УДК 517.988

В.В. СЕМЕНОВ
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *semenov.volodya@gmail.com.*

С.В. ДЕНИСОВ
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *sireukr@gmail.com.*

Г.В. САНДРАКОВ
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *gsandrako@gmail.com.*

О.С. ХАРЬКОВ
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *olehharek@gmail.com.*

ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ ОПЕРАТОРНОЇ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ ДЛЯ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ В БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ[1]

Анотація. Досліджено нові ітераційні алгоритми для розв'язання варіаційних нерівностей в рівномірно опуклих Банахових просторах. Перший алгоритм — модифікація методу «forward-reflected-backward algorithm», що використовує узагальнену проєкцію Альбера замість метричної. Другий алгоритм є адаптивним варіантом першого, де використовується монотонне правило поновлення величини кроку, що не вимагає знання Ліпшицевих констант та лінійного пошуку. Для варіаційних нерівностей з монотонними, Ліпшицевими операторами, що діють у 2-рівномірно опуклому та рівномірно гладкому Банаховому просторі, доведено теореми про слабку збіжність методів. Також для першого алгоритму доведено оцінку ефективності в термінах функції зазору.

Ключові слова: варіаційна нерівність, монотонний оператор, узагальнена проєкція Альбера, 2-рівномірно опуклий Банахів простір, рівномірно гладкий Банахів простір, метод операторної екстраполяції, слабка збіжність, функція зазору.

ВСТУП

Використовуючи варіаційні нерівності та операторні включення, можна отримати простий та уніфікований засіб формулювання багатьох актуальних задач оптимального керування, математичної фізики та дослідження операцій [1–6]. Створення та вивчення алгоритмів розв'язання варіаційних нерівностей та близьких задач (рівноважне програмування) є напрямком прикладної математики, що активно розвивається [7–36]. А з початком використання генерувальних змагальних нейронних мереж та інших моделей змагального або робастного навчання стійкий інтерес до алгоритмів розв'язання варіаційних нерівностей виник і серед спеціалістів у галузі машинного навчання [8]. Окремі задачі опуклої недиференційовної оптимізації можна ефективно розв'язувати, якщо їх переформулювати у вигляді сідлових (мінімаксних) задач і застосувати алгоритми розв'язання варіаційних нерівностей [9]. Крім того, нещодавно був запропонований такий варіант побудови швидких та адаптивних алгоритмів для задач опуклого програмування, а саме використавши двоїстість, перейти до еквівалентної опукло-ввігнутої сідлової задачі (гра Фенхеля) та застосувати алгоритми розв'язання варіаційних нерівностей [10].

Найпростішим методом розв'язання варіаційних нерівностей є аналог методу проєкції градієнта, що у випадку сідлової задачі відомий як метод Ерроу–Гурвіця або

[1] Робота виконана за фінансової підтримки НАН України (проєкт «Нові методи дослідження коректності та розв'язання задач дискретної оптимізації, варіаційних нерівностей та їхнього застосування», ДР 0119U101608) та МОН України (проєкт «Обчислювальні алгоритми і оптимізація для штучного інтелекту, медицини та оборони», ДР 0122U002026).

метод градієнтного спуску–підйому [7]. Але цей метод може не збігатися для нерівностей з монотонним оператором. Найвідомішою модифікацією методу проєкції градієнта для варіаційних нерівностей є екстраградієнтний метод Корпелевич [11], ітерація якого вимагає двох обчислень значення оператора задачі та двох метричнх проєктувань на допустиму множину. Дослідження цього алгоритму описано в [9, 12–18]. «Обчислювально дешеві» варіанти екстраградієнтного алгоритму з одним метричним проєктуванням на допустиму множину запропоновано в [12–14]. Варіанти, у тому числі адаптивні, екстраградієнтного методу Корпелевич з проєктуванням, що розуміється у сенсі дивергенції Брегмана, досліджено в [9, 16–18].

У [19] Попов запропонував відмінну від алгоритму Корпелевич модифікацію методу градієнтного спуску–підйому для пошуку сідлових точок опукло-ввігнутих функцій. Ітерація цього алгоритму дешевша за ітерацію екстраградієнтного алгоритму за кількістю обчислень значень оператора: одне проти двох. Алгоритм Попова для варіаційних нерівностей став відомим серед спеціалістів з машинного навчання під назвою «Extrapolation from the Past» [8]. Принципові результати, отримані за використання цього алгоритму, наведено в [20–26]. Зокрема, його адаптивні модифікації запропоновано в [25, 26].

Подальший розвиток цих ідей та спроби зменшити складність виконання ітерації зі збереженням характера збіжності спричинили появу нового «forward-reflected-backward algorithm» для розв’язання операторних включень з сумою максимального монотонного та Ліпшицевого монотонного операторів [27]. Аналогічну схему, що відома під назвою «optimistic gradient descent ascent», запропонували автори [8].

У цій роботі розглядаються варіаційні нерівності у Банахових просторах, що виникають та інтенсивно вивчаються в математичній фізиці та теорії обернених задач [2, 3, 28]. Останнім часом отримано багато ефективних результатів для алгоритмів розв’язання варіаційних задач у Банахових просторах [28–36]. Здебільшого це можна пояснити залученням сучасних результатів та конструкцій геометрії Банахових просторів [28, 29, 37–39]. Потрібну інформацію на цю тему в зручному для застосування вигляді наведено в [28]. Аналоги алгоритмів Корпелевич, Tseng’а та Попова для задач у рівномірно опуклих Банахових просторах вивчались у [33–35]. У [36] запропоновано адаптивний варіант «forward-reflected-backward algorithm» для варіаційних нерівностей у 2-рівномірно опуклому та рівномірно гладкому Банаховому просторі. Збіжність цього алгоритму за допомогою ляпуновського аналізу доводиться далі.

Ця стаття є продовженням циклу робіт [18, 25, 35, 36]. Запропоновано та досліджено нові ітераційні алгоритми для розв’язання варіаційних нерівностей з монотонними, Ліпшицевими операторами, що діють у 2-рівномірно опуклих та рівномірно гладких Банахових просторах. Перший алгоритм — модифікація методу «forward-reflected-backward algorithm» [27], що використовує узагальнену проєкцію Альбера замість метричної. Основні результати: отримано оцінку ефективності в термінах функції зазору та доведено теорему про слабку збіжність методу. Також встановлено слабку збіжність адаптивного варіанту методу, де використовується правило поновлення величини кроку, що не вимагає знання Ліпшицевих констант та лінійного пошуку.

ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Сформулюємо постановку задачі та неведемо декілька понять та фактів геометрії Банахових просторів, що необхідні для формулювання та доведення результатів [28, 29, 37–39].

