УДК 004.421.6

М.С. ЛЬВОВ
Херсонський державний університет, Івано-Франківськ, Україна,
e-mail: *lvov@ksu.ks.ua*; *lvovms14@gmail.com*.

ДИЗ'ЮНКТИВНІ БАЗИСИ ПРИКЛАДНИХ АЛГЕБР МНОЖИН ТА ЇХНЄ ВИКОРИСТАННЯ В ЗАДАЧАХ КОМБІНАТОРНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Анотація. Введено поняття прикладної алгебри множин, стандартного диз'юнктивного базису прикладної алгебри множин і описано алгоритм побудови стандартного диз'юнктивного базису, який за аналогією з алгоритмом Бухбергера в теорії поліноміальних ідеалів і алгоритмом Кнута–Бендикса в теорії напівгруп називається алгоритмом критичної пари/поповнення. Наведено приклади різних прикладних алгебр множин, до яких належать алгебра скінченних множин в реалізації на впорядкованих списках, алгебра Лебега множин на числовій осі, алгебра лінійних напівалгебраїчних множин на площині, алгебра кіл на площині, названа алгеброю Ейлера. Розглянуто також реалізації алгоритму критичної пари/поповнення у цих прикладних алгебрах множин. Основний результат роботи полягає в тому, що наявність стандартного диз'юнктивного базису дає змогу будувати ефективні за часом (поліноміальні) алгоритми розв'язання основних проблем у прикладних алгебрах множин, таких як проблема представлення, проблема належності, проблема порівняння тощо. Алгоритми в алгебрі лінійних напівалгебраїчних множин на площині та алгебрі Ейлера на площині очевидним чином можна поширити на більш загальні прикладні алгебри множин.

Ключові слова: прикладна алгебра множин, алгоритм критичної пари/поповнення, комбінаторна геометрія, проблема належності.

Присвячується світлій пам'яті академіка
Олександра Адольфовича Летичевського

ВСТУП

У статті розглядаються деякі задачі комбінаторної геометрії, розв'язання яких ґрунтується на використанні алгоритму, який за аналогією з алгоритмами Бухбергера [1, 2] та Кнута–Бендікса [3] можна назвати алгоритмом критичної пари/поповнення (зокрема, це задача належності). Формулювання задач, що розглядаються, природним чином використовують конкретні алгебри геометричних множин, які в роботі названо прикладними алгебрами множин. Це алгебра скінченних множин, алгебра Лебега множин на числовій осі, алгебра напівалгебраїчних лінійних множин на площині, алгебра кіл на площині (точні визначення наведено у розд. 2).

Алгоритм критичної пари/поповнення набув поширення в конструктивній теорії поліноміальних ідеалів. Його автор — Б. Бухбергер [1, 2] застосував цей алгоритм для побудови базису ідеалу кільця поліномів, яке має «хороші» властивості. Ці базиси називають базисами Гребнера. Якщо базис Гребнера ідеалу I побудовано, багато класичних задач теорії поліноміальних ідеалів можна розв'язати ефективно. Це, наприклад, задача належності $f \in I$, задача порівняння $I = J$ та інші задачі. Фактично метод базисів Гребнера став основним методом конструктивної теорії поліноміальних ідеалів (див., наприклад, [4, 5]).

Алгоритм поповнення, знаний як алгоритм Кнута–Бендікса [3], використовується у теорії напівгруп з визначальними співвідношеннями і в теорії систем переписування термів для побудови множини визначальних співвідношень, якою послуговуються в ефективних алгоритмах багатьох прикладних задач [6, 7].

У задачах прикладних алгебр множин, які розглядаються у цій роботі, алгоритм критичної пари/поповнення використовується для побудови базису алгебри, який називається стандартним диз'юнктивним базисом (СДБ). Ці базиси мають «хороші» властивості, наявність яких дає змогу отримати алгоритми розв'язання деяких задач, ефективних як у гіршому випадку, так і в середньому.

1. АЛГОРИТМИ ПОПОВНЕННЯ В КОНСТРУКТИВНІЙ АЛГЕБРІ МНОЖИН

Прикладною (конструктивною) алгеброю назвемо алгебраїчну систему, носій якої визначається конструктором і контекстними умовами [8–10], а кожна операція сигнатури визначена конструктивно алгоритмом обчислення результату операції за її аргументами.

Водночас із усюди визначеними прикладними алгебрами в теорії обчислень розглядають і частково визначені алгебри, а також алгебраїчні системи. Усі ці варіанти абстракцій алгебраїчних обчислень об'єднані поняттям багатосортної алгебри.

Приклад 1. Конструктор *Rat* раціональних чисел.

