УДК 519.9

А.М. ВОРОНІН
Національний авіаційний університет, Київ, Україна,
e-mail: *alnv@ukr.net.*

А.С. САВЧЕНКО
Національний авіаційний університет, Київ, Україна,
e-mail: *a.s.savchenko@ukr.net.*

КОМПРОМІС І КОНСЕНСУС У БАГАТОКРИТЕРІЙНИХ ЗАДАЧАХ

Анотація. Розглянуто різні підходи до розв’язання багатокритерійних задач в залежності від типу обмежень у постановках задачі. Якщо обмеження фіксовані і задані, то алгоритм обчислення включає переваги особи, що приймає рішення, а відповідна багатокритерійна задача має принципово компромісний розв’язок. Якщо величини обмежень можна варіювати, то виникає можливість отримання консенсусних розв’язків, а алгоритм обчислення вільний від евристичних елементів.

Ключові слова: компроміс, консенсус, багатокритерійна задача, обмеження, ресурси, алгоритм обчислення.

ВСТУП

Для успішного досягнення поставлених цілей за заданих умов функціонування кожна система має достатні ресурсні можливості (фінансові, технічні та ін.). Ці ресурси зазвичай обмежені і ця властивість ресурсів в оптимізаційних задачах враховується в обмеженнях. Останні мають важливе фундаментальне значення у розв’язанні багатокритерійних задач.

Обмеження можуть накладатися як на аргументи оптимізації, так і на значення часткових критеріїв задачі. Обмеження, накладені на характеристики системи за тих чи інших обставин, часто можуть бути причиною запровадження того чи іншого критерію. Наприклад, за звичайних наземних умов прийнято оцінювати якість ергатичної системи за кількістю (чи швидкістю витрати) кисню, споживаного людиною-оператором під час виконання заданої роботи. Зовсім інша річ, коли система функціонує без контакту з земною атмосферою (у космосі, під водою тощо). Тут ресурси кисню обмежені і дуже важливою характеристикою стає економічність його витрати. Відображенням цієї вимоги є запровадження відповідного критерію. У цьому разі можна сказати, що обмеження породжує критерій.

Навіть невеликі зміни в обмеженнях можуть суттєво впливати на розв’язки [1]. І вже дуже серйозні наслідки можна отримати, скасувавши одні обмеження і додавши інші. У 1956 р. бразильські ентомологи визнали, що бджоли виробляють недостатньо меду. Вони провели схрещування кількох видів європейських та додали різновид африканських бджіл. Гібридні бджоли дійсно давали більше меду, були стійкі до хвороб, добре переносили спеку, але при цьому вони стали неймовірно агресивними і дуже отруйними. Від їхніх укусів у Бразилії та на півдні США загинуло понад 150 людей та сотні тварин, як домашніх, так і диких.

Отже, є велика небезпека в процесі формальної оптимізації складних систем, на що звернув увагу Н. Вінер у перших публікаціях з кібернетики. Справа в тому, що, не задавши всіх необхідних обмежень, можна одночасно з оптимізацією цільової функції отримати непередбачені та небажані супутні ефекти.

У теорії прийняття багатокритерійних рішень розглядаються два основні підходи до розв’язання задач векторної оптимізації складних систем. Один із них полягає у формалізації багатокритерійних задач за заданих (фіксованих) обмежень та ресурсних можливостей системи. Другий підхід показує, які нові перспективи відкриваються перед розробниками, якщо вони мають можливість у деяких межах розпоряджатися ресурсними запасами (обмеженнями) багатокритерійних систем. Деякі результати у цій галузі розглянуті в [2–4] для теорії системної оптимізації.

КОМПРОМІС

Для успішного виконання поставлених цілей за заданих умов функціонування кожна система має певні запаси і ресурси (за міцністю, термостійкістю, кількістю палива та ін.), які є обмеженими. Для концепції першого підходу характерно те, що обмеження та ресурсні можливості системи задані та фіксовані.