Нехай E — дійсний Банахів простір з нормою $\|\cdot\|$, E^* — спряжений до простору E простір з нормою $\|\cdot\|_*$. Модуль опуклості простору E визначається так:

$$\delta_E(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|: \|x\| = \|y\| = 1,\ \|x-y\| = \varepsilon\right\}\ \forall \varepsilon \in (0,2].$$

Банахів простір E називають рівномірно опуклим, якщо $\delta_E(\varepsilon) > 0$ для всіх $\varepsilon \in (0,2]$. Банахів простір E називають 2-рівномірно опуклим, якщо існує таке $c > 0$, що $\delta_E(\varepsilon) \geq c\varepsilon^2$ для всіх $\varepsilon \in (0,2]$ [37]. Зрозуміло, що 2-рівномірно опуклий простір є рівномірно опуклим. Відомо, що рівномірно опуклий Банахів простір рефлексивний [37]. Банахів простір E називають гладким, якщо границя

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

існує для всіх $x, y \in S_E = \{z \in E: \|z\| = 1\}$. Банахів простір E називають рівномірно гладким, якщо ця границя існує рівномірно за $x, y \in S_E$. Відомо, що Гільбертові простори та простори L_p $(1 < p \leq 2)$ є 2-рівномірно опуклими та рівномірно гладкими (простори L_p рівномірно гладкі для $p \in (1, \infty)$) [37].

Основну інформацію про монотонні оператори та варіаційні нерівності в Банахових просторах наведено в [2, 3, 28]. Розглянемо лише два мотиваційних приклади монотонних операторів, що діють у Банахових просторах [28].

Для $p \geq 2$ визначимо оператор A за допомогою формули

$$Au = |u(x)|^{p-2} u(x) \int_{R^3} \frac{|u(y)|^p}{\|x-y\|_2}\, dy.$$

Оператор A потенційний, монотонний та діє $L_p(R^3)$ з $L_q(R^3)$, де $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Зауважимо, що оператор A є градієнтом опуклого функціонала

$$F(u) = \frac{1}{2p} \int_{R^3}\int_{R^3} \frac{|u(x)|^p |u(y)|^p}{\|x-y\|_2}\, dx\, dy.$$

Нехай $G \subseteq R^n$ — обмежена область. Диференціальний вираз

$$Au = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i\left(x, \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-1}\right)\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + a_0(x, |u|^{p-1})|u|^{p-1}u,\ \ p > 1,$$

де функції $a_i(x,s)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, вимірні за x для всіх $s \in [0, +\infty)$ та неперервні за s для майже всіх $x \in G$, $|a_i(x,s)| \leq M$ для всіх $s \in [0, +\infty)$ та майже всіх $x \in G$, задає монотонний оператор, що діє з простору Соболєва $W_{0,p}^1(G)$ в $(W_{0,p}^1(G))^*$.

Розглянемо варіаційну нерівність:

$$\text{знайти } x \in C: \ \langle Ax, y - x \rangle \geq 0 \ \ \forall y \in C, \tag{1}$$

де C — непорожня підмножина 2-рівномірно опуклого та рівномірно гладкого Банахового простору E, A — оператор, що діє з E в E^*. Множину розв'язків (1) позначимо S.

Припустимо, що виконані такі умови:
- множина $C \subseteq E$ опукла та замкнена;

• оператор $A: E \to E^*$ монотонний на C, тобто

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in C,$$

та Ліпшицев на C (з константою $L > 0$), тобто

$$\| Ax - Ay \|_* \leq L \| x - y \| \quad \forall x, y \in C;$$

• множина S непорожня.

Розглянемо дуальну варіаційну нерівність:

$$\text{знайти } x \in C: \ \langle Ay, x - y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C. \tag{2}$$

Множину розв’язків задачі (1) позначимо S^d. Зауважимо, що множина S^d опукла та замкнена [2, 3, 28]. Нерівність (2) називають слабким або дуальним формулюванням (2) (або нерівністю типу Мінті), а розв’язки нерівності (2) — слабкими розв’язками (1). Для монотонних операторів A завжди маємо $S \subseteq S^d$. У наведених умовах маємо $S^d = S$ [3].

Багатозначний оператор $J: E \to 2^{E^*}$, що діє за правилом

$$Jx = \left\{ x^* \in E^* : \langle x^*, x \rangle = \| x \|^2 = \| x^* \|_*^2 \right\},$$

називають нормалізованим дуальним відображенням [37]. Відомо [28, 37], що в ситуації, яка розглядається, відображення J однозначне, бієктивне, строго монотонне та рівномірно неперервне на обмежених підмножинах E.

Нехай E — гладкий Банахів простір. Розглянемо введений Я. Альбером [28, 29] функціонал

$$\phi(x, y) = \| x \|^2 - 2\langle Jy, x \rangle + \| y \|^2 \quad \forall x, y \in E.$$

З означення ϕ випливає корисна 3-точкова тотожність

$$\phi(x, y) - \phi(x, z) - \phi(z, y) = 2\langle Jz - Jy, x - z \rangle \quad \forall x, y, z \in E.$$

Якщо простір E строго опуклий, то для $x, y \in E$ маємо $\phi(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Нехай E — рівномірно опуклий та рівномірно гладкий Банахів простір, (x_n), (y_n) — обмежені послідовності елементів E. Тоді має місце [29]

$$\| x_n - y_n \| \to 0 \ \Leftrightarrow \ \| Jx_n - Jy_n \|_* \to 0 \Leftrightarrow \ \phi(x_n, y_n) \to 0. \tag{3}$$

Якщо Банахів простір E 2-рівномірно опуклий та гладкий, то для деякого $\mu \geq 1$ виконується нерівність [38]

$$\phi(x, y) \geq \frac{1}{\mu} \| x - y \|^2 \quad \forall x, y \in E. \tag{4}$$

Для Банахових просторів ℓ_p, L_p та W_p^m $(1 < p \leq 2)$ маємо $\mu = \frac{1}{p-1}$ [39]. Для Гільбертового простору нерівність (4) перетворюється на тотожність з $\mu = 1$.

Використавши функціонал ϕ, можна визначити новий оператор проєктування. Нехай K — непорожня замкнена та опукла підмножина рефлексивного, строго опуклого та гладкого простору E. Відомо [28, 29], що для кожного $x \in E$ існує єдиний елемент $z \in K$ такий, що $\phi(z, x) = \inf_{y \in K} \phi(y, x)$. Цей елемент z позначають $\Pi_K x$, а відповідний оператор $\Pi_K : E \to K$ називають узагальненою проєкцією E на K (узагальненою проєкцією Альбера) [28, 29]. Якщо E — Гільбертів простір, то Π_K збігається з метричною проєкцією на множину K. Узагальнена проєкція Альбера характеризується так [29]:

$$z = \Pi_K x \quad \Leftrightarrow \quad z \in K \quad \text{та} \quad \langle Jz - Jx, y - z \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

Остання нерівність рівносильна такій [29]:

$$\phi(y, \Pi_K x) + \phi(\Pi_K x, x) \le \phi(y, x) \quad \forall y \in K.$$

Варіаційну нерівність (1) можна сформулювати як задачу пошуку нерухомої точки [29]:

$$x = \Pi_C J^{-1}(Jx - \lambda Ax), \tag{5}$$

де $\lambda > 0$. Формулювання (5) корисне, оскільки веде до ітераційної схеми

$$x_{n+1} = \Pi_C J^{-1}(Jx_n - \lambda Ax_n), \tag{6}$$

яка вивчалась у [30] для обернено сильно монотонних операторів $A: E \to E^*$. Але для Ліпшицевих монотонних операторів схема (6) у загальному випадку не збігається.

