКЛАТУРНІ МОДЕЛІ КЕРУВАННЯ ЗАПАСАМИ ДЛЯ МАРКОВСЬКИХ СИСТЕМ У ВИПАДКУ СПАДНИХ ФУНКЦІЙ ЗАГАЛЬНИХ ВИТРАТ

Розглянемо систему керування запасами m продуктів, кожен з яких можна неперервно поповнювати. Припустимо, що Q_i — максимальний рівень запасу i-го продукту, тоді запас i-го продукту набуває значень з множини $[0,Q_i]$. Стан запасів кожного продукту перевіряють у дискретні моменти часу N, після чого приймають відповідні рішення про поповнення складів у такий спосіб. Якщо рівень запасів i-го продукту в момент часу $n\in N$ становить $X_i^n=\{x_i\in[0,Q_i]\}$, то здійснюється замовлення цього продукту $D_i^n\in A_i^x$, $A_i^x:=[0,Q_i-x_i]$. Тоді простір станів системи, що описує розвиток системи в часі, позначимо $X=X_1\times X_2\times\ldots\times X_m$, $X_i=[0,Q_i]$, $X=(X^n:n\in N)$, а простір прийняття рішень позначимо $A=A_1^x\times A_2^x\times\ldots\times A_m^x$.

Будемо вважати, що вартість замовлення (яка може включати витрати виробництва) складається з фіксованої вартості та лінійної функції відносно обсягу замовлення. Так, замовлення $x_i>0$ товарів призводить до очікуваних витрат за цим замовленням $C_i^2(x_i)=A_i+c_i\cdot x_i$, $C_i^2(0)=0$, $A_i\geq 0$, $c_i\geq 0$.

Далі припустимо, що загальні витрати збереження і дефіциту за один період часу $f_i(x_i,d^{a_i})$ залежать від рівня запасів $x_i\geq 0$ і замовлення

$a_i \in [0,\ Q_i - x_i]$ на початку періоду, де $f_i(\cdot,\ \cdot)$ є напівнеперервними знизу за сукупністю змінних.

Розглянемо систему із середніми витратами (φ-критерієм). Для системи, що перебуває у стані x на початку періоду, у випадку прийняття рішення $a_i \in A$ очікувані витрати за один період становлять $r(x,a) = \sum_{i=1}^{m} r_i(x_i, a_i)$, де $r_i(x_i, a_i)$ — очікувані витрати за i-м продуктом за один період часу, якщо стан цього продукту дорівнює x_i і на початку періоду прийнято рішення d^{a_i}:

$$r_i(x_i, d^0) = f_i(x_i, d^0),\ i = \overline{1, m},$$

і для $a_i > 0$

$$r_i(x_i, d^{a_i}) = f_i(x_i + a_i, d^{a_i}) + C_i^2(a_i),\ i = \overline{1, m}.$$

Ймовірності переходу на X_i для будь-якої борелівської підмножини $[0, Q_i]$ визначають у такий спосіб:

$$P([y_i^1, y_i^2]/x_i, d^{a_i}) = G_i(x_i + a_i - y_i^1) - G_i(x_i + a_i - y_i^2),$$

$$a_i \in [0, Q_i - x_i],\ 0 \le y_i^1 \le y_i^2 \le x_i + a_i,$$

$$P(\{0\}/x_i, d^{a_i}) = 1 - G_i(x_i + a_i -),\ x_i \in [0, Q_i].$$

Будемо вважати, що $G(Q) = G_1(Q_1) \times \ldots \times G_m(Q_m)$, $G(Q) < 1$.

Наступна теорема дає змогу визначити структуру оптимальної стратегії для багатономенклатурної системи запасів.

Теорема 5. Нехай функція $c_i \cdot x_i + f_i(x_i, d^{a_i})$ монотонно спадає за $x_i \in [0, Q_i]$ і $a_i \in (0;\ Q_i - x_i]$. Крім того, нехай функція $\tau_i(x_i, d^{a_i})$ монотонно зростає за $x_i \in [0, Q_i]$ і $a_i \in (0;\ Q_i - x_i]$. Тоді φ-оптимальна стратегія $\delta^* \in \Re_1$ для задачі керування запасів має такий вигляд:
існує поріг $x^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*) \in [0, Q_1] \times \ldots \times [0, Q_m]$ такий, що $\delta^* = (\delta_1^*, \ldots, \delta_m^*)$ та для $i = \overline{1, m}$, $\delta_i^* = \begin{cases} d_{Q_i - x_i},\ x_i < x_i^*; \\ d_0,\ x_i \ge x_i^* \end{cases}$.