З огляду на фундаментальне значення обмежень у розв'язанні багатокритерійних задач сформулюємо, на відміну від концепції Чарнза–Купера [5], такий принцип оптимальності: «подалі від граничних значень» [6]. Відповідно до цього принципу запропоновано нелінійну схему компромісів, яка дає змогу отримати загальний для критеріїв компромісний розв'язок, що найбільше віддаляє часткові критерії від своїх «червоних ліній» (граничних значень).

Вимоги до скалярної згортки $Y[y(x)]$ критеріїв за нелінійною схемою компромісів такі:

1) вона має «штрафувати» часткові критерії за наближення до своїх граничних значень;

2) вона має бути диференційовною за своїми аргументами.

З можливих функцій, що відповідають переліченим вимогам, виберемо найпростішу:

$$Y[y(x)] = \sum_{k=1}^{s} A_k [A_K - y_k(x)]^{-1},$$

де A_k — обмеження зверху на значення критеріїв, що мінімізуються, $y_k \le A_k$, $k \in [1, s]$.

Мінімізація цільової функції приводить до компромісного розв'язку, що найбільшою мірою віддаляє часткові критерії від своїх обмежень:

$$x^* = \arg\min_{x \in X} \sum_{k=1}^{s} A_k [A_K - y_k(x)]^{-1}.$$

Скалярна згортка за нелінійною схемою компромісів штрафує часткові критерії за наближення до своїх граничних значень. Справді, нехай деякий критерій $y_m(x)$, $m \in [1, s]$, небезпечно наближається до свого граничного значення. Це означає, що різниця $[A_m - y_m(x)]$ прагне до нуля і отже відповідний член $\dfrac{A_m}{A_m - y_m(x)}$ мінімізованої суми стрімко зростає.

За значного зростання $y_m(x)$ і, отже, члена $\dfrac{A_m}{A_m - y_m(x)}$, мінімізація всієї суми зводиться до мінімізації лише цього, найбільш «неблагополучного» члена. Це означає, що нелінійна схема компромісів за небезпечного зростання одного або кількох часткових критеріїв, що мінімізуються, діє як мінімаксна (чебишевська) модель оптимізації

$$x^* = \arg\min_{x \in X} \max_{k \in [1, s]} \frac{y_k}{A_k}(x).$$

Ситуація, в якій часткові критерії перебувають у небезпечній близькості до своїх граничних значень, вважається напруженою. Навпаки, ситуація спокійна, якщо критерії далекі від своїх граничних значень. У спокійній ситуації нелінійна схема компромісів діє як інтегральна модель оптимізації

$$x^* = \arg\min_{x \in X} \sum_{k=1}^{s} \frac{y_k(x)}{A_k}.$$

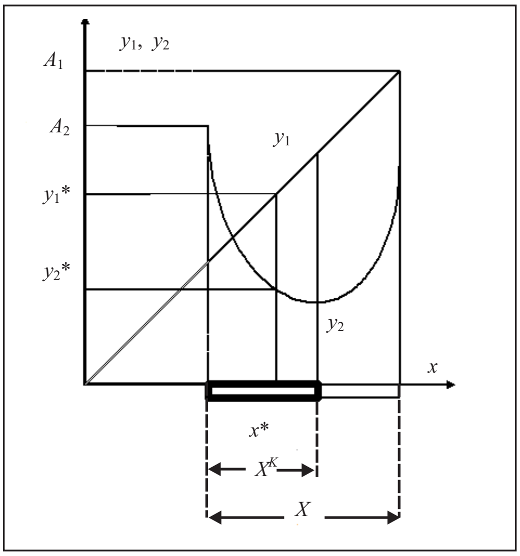

Рис. 1

Таким чином, нелінійна схема компромісів адаптується до ситуації прийняття рішення. Модель оптимізації варіюється від інтегральної у спокійних ситуаціях до егалітарної (чебишевської) у напружених ситуаціях. У проміжних ситуаціях утворюються схеми компромісів, які задовольняють часткові критерії тією мірою, як вони віддалені від своїх граничних значень. Це означає, що замість вибору схеми компромісів у різних ситуаціях можна застосовувати єдину універсальну нелінійну схему компромісів, що автоматично дає схему, адекватну цій конкретній ситуації.