Основним елементом розглянутих далі алгоритмів є обчислення за заданими точками $x \in E$ та $x^* \in E^*$ нової точки $x^+ = \Pi_K J^{-1}(Jx - x^*)$. З критерію проєкції Альбера та 3-точкової тотожності випливає фундаментальна для аналізу алгоритмів нерівність

$$\phi(y, x^+) \le \phi(y, x) - \phi(x^+, x) + 2\left\langle x^*, y - x^+ \right\rangle \quad \forall y \in K.$$

Однією з основних теоретичних задач є оцінка числа ітерацій алгоритму, що необхідне для отримання наближеного розв'язку заданої якості. Будемо оцінювати якість наближеного розв'язку $x \in C$ варіаційної нерівності (1) за допогою невід'ємної функції зазору (gap function) [8]

$$\operatorname{gap}(x) = \sup_{y \in C} \langle Ay, x - y \rangle. \tag{7}$$

Очевидно, що для коректності означення функції зазору (7) необхідна обмеженість допустимої множини C. Якщо оператор A є монотонним та $x \in C$ — розв'язок (1), то $\operatorname{gap}(x) = 0$. Навпаки, якщо для $x \in C$ маємо $\operatorname{gap}(x) = 0$, то x — розв'язок нерівності (1).

Розглянемо алгоритми.

АЛГОРИТМ ОПЕРАТОРНОЇ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ

Для розв'язання варіаційної нерівності (1) пропонуємо такий алгоритм.

Алгоритм 1. Операторна екстраполяція.

Обираємо $x_0 = y_1 \in E$, $\lambda_n > 0$. Покладаємо $n = 1$.

1. Обчислити

$$m_n = \lambda_{n-1}(Ax_n - Ax_{n-1}),$$

$$x_{n+1} = \Pi_C J^{-1}(Jx_n - \lambda_n Ax_n - m_n).$$

2. Якщо $x_{n+1} = x_n = x_{n-1}$, то СТОП, інакше покласти $n := n + 1$ та перейти до п.1.

Алгоритм 1 є модифікацією «forward-reflected-backward algorithm» [27] для задач у Банахових просторах, що використовує узагальнену проєкцію Альбера [29] замість метричної. Збіжність «forward-reflected-backward algorithm» у Гільбертовому просторі доведена в [27]. За об'ємом необхідних для здійснення ітераційного кроку обчислень цей алгоритм має перевагу над екстраградієнтним методом та методом екстраполяції з минулого (методом Попова).

Правило зупинки обґрунтовується тотожністю (5), що рівносильна варіаційній нерівності (1). Дійсно, у результаті виконання $x_{n+1} = x_n = x_{n-1}$ маємо $x_n = \Pi_C J^{-1}(Jx_n - \lambda_n Ax_n)$, звідки $y_n \in S$.

У випадку обмеженості допустимої множини C доведемо, що алгоритму 1 необхідно зробити $O\left(\frac{LD}{\varepsilon}\right)$ ітерацій для отримання точки $x \in C$ з $\operatorname{gap}(x) \le \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, де $D = \sup_{a,b\in C} \phi(a,b) < +\infty$.

Теорема 1. Нехай (x_n) — послідовність, що породжена алгоритмом 1. Припустимо, що $\lambda_n \in \left(0, \frac{1}{2\mu L}\right]$. Тоді для послідовності чезарівських середніх $z_{N+1} = \frac{\sum_{n=1}^N \lambda_n x_{n+1}}{\sum_{n=1}^N \lambda_n}$ має місце нерівність

$$\operatorname{gap}(z_{N+1}) \le \frac{1}{2\sum_{n=1}^N \lambda_n} \sup_{y\in C} \phi(y, x_1).$$

Доведення. Для послідовності (x_n) має місце нерівність

$$-2\langle \lambda_n Ax_n + m_n, y - x_{n+1}\rangle \le \phi(y, x_n) - \phi(x_{n+1}, x_n) - \phi(y, x_{n+1}) \quad \forall y \in C. \tag{8}$$

Запишемо (8) так:

$$\phi(y, x_n) - \phi(y, x_{n+1}) \ge 2\lambda_n \langle Ax_{n+1}, x_{n+1} - y\rangle - 2\lambda_n \langle Ax_{n+1} - Ax_n, x_{n+1} - y\rangle +$$
$$+ 2\lambda_{n-1}\langle Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - y\rangle + 2\lambda_{n-1}\langle Ax_n - Ax_{n-1}, x_{n+1} - x_n\rangle + \phi(x_{n+1}, x_n). \tag{9}$$

Сумуючи (9) по n від 1 до N, отримуємо

$$\phi(y, x_1) - \phi(y, x_{N+1}) \ge 2\sum_{n=1}^N \lambda_n \langle Ax_{n+1}, x_{n+1} - y\rangle -$$
$$-2\lambda_N \langle Ax_{N+1} - Ax_N, x_{N+1} - y\rangle + \sum_{n=1}^N (2\lambda_{n-1}\langle Ax_n - Ax_{n-1}, x_{n+1} - x_n\rangle + \phi(x_{n+1}, x_n)). \tag{10}$$

Ліпшицевість оператора A та нерівність (4) дає

$$\sum_{n=1}^N (2\lambda_{n-1}\langle Ax_n - Ax_{n-1}, x_{n+1} - x_n\rangle + \phi(x_{n+1}, x_n)) \ge$$
$$\ge \sum_{n=1}^N \left(-2\lambda_{n-1} L \|x_n - x_{n-1}\| \|x_{n+1} - x_n\| + \frac{1}{\mu}\|x_{n+1} - x_n\|^2\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^N \left(-2\lambda_{n-1} L \|x_n - x_{n-1}\| \|x_{n+1} - x_n\| + \frac{1}{2\mu}\|x_{n+1} - x_n\|^2 + \frac{1}{2\mu}\|x_n - x_{n-1}\|^2\right) +$$
$$+ \frac{1}{2\mu}\|x_{N+1} - x_N\|^2 \ge \frac{1}{2\mu}\|x_{N+1} - x_N\|^2.$$