Доведення теореми здійснено на основі умови сепарабельності загальної функції витрат та результатів робіт [1, 5].

5. БАГАТОНОМЕНКЛАТУРНА НАПІВМАРКОВСЬКА МОДЕЛЬ ТЕОРІЇ ЗАПАСІВ

Розглянемо систему керування запасами m продуктів, кожний із яких можна неперервно поповнювати. Припустимо, що Q_i — це максимальний рівень запасу i-го продукту, тоді запас i-го продукту набуває значень на $[0, Q_i]$.

У дискретні моменти часу N перевіряють стан запасів кожного продукту і приймають відповідні рішення щодо поповнення складів у такий спосіб.

Якщо рівень запасів i-го продукту в момент часу $n \in N$ становить $X_i^n = \{x_i \in [0, Q_i]\}$, то здійснюють замовлення цього продукту $D_i^n \in A_i^x$, $A_i^x := [0, Q_i - x_i]$.

Простір станів системи, що описує розвиток системи у часі, позначимо $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$, $X_i = [0, Q_i]$, $X = (X^n : n \in \mathrm{N})$. Простір прийняття рішень позначимо $A = A_1^x \times A_2^x \times \ldots \times A_m^x$. Припустимо, що вартість замовлення (яка може включати витрати виробництва) складається з фіксованої вартості та лінійної функції. Тоді замовлення $x_i > 0$ товарів призводить до очікуваних витрат замовлення $C_i^2(x_i) = A_i + c_i \cdot x_i$, $C_i^2(0) = 0$, $A_i \ge 0$, $c_i \ge 0$.

Далі припустимо, що загальні витрати збереження і дефіциту за період часу $f_i(x_i, d^{a_i})$ залежать від рівня запасів $x_i \ge 0$ і замовлення $a_i \in [0, Q_i - x_i]$ на початку періоду, де $f_i(\cdot, \cdot)$ є напівнеперервними знизу за сукупністю змінних.

Розглянемо систему із середніми витратами (φ-критерієм). Для системи, що перебуває у стані x на початку періоду, у разі прийняття рішення $a \in A$ очікувані витрати за один період становлять $r(x, a) = \sum_{i=1}^{m} r_i(x_i, a_i)$, де $r_i(x_i, a_i)$ — очікувані витрати за i-м продуктом за один період часу, якщо стан цього продукту дорівнює x_i, і на початку періоду прийнято рішення d^{a_i}:

$$r_i(x_i, d^0) = f_i(x_i, d^0), \ i = \overline{1, m},$$

і для $a_i > 0$

$$r_i(x_i, d^{a_i}) = f_i(x_i + a_i, d^{a_i}) + C_i^2(a_i), \ i = \overline{1, m}.$$

Ймовірності переходу на X_i для будь-якої борелівської підмножини $[0, Q_i]$ задають у такий спосіб:

$$P([y_i^1, y_i^2] / x_i, d^{a_i}) = G_i(x_i + a_i - y_i^1) - G_i(x_i + a_i - y_i^2),$$

$$a_i \in [0, Q_i - x_i], \ 0 \le y_i^1 \le y_i^2 \le x_i + a_i,$$

$$P(\{0\} / x_i, d^{a_i}) = 1 - G_i(x_i + a_i -), \ x_i \in [0, Q_i].$$

Ймовірності переходу системи $P(B / x, d^a) = \prod_{i=1}^{m} P(B_i / x_i, d^{a_i})$, де B_i — борелівські підмножини $[0, Q_i]$.

Будемо вважати $G(Q) < 1$. Теорема, розглянута далі [7], дає можливість показати існування оптимальної стратегії керування запасами декількох продуктів.