Модельний приклад. Нехай деяка система оцінюється за двома критеріями, що мінімізуються:

$$y_1 = x\,;$$

$$y_2 = (x-5)^2 + 2\,.$$

Задано обмеження на значення критеріїв: $y_1 \le A_1 = 6.5$ та $y_2 \le A_2 = 6$. Потрібно знайти компромісно-оптимальний розв'язок $x^* \in X^K \subset X$ за нелінійною схемою компромісів.

Відповідно до концепції нелінійної схеми компромісів для цього прикладу

$$x^* = \arg\min_x \left[\frac{A_1 - y_1}{A_1} + \frac{A_2 - y_2}{A_2} \right] = \arg\min_x \left[\frac{6.5 - x}{6.5} + \frac{6 - (x-5)^2 - 2}{6} \right].$$

Необхідна умова мінімуму функції має вигляд $\frac{\partial}{\partial x} Y[y(x)] = 0$, тобто

$$-\frac{1}{6.5} + \frac{-2(x-5)}{6} = 0\,,$$

звідки $x^* = 4.08$; $y_1^* = 4.08$; $y_2^* = 2.85$.

Графічна ілюстрація прикладу представлена на рис.1. Характерною рисою першого підходу є наявність області компромісів $X^K \subset X$ (множина Парето, переговорна множина), в якій отримують компромісно-оптимальний розв'язок x^*.

КОНСЕНСУС

Другий підхід застосовують у разі, коли обмеження на часткові критерії не фіксовані. Розглянемо, як це впливає на вибір схеми компромісів.

Кожна схема компромісів є відображенням певної корисної властивості, яку, на думку розробників, повинна мати проєктована багатокритерійна система в заданій ситуації [7]. Так, егалітарний принцип рівномірності передбачає реалізацію ідеї найбільш рівномірної зміни рівня кожного з часткових критеріїв. Як приклад зазначимо, що грамотно спроєктований механізм зношується рівномірно і після розрахункового часу роботи виходить з ладу одночасно у всіх своїх ланках.

З іншого боку, застосування утилітарного принципу інтегральної оптимальності свідчить, що розробники акцентують увагу на економічності сумарної витрати запасів і ресурсів проєктованої системи. Наприклад, згаданий механізм має працювати якомога довше.

Традиційна постановка задачі змушує вибирати одну, адекватну заданим умовам, схему компромісів, ігноруючи корисні якості, які є у інших принципах оптимальності.

Тим часом, практика розв'язання прикладних багатокритерійних задач свідчить, що не завжди розв'язки, отримані за різними схемами компромісів, суттєво різні. У найкращих зразках багатокритерійних систем вони близькі, інколи практично збігаються. Від чого це залежить і про що це свідчить?

Якщо розв'язки, отримані за різними схемами компромісів, збігаються (чи досить близькі), це означає, що ресурси та запаси проєктованої системи підібрані і використані настільки вдало, що за заданих умов функціонування система одночасно відповідає всім вимогам, закладеним у різних принципах оптимальності. Наприклад, раціонально побудований механізм працює довго, а наприкінці терміну експлуатації виявляється, що його деталі зношені однаково. Якщо розв'язки суттєво різні, то запаси та ресурси системи підібрані неправильно, вони не збалансовані для заданих умов функціонування, і отже, система організована нераціонально.

Таким чином, ознакою раціонально організованої багатокритерійної системи є збіг (близькість) розв'язків, отриманих за різними принципами оптимальності, а засобом раціональної організації є підбір запасів і ресурсів, від яких залежать обмеження системи. Доцільно не лише пасивно констатувати, що ця система спроєктована нераціонально (або раціонально), а коли і як можна включати в постановку задачі цілеспрямований підбір (організацію) запасів і ресурсів проєктованої багатокритерійної системи.