Використовуючи останню оцінку в (10), отримуємо

$$\phi(y, x_1) - \phi(y, x_{N+1}) \ge 2\sum_{n=1}^N \lambda_n \langle Ax_{n+1}, x_{n+1} - y\rangle -$$
$$-2\lambda_N \langle Ax_{N+1} - Ax_N, x_{N+1} - y\rangle + \frac{1}{2\mu}\|x_{N+1} - x_N\|^2 \ge 2\sum_{n=1}^N \lambda_n \langle Ax_{n+1}, x_{n+1} - y\rangle -$$
$$-2\lambda_N L \|x_{N+1} - x_N\| \|x_{N+1} - y\| + \frac{1}{2\mu}\|x_{N+1} - x_N\|^2 \ge$$
$$\ge 2\sum_{n=1}^N \lambda_n \langle Ax_{n+1}, x_{n+1} - y\rangle - \lambda_N L \|x_{N+1} - y\|^2.$$

Отримуємо нерівність

$$2\sum_{n=1}^{N}\lambda_n\left\langle Ax_{n+1},x_{n+1}-y\right\rangle-\lambda_N L\left\|x_{N+1}-y\right\|^2+\phi(y,x_{N+1})\le\phi(y,x_1)\ \forall y\in C. \quad (11)$$

Використовуючи монотонність оператора A, отримуємо

$$\sum_{n=1}^{N}\lambda_n\left\langle Ax_{n+1},x_{n+1}-y\right\rangle\ge\sum_{n=1}^{N}\lambda_n\left\langle Ay,x_{n+1}-y\right\rangle=\left(\sum_{n=1}^{N}\lambda_n\right)\left\langle Ay,z_{N+1}-y\right\rangle, \quad (12)$$

де $z_{N+1}=\frac{\sum_{n=1}^{N}\lambda_n x_{n+1}}{\sum_{n=1}^{N}\lambda_n}$. Враховуючи оцінку (12) в (11), отримуємо нерівність

$$2\left(\sum_{n=1}^{N}\lambda_n\right)\left\langle Ay,z_{N+1}-y\right\rangle+\left(\frac{1}{\mu}-\lambda_N L\right)\left\|x_{N+1}-y\right\|^2\le\phi(y,x_1)\quad\forall y\in C,$$

звідки випливає

$$\operatorname{gap}(z_{N+1})=\sup_{y\in C}\left\langle Ay,z_{N+1}-y\right\rangle\le\frac{1}{2\sum_{n=1}^{N}\lambda_n}\sup_{y\in C}\phi(y,x_1),$$

що і потрібно було довести.■

Наслідок 1. Нехай (x_n) — послідовність, що породжена алгоритмом 1 з $\lambda_n=\frac{1}{2\mu L}$. Тоді для послідовності середніх $z_{N+1}=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_{n+1}$ має місце оцінка

$$\operatorname{gap}(z_{N+1})\le\frac{L\mu}{N}\sup_{y\in C}\phi(y,x_1).$$

Для алгоритму екстраполяції з минулого аналогічний результат отримано в [35].

Доведемо слабку збіжність алгоритму 1. Як функцію Ляпунова оберемо

$$V_n=\phi(z,x_n)+2\left\langle m_n,x_n-z\right\rangle+\mu\lambda_{n-1}L\phi(x_n,x_{n-1}),$$

де $z\in S$.

Лема 1. Для послідовності (x_n), що породжена алгоритмом 1, виконується нерівність

$$\begin{aligned}&\phi(z,x_{n+1})+2\lambda_n\left\langle Ax_n-Ax_{n+1},x_{n+1}-z\right\rangle+\mu\lambda_n L\phi(x_{n+1},x_n)\le\\&\le\phi(z,x_n)+2\lambda_{n-1}\left\langle Ax_{n-1}-Ax_n,x_n-z\right\rangle+\mu\lambda_{n-1}L\phi(x_n,x_{n-1})-\\&-(1-\mu\lambda_{n-1}L-\mu\lambda_n L)\phi(x_{n+1},x_n),\end{aligned}\quad (13)$$

де $z\in S$.

Доведення. Нехай $z\in S$. Маємо

$$\phi(z,x_{n+1})\le\phi(z,x_n)-\phi(x_{n+1},x_n)+2\left\langle\lambda_n Ax_n+m_n,z-x_{n+1}\right\rangle. \quad (14)$$

Монотонність оператора A дає

$$\begin{aligned}&\left\langle\lambda_n Ax_n+m_n,z-x_{n+1}\right\rangle=\left\langle\lambda_n Ax_n+\lambda_{n-1}(Ax_n-Ax_{n-1}),z-x_{n+1}\right\rangle=\\&=\lambda_n\left\langle Ax_n-Ax_{n+1},z-x_{n+1}\right\rangle+\lambda_{n-1}\left\langle Ax_n-Ax_{n-1},z-x_{n+1}\right\rangle+\underbrace{\lambda_n\left\langle Ax_{n+1},z-x_{n+1}\right\rangle}_{\le 0}\le\\&\le\lambda_n\left\langle Ax_n-Ax_{n+1},z-x_{n+1}\right\rangle+\lambda_{n-1}\left\langle Ax_n-Ax_{n-1},z-x_n\right\rangle+\\&+\lambda_{n-1}\left\langle Ax_n-Ax_{n-1},x_n-x_{n+1}\right\rangle.\end{aligned}\quad (15)$$

Використавши (15) в (14), отримаємо

$$\phi(z,x_{n+1})\le\phi(z,x_n)-\phi(x_{n+1},x_n)+2\lambda_n\langle Ax_n-Ax_{n+1},z-x_{n+1}\rangle+$$
$$+2\lambda_{n-1}\langle Ax_n-Ax_{n-1},z-x_n\rangle+2\lambda_{n-1}\langle Ax_n-Ax_{n-1},x_n-x_{n+1}\rangle. \qquad (16)$$

Оцінимо зверху доданок $2\lambda_{n-1}\langle Ax_n-Ax_{n-1},x_n-x_{n+1}\rangle$ у (16). Маємо

$$2\lambda_{n-1}\langle Ax_n-Ax_{n-1},x_n-x_{n+1}\rangle\le 2\lambda_{n-1}\|Ax_n-Ax_{n-1}\|_*\|x_n-x_{n+1}\|\le$$
$$\le 2\lambda_{n-1}L\|x_n-x_{n-1}\|\|x_{n+1}-x_n\|\le\lambda_{n-1}L\|x_n-x_{n-1}\|^2+\lambda_{n-1}L\|x_n-x_{n+1}\|^2\le$$
$$\le\mu\lambda_{n-1}L\phi(x_n,x_{n-1})+\mu\lambda_{n-1}L\phi(x_{n+1},x_n).$$

Отримуємо нерівність

$$\phi(z,x_{n+1})+2\lambda_n\langle Ax_n-Ax_{n+1},x_{n+1}-z\rangle+\mu\lambda_nL\phi(x_{n+1},x_n)\le$$
$$\le\phi(z,x_n)+2\lambda_{n-1}\langle Ax_{n-1}-Ax_n,x_n-z\rangle+\mu\lambda_{n-1}L\phi(x_n,x_{n-1})-$$
$$-(1-\mu\lambda_{n-1}L-\mu\lambda_nL)\phi(x_{n+1},x_n),$$

що й потрібно було довести.■

Нагадаємо елементарний факт про числові послідовності.