Теорема 6. Нехай виконуються умови теореми 2. Для напівмарковської моделі керування, що розглядається, у класі $\Re_1$ існує φ-оптимальна стратегія з мінімальною вартістю $W = \frac{1}{L} \int V(x) \mu(dx)$. Тут $\mu(\cdot) = \mu_1(\cdot) \ldots \mu_m(\cdot)$, $\mu_i(\cdot)$ — міра, сконцентрована в точці 0 із вагою $\overline{G_i} = 1 - G(x)$, $i = \overline{1, m}$, $\overline{G} = \overline{G_1} \ldots \overline{G_m}$, а $V(x)$ задовольняє рівняння оптимальності

$$V(x) = LV(x) = \sum_{i=1}^{m} \min_{a \in A} \left\{ f_i(x_i + a_i, d_{a_i}) + C_i^2(a_i) \cdot 1_{a_i > 0} + \right.$$
$$\left. + \int_{X_i} V_i(y_i) \left[P(dy_i / x_i, a_i) - \frac{1}{L} \mu_i(dy_i) \tau_i(x_i, a_i) \prod_{j=1, j \ne i}^{m} \mu_j(x_j) \right] \right\}.$$

Наступна теорема [7] дає змогу визначити структуру оптимальної стратегії для багатономенклатурної системи запасів.

Теорема 7. Нехай виконано умови попередньої теореми та умова $c_i \cdot x_i + f_i(x_i)$, $x_i \in [0, Q_i]$, $i = \overline{1, m}$, монотонно спадає.

Тоді φ-оптимальна стратегія $\delta^* \in \Re_1$ для задачі керування запасів має такий вигляд:

існує поріг $x^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*) \in [0, Q_1] \times \ldots \times [0, Q_m]$ такий, що $\delta^* = (\delta_1^*, \ldots, \delta_m^*)$, і для $i = \overline{1, m}$, $\delta_i^* = \begin{cases} d_{Q_i - x_i}, & x_i < x_i^*; \\ d_0, & x_i \geq x_i^*. \end{cases}$

ВИСНОВКИ

Отже, для розглянутих моделей керування запасами знайдено умови, за яких задача знаходження оптимальної стратегії керування запасами зводиться до деякої задачі стохастичної оптимізації.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дадуна Г., Кнопов П.С., Тур Л.П. Оптимальные стратегии для системы запасов с функциями стоимости общего вида. *Кибернетика и системный анализ.* 1999. Т. 35, № 4. С. 106–123.
2. Demchenko S.S., Knopov. P.S., Chorney R.K. Optimal strategies for a semi-Markovian inventory system. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2002. Vol. 38, N 1. P. 124–136. https://doi.org/10.1023/A:1015556518666.
3. Demchenko S.S., Knopov A.P., Pepelyaev V.A. Optimal strategies for inventory control systems with a convex cost functions. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2000. Vol. 36, N 6. P. 891–897. https://doi.org/10.1023/A:1009413511883.
4. Knopov A.P., Pepelyaev V.A. Some continuous models of inventory control. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2005. Vol. 41, N 3. P. 465–467. https://doi.org/10.1007/s10559-005-0080-1.
5. Chornei R.K., Daduna H., Knopov P. Control of spatially structured random processes and random fields with applications. *Nonconvex Optimization and Its Applications.* Vol 86. Springer, 2006, 276 p.
6. Пепеляева Т.В., Вовк Л.Б., Демченко И.Ю. Об одной задаче многономенклатурной модели теории запасов. *Управляющие системы и машины.* 2015. № 2. С. 32–38.
7. Knopov P.S., Pepelyaeva T.V., Demchenko I.Y. A semi-Markov inventory control model. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2016. Vol. 52, N 5. С. 730–736. https://doi.org/10.1007/s10559-016-9874-6.

P.S. Knopov, T.V. Pepelyaeva

SOME MULTI-DIMENTIONAL STOCHASTIC CONTROL MODELS IN INVENTORY CONTROL WITH SEPARABLE COST FUNCTION

Abstract. Multi-task models of the inventory theory are investigated with the use of the facts of the theory of multi-component controlled random processes. Markov and semi-Markov controlled stochastic systems are considered. The structure of optimal strategy for multi-task inventory system is determined.

Keywords: Markov processes, inventory control, (s, S)-strategy, optimality criterion, optimal strategy.

Надійшла до редакції 31.03.2022