Розглянемо таку процедуру проєктування, коли розробники у певних межах можуть змінювати значення всіх або деяких запасів та ресурсів системи, гармонійно підбираючи адекватний заданим умовам комплекс обмежень та визначаючи цим адекватну допустиму область розв'язків.

Сформулюємо принцип раціональної організації у багатокритерійних задачах керування. У раціонально організованій багатокритерійній системі за заданих умов функціонування обмежені ресурси та запаси підібрані таким чином, що оптимізація вектора ефективності за різними схемами компромісів приводить до збіжних (або близьких) розв'язків.

Принцип раціональної організації універсальний і є логічною основою для формалізації розв'язання багатокритерійних задач різної природи. У випадку збігу розв'язків проблеми вибору схеми компромісів не існує, і відповідний евристичний елемент із методики розв'язання багатокритерійної задачі не використовується. Тоді задача векторної оптимізації повністю і об'єктивно зводиться до скалярної.

У новій постановці багатокритерійної задачі обмеження A не є заданими константами, а поряд з аргументами x є незалежними змінними. У цьому разі результат розв'язання векторної задачі полягає у визначенні таких векторів $x^o \in X$ і A^o, за яких задовольняється принцип раціональної організації.

Можна стверджувати, що якщо строго дотримується принцип раціональної організації, то оптимальний розв'язок x^o:

• належить множині Парето;

• одночасно задовольняє всі схеми компромісів, що приводять до Парето-оптимальних розв'язків;

• є єдиним.

Звідси випливає, що математично строга реалізація принципу раціональної організації є нічим іншим, як стягуванням раціональним вибором вектора A^o всіх паретівських розв'язків до єдиної точки x^o, яка і є шуканим оптимальним розв'язком поставленої багатокритерійної задачі.

З огляду на викладене можна стверджувати, що за виконання принципу раціональної організації одночасно задовольняються полярні схеми компромісів, відповідні егалітарному принципу рівномірності та утилітарному принципу економічності. Принцип рівномірності є рівністю відносних критеріїв

$$\frac{y_1(x)}{A_1} = \frac{y_2(x)}{A_2} = \ldots = \frac{y_s(x)}{A_s}, \tag{1}$$

а принцип економічності вимагає мінімуму функції

$$Y[y(x)] = \sum_{k=1}^{s} \frac{y_k(x)}{A_k} = \min_x . \tag{2}$$

Розкриваючи вираз (1), отримуємо:

$$\frac{y_j(x)}{A_j} - \frac{y_{j+1}(x)}{A_{j+1}} = 0, \ \ j \in [1, s-1]. \tag{3}$$

Умова (2) у припущенні, що розв'язок досягається всередині допустимої області аргументів, породжує систему рівнянь

$$\frac{\partial Y}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{s} \frac{y_k(x)}{A_k} = 0, \ \ i \in [1, n], \tag{4}$$

де n — розмірність вектора аргументів.

Принцип раціональної організації вимагає, щоб рівняння (3) та (4) складали сумісну та повну систему рівнянь. Зрозуміло, однак, що ця система є невизначеною (бракує одного рівняння). Це пояснюється тим, що її розв'язання за принципом раціональної організації може бути отримано за нескінченної кількості сполучень абсолютних величин обмежень. Тому необхідно довизначити задачу додатковою умовою. Такою умовою може бути, наприклад, рівність l-го відносного критерію (і автоматично всіх відносних критеріїв) заданому з фізичних міркувань конкретному значенню:

$$\frac{y_l(x)}{A_l} = \mu, l \in [1, s], 0 < \mu \le 1. \tag{5}$$

Таким чином, для розв'язання багатокритерійної задачі за принципом раціональної організації необхідно розв'язати систему рівнянь (3)–(5). У результаті отримаємо n шуканих компонентів вектора розв'язку x^o і s оптимальних складових вектора граничних значень критеріїв A^o. Викладена проста та об'єктивна методика може бути застосована, якщо задача раціональної організації має точний розв'язок у заданій області аргументів.