Лема 2. Нехай (a_n), (b_n) — дві послідовності невід'ємних чисел, що задовольняють нерівність $a_{n+1}\le a_n-b_n$ для всіх $n\in N$. Тоді існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ і $\sum_n b_n<+\infty$.

Теорема 2. Нехай C — непорожня опукла та замкнена підмножина 2-рівномірно опуклого та рівномірно гладкого Банахового простору E, $A: E\to E^*$ — монотонний та Ліпшицев на множині C оператор, $S\ne\varnothing$. Припустимо, що нормалізоване дуальне відображення J секвенційно слабко неперервне та послідовність (λ_n) така, що $0<\inf_n\lambda_n\le\sup_n\lambda_n<\frac{1}{2\mu L}$. Тоді послідовність (x_n), що породжена алгоритмом 1, слабко збігається до деякої точки $z\in S$.

Доведення. Нехай $z'\in S$. Обираємо таке $\delta>0$, що $1-\mu\lambda_{n-1}L-\mu\lambda_nL\ge\delta$ для всіх $n\in N$. З нерівності (13) випливає

$$V_{n+1}\le V_n-\delta\phi(x_{n+1},x_n),$$

де $V_n=\phi(z',x_n)+2\langle m_n,x_n-z'\rangle+\mu\lambda_{n-1}L\phi(x_n,x_{n-1})$. Покажемо, що $L_n\ge 0$ для всіх $n\in N$. Маємо

$$V_n=\phi(z',x_n)+2\lambda_{n-1}\langle Ax_{n-1}-Ax_n,x_n-z'\rangle+\mu\lambda_{n-1}L\phi(x_n,x_{n-1})\ge$$
$$\ge\frac{1}{\mu}\|x_n-z'\|^2-2\lambda_{n-1}\|Ax_{n-1}-Ax_n\|_*\|x_n-z'\|+\lambda_{n-1}L\|x_{n-1}-x_n\|^2\ge$$
$$\ge\frac{1}{\mu}\|x_n-z'\|^2-2\lambda_{n-1}L\|x_n-x_{n-1}\|\|x_n-z'\|+\lambda_{n-1}L\|x_{n-1}-x_n\|^2\ge$$
$$\ge\left(\frac{1}{\mu}-\lambda_{n-1}L\right)\|x_n-z'\|^2\ge 0.$$

З леми 2 випливає існування границі

$$\lim_{n\to\infty}(\phi(z',x_n)+2\lambda_{n-1}\langle Ax_{n-1}-Ax_n,x_n-z'\rangle+\mu\lambda_{n-1}L\phi(x_n,x_{n-1}))$$

та

$$\sum_{n=1}^{\infty}\phi(x_{n+1},x_n)<+\infty.$$

Звідси отримуємо обмеженість послідовності (x_n) та $\lim_{n\to\infty} \phi(x_{n+1}, x_n) = = \lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$ (врахували (3)). Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} (2\lambda_{n-1}\langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z'\rangle + \mu\lambda_{n-1} L\phi(x_n, x_{n-1})) = 0,$$

послідовності $(\phi(z', x_n))$ збігаються для всіх $z' \in S$.

Покажемо, що всі слабкі часткові границі послідовності (x_n) належать множині S. Розглянемо підпослідовність (x_{n_k}), що слабко збігається до деякої точки $z \in E$. Зрозуміло, що $z \in C$. Покажемо, що $z \in S$. Маємо

$$\langle Jx_{n+1} - Jx_n + \lambda_n Ax_n + \lambda_{n-1}(Ax_n - Ax_{n-1}), y - x_{n+1}\rangle \ge 0 \quad \forall y \in C.$$

Звідки, використовуючи монотонність оператора A, виводимо оцінку

$$\langle Ay, y - x_n\rangle + \langle Ax_n, x_n - x_{n+1}\rangle \ge \langle Ax_n, y - x_{n+1}\rangle \ge$$

$$\ge \frac{1}{\lambda_n}\langle Jx_n - Jx_{n+1}, y - x_{n+1}\rangle - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\langle Ax_n - Ax_{n-1}, y - x_{n+1}\rangle \ \forall y \in C.$$

З $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_{n-1}\| = 0$ та Ліпшицевості оператора A випливає $\lim_{x\to\infty} \|Ax_n - -Ax_{n-1}\|_* = 0$. Завдяки рівномірній неперервності на обмежених множинах нормалізованого дуального відображення J отримуємо $\lim_{n\to\infty} \|Jx_n - Jx_{n+1}\|_* = 0$. Таким чином,

$$\varliminf_{n\to\infty} \langle Ay, y - x_n\rangle \ge 0 \qquad \forall y \in C.$$

З іншого боку,

$$\langle Ay, y - z\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle Ay, y - x_{n_k}\rangle \ge \varliminf_{n\to\infty} \langle Ay, y - x_n\rangle \ge 0 \qquad \forall y \in C.$$

Отже, $z \in S$.

Покажемо, що послідовність (x_n) слабко збігається до z. Міркуємо від супротивного. Нехай існує підпослідовність (x_{m_k}) така, що $x_{m_k} \to z'$ слабко та $z \ne z'$. Зрозуміло, що $z' \in S$. Маємо

$$2\langle Jx_n, z - z'\rangle = \phi(z', x_n) - \phi(z, x_n) + \|z\|^2 - \|z'\|^2.$$

Звідки випливає існування границі $\lim_{n\to\infty} \langle Jx_n, z - z'\rangle$. Завдяки секвенційній слабкій неперервності нормалізованого дуального відображення J отримаємо

$$\langle Jz, z - z'\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle Jx_{n_k}, z - z'\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle Jx_{m_k}, z - z'\rangle = \langle Jz', z - z'\rangle,$$

тобто $\langle Jz - Jz', z - z'\rangle = 0$. Звідки випливає $z = z'$.■

У випадку $C = E$ варіаційна нерівність (1) набуває вигляду операторного рівняння

$$\text{знайти} \quad x \in E: \qquad Ax = 0. \tag{17}$$

Для (17) алгоритм 1 дає такий ітераційний процес:

$$Jx_{n+1} = Jx_n - \lambda_n Ax_n - \lambda_{n-1}(Ax_n - Ax_{n-1}), \tag{18}$$

який збіжний лише за умови монотонності оператора A. Метод

$$Jx_{n+1} = Jx_n - \lambda_n Ax_n$$

у цьому випадку може слабко збігатись лише в ергодичному розумінні [9, 29, 30]. А за об'ємом необхідних для здійснення ітераційного кроку обчислень процес (18) має переваги над екстаградієнтним методом

$$\begin{cases} Jx_{n+\frac{1}{2}} = Jx_n - \lambda_n Ax_n, \\ Jx_{n+1} = Jx_n - \lambda_n Ax_{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \qquad (19)$$

та неявним методом, що використовує резольвенту (проксимальний алгоритм [32])

$$x_{n+1} = (J + \lambda_n A)^{-1} Jx_n .$$

Схему (18) за допомогою послідовності $y_n = J^{-1}(Jx_n + \lambda_{n-1} Ax_{n-1})$ можна навести у вигляді двоетапного ітераційного процесу

$$Jx_n = Jy_n - \lambda_{n-1} Ax_{n-1},$$
$$Jy_{n+1} = Jy_n - \lambda_{n-1} Ax_n .$$

Тобто за відсутності обмежень ($C = E$) алгоритм 1 збігається з алгоритмом екстраполяції з минулого [25].

АДАПТИВНИЙ АЛГОРИТМ ОПЕРАТОРНОЇ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ

Параметри λ_n алгоритму 1 задавались згідно з умовою $0 < \inf_n \lambda_n \le \sup_n \lambda_n < \frac{1}{2\mu\lambda}$. Тобто використовувалась інформація про константи Ліпшицевості оператора A.

З урахуванням алгоритму 1 та [16, 18, 25, 26] у [36] побудовано алгоритм з адаптивним вибором величини λ_n, що не вимагає знання Ліпшицевих констант та процедур типу лінійного пошуку. Далі будемо доводити збіжність цього алгоритму за допомогою ляпуновського аналізу.

Припустимо, що відома лише константа $\mu \ge 1$ з нерівності (4).

Алгоритм 2. Операторна екстраполяція з адаптивним регулюванням.

Обираємо $x_0 = x_1 \in E$, $\tau \in (0, \frac{1}{2\mu})$ та число $\lambda_1 = \lambda_0 > 0$. Покладаємо $n = 1$.

1. Обчислити

$$m_n = \lambda_{n-1}(Ax_n - Ax_{n-1}),$$

$$x_{n+1} = \Pi_C J^{-1}(Jx_n - \lambda_n Ax_n - m_n) .$$

2. Якщо $x_{n+1} = x_n = x_{n-1}$, то СТОП, інакше перейти до п. 3.
3. Обчислити

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{ \lambda_n, \tau \dfrac{\| x_{n+1} - x_n \|}{\| Ax_{n+1} - Ax_n \|_*} \right\}, & \text{якщо } Ax_{n+1} \ne Ax_n, \\ \lambda_n & \text{інакше.} \end{cases}$$

Покласти $n := n + 1$ та перейти до п. 1.

Послідовність (λ_n), що задається на третьому етапі ітераційного кроку в алгоритмі 2, незростаюча та обмежена знизу числом $\min\left\{ \lambda_1, \frac{\tau}{L} \right\}$. Отже, існує границя $\lim_{n \to \infty} \lambda_n > 0$.

Як функцію Ляпунова оберемо

$$W_n = \phi(z, x_n) + 2\langle m_n, x_n - z \rangle + \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} L\phi(x_n, x_{n-1}),$$

де $z \in S$.

Лема 3. Для послідовності (x_n), що породжена алгоритмом 2, виконується нерівність

$$W_{n+1} \le W_n - \left(1 - \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \phi(x_{n+1}, x_n).$$

Доведення. Нехай $z \in S$. Як і в доведенні леми 1, отримуємо нерівність

$$\phi(z, x_{n+1}) \le \phi(z, x_n) - \phi(x_{n+1}, x_n) + 2\lambda_n \langle Ax_n - Ax_{n+1}, z - x_{n+1} \rangle +$$
$$+ 2\lambda_{n-1} \langle Ax_n - Ax_{n-1}, z - x_n \rangle + 2\lambda_{n-1} \langle Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1} \rangle. \qquad (20)$$

Використавши правило обчислення λ_{n+1}, оцінимо зверху доданок $2\lambda_{n-1} \langle Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1} \rangle$ у нерівності (20). Маємо

$$2\lambda_{n-1} \langle Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1} \rangle \le 2\lambda_{n-1} \| Ax_n - Ax_{n-1} \|_* \| x_n - x_{n+1} \| \le$$
$$\le 2\tau \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \| x_n - x_{n-1} \| \| x_{n+1} - x_n \| \le \tau \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \| x_n - x_{n-1} \|^2 + \tau \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \| x_n - x_{n+1} \|^2 \le$$
$$\le \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \phi(x_n, x_{n-1}) + \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \phi(x_{n+1}, x_n) .$$

Отримуємо нерівність

$$\phi(z, x_{n+1}) + 2\lambda_n \langle Ax_n - Ax_{n+1}, x_{n+1} - z \rangle + \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \phi(x_{n+1}, x_n) \le$$
$$\le \phi(z, x_n) + 2\lambda_{n-1} \langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z \rangle + \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \phi(x_n, x_{n-1}) -$$
$$- \left(1 - \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \phi(x_{n+1}, x_n),$$

що і потрібно було довести.■

Теорема 3. Нехай C — непорожня опукла та замкнена підмножина 2-рівномірно опуклого та рівномірно гладкого Банахового простору E, $A: E \to E^*$ — монотонний та Ліпшицев оператор, $S \ne \varnothing$. Припустимо, що нормалізоване дуальне відображення J секвенційно слабко неперервне. Тоді послідовність (x_n), що породжена алгоритмом 2, слабко збігається до деякої точки $z \in S$.

Доведення. Нехай $z' \in S$. Для функції Ляпунова

$$W_n = \phi(z', x_n) + 2\lambda_{n-1} \langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z' \rangle + \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \phi(x_n, x_{n-1})$$

має місце нерівність леми 3

$$W_{n+1} \le W_n - \left(1 - \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \phi(x_{n+1}, x_n).$$

Оскільки існує границя $\lim_{n\to\infty} \lambda_n > 0$, то

$$1 - \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \to 1 - 2\tau\mu \in (0,1) \text{ для } n \to \infty.$$

Покажемо, що $W_n \ge 0$ для всіх достатньо великих $n \in N$. Маємо

$$W_n = \phi(z', x_n) + 2\lambda_{n-1} \langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z' \rangle + \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \phi(x_n, x_{n-1}) \ge$$

$$\geq \frac{1}{\mu}\left\|x_n - z'\right\|^2 - 2\lambda_{n-1}\left\|Ax_{n-1} - Ax_n\right\|_* \left\|x_n - z'\right\| + \tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\left\|x_{n-1} - x_n\right\|^2 \geq$$

$$\geq \frac{1}{\mu}\left\|x_n - z'\right\|^2 - 2\tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\left\|x_n - x_{n-1}\right\|\left\|x_n - z'\right\| + \tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\left\|x_{n-1} - x_n\right\|^2 \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{\mu} - \tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)\left\|x_n - z'\right\|^2.$$

Оскільки існує таке $n_0 \in N$, що $\frac{1}{\mu} - \tau\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} > 0$ для всіх $n \geq n_0$, то $W_n \geq 0$ починаючи з n_0.