Серед розв'язків, одержуваних за принципом раціональної організації, особливе місце посідає такий, у якому обмежені запаси та ресурси системи витрачаються повністю. Такий розв'язок можна отримати за перетину умов (3) та (4), якщо $\mu = 1$. Отриманий розв'язок x^O логічно назвати глобальним консенсусом, оскільки він збалансований за всіма критеріями, забезпечений ресурсними можливостями системи, що повністю витрачаються, і несуперечливий.

Приклад 1. Нехай система оцінюється тими самими двома критеріями, що мінімізуються:

$$y_1 = x,$$

$$y_2 = (x-5)^2 + 2.$$

Тепер змінимо задачу таким чином, що обмеження A_1 та A_2 не фіксовані і можуть підбиратися з відкритої області. Із фізичних міркувань обрано параметр $\mu = 0.6$.

Потрібно знайти значення x^o, A_1^o, A_2^o, у яких задовольняється принцип раціональної організації. Для цього складемо систему рівнянь (3)–(5):

$$\frac{x}{A_1} = \frac{(x-5)^2 + 2}{A_2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{A_1} + \frac{(x-5)^2 + 2}{A_2}\right] = 0,$$

$$\frac{x}{A_1} = \mu = 0.6.$$

Розв'язання цієї системи приводить до квадратичного рівняння $1.8x^2 - 12x + 16.2 = 0$, що має два корені: $x_1^o = 4.79$, за якого $A_{11}^o = 7.98$; $y_{11}^o = 4.79$; $A_{21}^o = 3.13$; $y_{21}^o = 2.05$ та $x_2^o = 1.88$, за якого $A_{21}^o = 3.41$; $y_{21}^o = 1.88$; $A_{22}^o = 19.56$; $y_{22}^o = 11.73$. Переважним видається перший варіант.

Приклад 2. За тих самих умов виберемо параметр $\mu = 1$, за якого розв'язання системи рівнянь (3)–(5) дає величини x^O, A_1^O, A_2^O, що відповідають глобальному консенсусу.

У процесі розв'язання отримуємо квадратичне рівняння $3x^2 - 20x + 27 = 0$, що має два корені: $x_1^O = 4.79$, за якого $A_{11}^O = 4.79$; $y_{11}^O = 4.79$; $A_{21}^O = 2.05$; $y_{21}^O = 2.05$ та $x_2^O = 1.88$, за якого $A_{21}^O = 1.88$; $y_{21}^O = 1.88$; $A_{22}^O = 11.73$; $y_{22}^O = 11.73$. Обидва варіанти прийнятні.

Приклад 3. Для системи, яка оцінюється за трьома критеріями, що мінімізуються:

$$y_1 = x,$$

$$y_2 = (x-5)^2 + 2,$$

$$y_3 = 2 - 0.5x,$$

потрібно визначити умови глобального консенсусу x^O, A_1^O, A_2^O, A_3^O.

Складемо систему рівнянь (3)–(5):

$$\frac{x}{A_1} = \frac{(x-5)^2 + 2}{A_2}; \ \frac{(x-5)^2 + 2}{A_2} = \frac{2 - 0.5x}{A_3},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{A_1} + \frac{(x-5)^2 + 2}{A_2} + \frac{2 - 0.5x}{A_3}\right] = 0,$$

$$\frac{x}{A_1} = \mu = 1.$$

У процесі розв'язання цієї системи отримуємо кубічне рівняння

$$2x^3 - 21x^2 + 67x - 54 = 0.$$

Розв'язання цього рівняння за формулою Вієта дає два комплексні корені та один дійсний, який і є шуканим аргументом. Таким чином, $x^O = 1.22$, за якого $A_1^O = 1.22$; $y_1^O = 1.22$; $A_2^O = 14.3$; $y_2^O = 14.3$; $A_3^O = 1.39$; $y_3^O = 1.39$.