Тепер з леми 2 можемо зробити висновок, що існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\left(\phi(z', x_n) + 2\lambda_{n-1}\left\langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z'\right\rangle + \tau\mu\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\phi(x_n, x_{n-1})\right)$$

та

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \tau\mu\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - \tau\mu\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\phi(x_{n+1}, x_n) < +\infty.$$

Звідки отримуємо обмеженість послідовності (x_n) та $\lim_{n\to\infty}\phi(y_n, x_n) = \lim_{n\to\infty}\left\|x_{n+1} - x_n\right\| = 0$. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\left(2\lambda_{n-1}\left\langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z'\right\rangle + \tau\mu\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\phi(x_n, x_{n-1})\right) = 0,$$

то збігаються послідовності $(\phi(z', x_n))$ для всіх $z' \in S$.

Далі, міркуваннями з доведення теореми 2 отримаємо результат. ■

Зауваження 1. Для операторного рівняння (17) алгоритм 2 дає такий ітераційний процес:

$$\begin{cases} Jx_{n+1} = Jx_n - \lambda_n Ax_n - \lambda_{n-1}(Ax_n - Ax_{n-1}), \\ \lambda_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{\lambda_n, \tau\dfrac{\left\|x_{n+1} - x_n\right\|}{\left\|Ax_{n+1} - Ax_n\right\|_*}\right\}, & \text{якщо } Ax_{n+1} \neq Ax_n, \\ \lambda_n & \text{інакше.} \end{cases} \end{cases}$$

ВИСНОВКИ

У цій роботі, що є продовженням [18, 25, 35, 36], запропоновано та досліджено два нових алгоритми для розв'язання варіаційних нерівностей в рівномірно опуклих Банахових просторах.

Перший алгоритм — модифікація методу «forward-reflected-backward algorithm» з [27], що використовує узагальнену проєкцію Альбера [29] замість метричної. Другий алгоритм є адаптивним варіантом першого, де використовується правило поновлення величини кроку, що не вимагає знання Ліпшицевих констант та лінійного пошуку. За об'ємом необхідних для здійснення ітераційного кроку обчислень наведені алгоритми мають переваги над екстраградієнтним методом та методом екстраполяції з минулого (методом Попова).

Для варіаційних нерівностей з монотонними, Ліпшицевими операторами, що діють у 2-рівномірно опуклому та рівномірно гладкому Банаховому просторі, доведено теореми про слабку збіжність методів та $O(\frac{1}{\varepsilon})$-оцінку ефективності в термінах функції зазору.

З огляду на проведені дослідження зазначимо дві актуальні проблеми:

— усі результати отримано для класу 2-рівномірно опуклих і рівномірно гладких Банахових просторів, який не містить важливих для застосувань просторів L_p і W_p^m $(2< p< +\infty)$, отже, треба позбавитися цього обмеження;

— для ефективного застосування алгоритмів для нелінійних задач у Банахових просторах потрібні швидкі та стійкі алгоритми обчислення узагальненої проєкції Альбера для широкого набору множин.

Цікавим є дослідження поведінки алгоритмів 1 та 2, коли $C = E$, а саме асимптотичної поведінки $\|Ax_n\|_*$. Зауважимо, що з урахуванням результатів [15] для методу (19) отримано оцінку $\|Ax_n\|_* = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

З використанням методів із [16] результати, подібні до теорем 1 та 3, можна отримати для задач з псевдомонотонними, Ліпшицевими та секвенційно слабко неперервними операторами, що діють у 2-рівномірно опуклих та рівномірно гладких Банахових просторах.

У наступній роботі планується розглянути характер збіжності алгоритмів 1 та 2 для варіаційних нерівностей з (рівномірно) монотонними та Гьольдеровими операторами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 325 p.
2. Лионс Ж.-Л., Madженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. Москва: Мир, 1971. 371 с.
3. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. Москва: Мир, 1983. 256 с.
4. Sandrakov G.V. Homogenization of variational inequalities for problems with regular obstacles. *Doklady Akademii Nauk.* 2004. Vol. 397, Iss. 2. P. 170–173.
5. Sandrakov G.V. Homogenization of variational inequalities for non-linear diffusion problems in perforated domains. *Izvestiya Mathematics.* 2005. Vol. 69, Iss. 5. P. 1035–1059. http://dx.doi.org/10.1070/IM2005v069n05ABEH002287.
6. Lyashko S.I., Klyushin D.A., Nomirovsky D.A., Semenov V.V. Identification of age-structured contamination sources in ground water. Boucekkine R., Hritonenko N., Yatsenko Y. (Eds.). Optimal Control of Age-Structured Populations in Economy, Demography, and the Environment. London; New York: Routledge, 2013. P. 277–292.
7. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-dimensional variational inequalities and complementarily problem. New York: Springer, 2003. Vol. 2. 666 p.
8. Gidel G., Berard H., Vincent P., Lacoste-Julien S. A variational inequality perspective on generative adversarial networks. arXiv: 1802.10551. 2018.
9. Nemirovski A. Prox-method with rate of convergence O(1/T) for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. *SIAM Journal on Optimization.* 2004. Vol. 15. P. 229–251.
10. Wang J.-K., Abernethy J., Levy K.Y. No-regret dynamics in the Fenchel game: A unified framework for algorithmic convex optimization. arXiv: 2111.11309. 2021.
11. Korpelevich G.M. An extragradient method for finding saddle points and for other problems. *Matecon.* 1976. Vol. 12, N 4. P. 747–756.
12. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings. *SIAM Journal on Control and Optimization.* 2000. Vol. 38. P. 431–446.

13. Censor Y., Gibali A., Reich S. The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space. *Journal of Optimization Theory and Applications.* 2011. Vol. 148. P. 318-335. https://doi.org/10.1007/s10957-010-9757-3.

14. Semenov V.V. Modified extragradient method with Bregman divergence for variational inequalities. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. Vol. 50, Iss. 8. P. 26–37. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i8.30.

15. Gorbunov E., Loizou N., Gidel G. Extragradient method: O(1/K) last-iterate convergence for monotone variational inequalities and connections with cocoercivity. arXiv: 2110.04261. 2021. https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.04261.

16. Denisov S.V., Nomirovskii D.A., Rublyov B.V., Semenov V.V. Convergence of extragradient algorithm with monotone step size strategy for variational inequalities and operator equations. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2019. Vol. 51, Iss. 6. P. 12–24. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i6.20.

17. Bach F., Levy K.Y. A Universal algorithm for variational inequalities adaptive to smoothness and noise. arXiv: 1902.01637. 2019.

18. Vedel Y., Semenov V. Adaptive extraproximal algorithm for the equilibrium problem in Hadamard spaces. Olenev N., Evtushenko Y., Khachay M., Malkova V. (Eds.). *Optimization and Applications. OPTIMA 2020. Lecture Notes in Computer Science*. Cham: Springer, 2020. Vol. 12422. P. 287–300. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62867-3_21.

19. Popov L.D. A modification of the Arrow-Hurwicz method for search of saddle points. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR.* 1980. Vol. 28, Iss. 5. P. 845–848.

20. Malitsky Yu. V., Semenov V.V. An extragradient algorithm for monotone variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2014. Vol. 50, Iss. 2. P. 271–277. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9614-8.

21. Lyashko S.I., Semenov V.V. A new two-step proximal algorithm of solving the problem of equilibrium programming. Goldengorin B. (Ed.). *Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. Springer Optimization and Its Applications.* Cham: Springer, 2016. Vol. 115. P. 315–325. https://doi.org/10.1007/978-3-319-42056-1_10.

22. Chabak L., Semenov V., Vedel Y. A new non-euclidean proximal method for equilibrium problems. Chertov O., Mylovanov T., Kondratenko Y., Kacprzyk J., Kreinovich V., Stefanuk V. (Eds.). *Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information. ICDSIAI 2018. Advances in Intelligent Systems and Computing.* Cham: Springer, 2019. Vol. 836. P. 50–58. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97885-7_6.

23. Nomirovskii D.A., Rublyov B.V., Semenov V.V. Convergence of two-stage method with bregman divergence for solving variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2019. Vol. 55, Iss. 3. P. 359–368. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00142-7.

24. Vedel Y.I., Denisov S.V., Semenov V.V. An adaptive algorithm for the variational inequality over the set of solutions of the equilibrium problem. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2021. Vol. 57, Iss. 1. P. 91–100. https://doi.org/10.1007/s10559-021-00332-2.

25. Semenov V.V., Denisov S.V., Kravets A.V. Adaptive two-stage bregman method for variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2021. Vol. 57, Iss. 6. P. 959–967. https://doi.org/10.1007/s10559-021-00421-2.

26. Vedel Y.I., Sandrakov G.V., Semenov V.V. An adaptive two-stage proximal algorithm for equilibrium problems in Hadamard spaces. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2020. Vol. 56, Iss. 6. P. 978–989. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00318-6.

27. Malitsky Y., Tam M.K. A forward-backward splitting method for monotone inclusions without cocoercivity. *SIAM Journal on Optimization.* 2020. Vol. 30. P. 1451–1472. https://doi.org/10.1137/18M1207260.

28. Alber Y., Ryazantseva I. Nonlinear ill posed problems of monotone type. Dordrecht: Springer, 2006. 410 p.

29. Alber Y.I. Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications. T*heory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type.* New York: Dekker, 1996. Vol. 178. P. 15–50.

30. Iiduka H., Takahashi W. Weak convergence of a projection algorithm for variational inequalities in a Banach space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 2008. Vol. 339, N 1. P. 668–679. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.07.019.

31. Cholamjiak P., Shehu Y. Inertial forward-backward splitting method in Banach spaces with application to compressed sensing. *Appl. Math.* 2019. Vol. 64. P. 409–435. https://doi.org/10.21136/AM.2019.0323-18.

32. Shehu Y. Convergence results of forward-backward algorithms for sum of monotone operators in Banach spaces. *Results Math.* 2019. Vol. 74. https://doi.org/10.1007/s00025-019-1061-4.

33. Shehu Y. Single projection algorithm for variational inequalities in Banach spaces with application to contact problem. *Acta Math.* Sci. 2020. Vol. 40. P. 1045–1063. https://doi.org/10.1007/s10473-020-0412-2.

34. Yang J., Cholamjiak P., Sunthrayuth P. Modified Tseng's splitting algorithms for the sum of two monotone operators in Banach spaces. *AIMS Mathematics.* 2021. Vol. 6, Iss. 5. P. 4873–4900. https://doi.org/10.3934/math.2021286.

35. Семенов В.В., Денисов С.В. Збіжність методу екстраполяції з минулого для варіаційних нерівностей в рівномірно опуклих Банахових просторах. *Кібернетика та системний аналіз.* 2022. Т. 58, № 4. С. 82–93.

36. Vedel Y., Semenov V., Denisov S. A novel algorithm with self-adaptive technique for solving variational inequalities in Banach spaces. Olenev N.N., Evtushenko Y.G., Jaćimović M., Khachay M., Malkova V. (Eds.). *Advances in Optimization and Applications. OPTIMA 2021. Communications in Computer and Information Science.* Cham: Springer, 2021. Vol 1514. P. 50–64. https://doi.org//10.1007/978-3-030-92711-0_4.

37. Beauzamy B. Introduction to Banach spaces and their geometry. Amsterdam: North-Holland, 1985. 307 p.

38. Aoyama K., Kohsaka F. Strongly relatively nonexpansive sequences generated by firmly nonexpansive-like mappings. *Fixed Point Theory Appl.* 2014. P. 95. https://doi.org/10.1186 1687-1812-2014-95.

39. Xu H.K. Inequalities in Banach spaces with applications. *Nonlinear Anal.* 1991. Vol. 16, Iss. 12. P. 1127–1138.

V.V. Semenov, S.V. Denisov, G.V. Sandrakov, O.S. Kharkov

CONVERGENCE OF THE OPERATOR EXTRAPOLATION METHOD FOR VARIATIONAL INEQUALITIES IN BANACH SPACES

Abstract. New iterative algorithms for solving variational inequalities in uniformly convex Banach spaces are analyzed. The first algorithm is a modification of the forward-reflected-backward algorithm, which uses the Alber generalized projection instead of the metric one. The second algorithm is an adaptive version of the first one, where the monotone step size update rule is used, which does not require knowledge of the Lipschitz constants and linear search procedure. For variational inequalities with monotone, Lipschitz continuous operators acting in a 2-uniformly convex and uniformly smooth Banach space, theorems on the weak convergence of the methods are proved. Also, for the first algorithm, an efficiency estimate in terms of the gap function is proved.

Keywords: variational inequality, monotone operator, Alber generalized projection, 2-uniformly convex Banach space, uniformly smooth Banach space, operator extrapolation method, weak convergence, gap function.

Надійшла до редакції 01.03.2022