ВИСНОВКИ

Розглянуто два підходи до формалізації розв'язання багатокритерійних задач. Один з них застосовується за фіксованих значень обмежень на часткові критерії і полягає у тому, що шуканий компромісно-оптимальний розв'язок x^* отримується як аргумент мінімізації скалярної згортки критеріїв за нелінійною схемою компромісів, що залежить від заданих обмежень A [8].

Другий підхід застосовується, коли обмеження A не задані та є можливість розглядати їх як незалежні змінні задачі. У цьому разі розв'язок x^o, A^o можна отримати за принципом раціональної організації, а якщо ресурсні можливості витрачаються повністю, можна отримати розв'язок x^O, A^O, що виражає глобальний консенсус часткових критеріїв.

Обидва підходи застосовувалися під час розв'язання конкретних задач векторної оптимізації космічних систем керування. Так, концепція нелінійної схеми компромісів використовувалася під час розроблення закону керування глісадним спуском повітряно-космічного корабля «Буран», у процесі створення регресійної моделі експертних оцінок «надійність–вартість» у задачах страхування об'єктів космічної діяльності, а також під час розроблення ергатичних систем аерокосмічного призначення та інших.

Принцип раціональної організації дає змогу найефективніше розв'язувати техніко-економічні задачі виконання складних техніко-соціальних проєктів [9], тому що дає можливість гармонійно узгоджувати ресурсні (фінансові, технічні, ергономічні та ін.) можливості систем у процесі проєктування та реалізації проєктів в умовах жорстких вимог.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Многокритериальная задача оптимизации: устойчивость к возмущениям входных данных векторного критерия. *Кібернетика та системний аналіз.* 2020. Т. 56, № 6. С. 107–114.
2. Глушков В.М. Системная оптимизация. *Кибернетика.* 1980. № 5. С. 89–90.
3. Glushkov V.M., Mikhalevich V.S., Volkovich V.L., Dolenko G.A. System optimization and multitest linear programming problems for preference assigned as intervals. *Cybernetics.* 1983. Vol. 19, N 3. P. 287–297.·
4. Semenova N.V. Methods of searching for guaranteeing and optimistic solutions to integer optimization problems under uncertainty. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2007. Vol. 43, N 1. P. 85–93.
5. Charnes A., Cooper W. Management models and industrial applications of linear programming. New York: Wiley, 1961. Vol. 1. 240 p.
6. Воронин А.Н. Нелинейная схема компромиссов в многокритериальных задачах оценивания и оптимизации. *Кибернетика и системный анализ.* 2009. № 4. С. 106–114.
7. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Векторные задачи оптимизации с линейными критериями на нечетко заданном комбинаторном множестве альтернатив. *Кибернетика и системный анализ.* 2011. № 2. С. 88–99.
8. Воронин А.Н., Савченко А.С. Многокритериальная оптимизация: системный подход. *Кибернетика и системный анализ.* 2020. Т. 56, № 6. С. 160–174.
9. Voronin A. Multi-criteria decision making for the management of complex systems. USA: IGI Global, 2017. 201 p.

A.N. Voronin, A.S. Savchenko

COMPROMISE AND CONSENSUS IN MULTICRITERIA PROBLEMS

Abstract. Various approaches to solving multicriteria problems are considered, depending on the role of constraints in the problem statement. If the constraints are fixed and specified, then the calculation algorithm includes the preferences of the decision maker and the corresponding multicriteria problem has a fundamentally compromise solution. If the values of the constraints can be varied, it becomes possible to obtain consensus decisions, and the calculation algorithm is free of heuristic elements.

Keywords: compromise, consensus, multicriteria problem, constraints, resources, calculation algorithm.

Надійшла до редакції 15.01.2021