Прикладна (конструктивна) алгебра визначається конструктором елемента носія та контекстними співвідношеннями:

```
Rat R = Int a // Nat b; // Тут «//» — позначка (знак) дробу
b<>0, gcd(abs(a), b) = 1; // Контекстні співвідношення
```

Приклад 2. Конструктивне визначення операції перетину в частковій алгебрі відкритих інтервалів на числовій осі *Segment* з операціями перетину та об'єднання:

```
// Конструктор та контекстні умови;
Segment S  =  [Rat a;  Rat b];
a<b;

// Система переписувальних правил. Операція перетину
(b<= c)∨(d<= a) → [a, b]∩[c, d] = ∅,
(a<= c)&(c<= b)&(b<= d) → [a, b]∩[c, d] = [c, b],
(c<= a)&(b<= d) → [a, b]∩[c, d] = [a, b],
(c<= a)&(d<= b) → [a, b]∩[c, d] = [c, d],
(c <= a)&(a <= d)&(d <= b) → [a, b]∩[c, d] = [a, d],
```

1.1. Стандартні диз'юнктивні базиси в прикладних алгебрах множин.

Означення 1. Розглянемо множину всіх булевих формул, тобто формул вигляду $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_m$ у сигнатурі логічних зв'язок $\Sigma_{Bool} = \{\wedge, \vee, -\}$. Позначимо X вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, а цю множину позначимо $\Omega_{Bool}(\bar{X})$. Нехай U — деяка конструктивна множина-універсум і $\bar{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ — скінченна система непорожніх підмножин множини U, тобто $A_i \subseteq U$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Кожній булевій формулі $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \in \Omega_{Bool}(\bar{X})$ поставимо у відповідність множину, задану формулою $f(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ у відповідній теоретико-множинній сигнатурі $\Sigma_{Set} = \{\cap, \cup, -\}$. Вочевидь, сукупність у такий спосіб визначених множин утворює алгебру з сигнатурою $\Sigma_{Set} = \{\cap, \cup, -\}$. Позначимо цю алгебру $\Omega_{Set}(\bar{A})$ та називатимемо її прикладною алгеброю множин з системою твірних $\bar{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$.

Зауважимо, що прикладна алгебра усюди визначена та містить $\varnothing$.

У застосунках крім теоретико-множинних операцій у конструктивних алгебрах множин визначені також операції $A - x$, $A + x$, константи $\varnothing, U$, теоретико-множинні відношення $x \in A$, $A \subset B$, $A = B$ та їхні похідні. У багатьох застосунках визначено також функції, які повертають максимальний чи головний елемент множини: $x = \max(A)$, $x = LeadItem(A)$.

Проблема належності. Нехай задано множину $C \subseteq U$. Проблема належності (membership problem) формулюється так: визначити $C \in \Omega(\overline{A})$. Отже, в задачі потрібно побудувати алгоритм розв'язання проблеми належності за заданим універсумом U, заданою системою твірних $\overline{A}$ і заданою множиною $C \subseteq U$.

Означення 2. Скінченна система непорожніх множин $\overline{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ називається диз'юнктивним базисом алгебри $\Omega(\overline{A})$, якщо

1) $B_i \cap B_j = \varnothing$ для всіх $i, j : i \neq j$;
2) $A_i = B_{i1} \cup B_{i2} \cup \ldots \cup B_{il_i}$ для всіх i;
3) $f_i(A_1, A_2, \ldots, A_m) = B_{i1} \cup B_{i2} \cup \ldots \cup B_{il_m}$ для всіх $f_i \in \Omega(\overline{X})$.

Диз'юнктивний базис (або просто базис) $\overline{B}$ системи $\overline{A}$ називається стандартним, якщо він містить мінімальну можливу кількість елементів.

Оскільки $B_i \cap B_j = \varnothing$, $B_i \cup B_j = B_i \oplus B_j$, властивості 2, 3 можна записати у вигляді $A_i = B_{i1} \oplus B_{i2} \oplus \ldots \oplus B_{il_i}$, $f_i(A_1, A_2, \ldots, A_m) = B_{i1} \oplus B_{i2} \oplus \ldots \oplus B_{il_m}$.

Властивості 2 і 3 еквівалентні. Це означає, що будь-який елемент алгебри множин $\Omega(\overline{A})$ може бути представленим як об'єднання (сума) деяких елементів базису B.

Якщо U — скінченна множина, то як базис можна вибрати систему одноелементних підмножин U: $B = \{\{u_1\}, \{u_2\}, \ldots, \{u_k\}\}$. Вочевидь, що представлення будь-якої множини $f(\overline{A})$ у розкладанні за базисними елементами, тобто у вигляді $f_i(A) = B_{i1} \cup B_{i2} \cup \ldots \cup B_{il_m}$, єдине.

У випадку, коли $U \in \overline{A}$, як базис можна вибрати також систему всіх елементарних кон'юнкцій $A_1^{\alpha_1} \cap A_2^{\alpha_2} \cap \ldots \cap A_m^{\alpha_m}$, де $A_i^{\alpha_i} = A_i$ для $\alpha_i = 0$, а $A_i^{\alpha_i} = \overline{A}_i$ для $\alpha_i = 1$.

Якщо в алгебрі $\Omega(\overline{A})$ $U \notin \overline{A}$, то позначимо $A\overline{B} \overset{\mathrm{df}}{=} A - B$. Тоді можна замість запису $A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{ik} - A_{ji} - A_{j2} - \ldots - A_{jl}$ використовувати його скорочення $A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \cap \ldots A_m^{\alpha_m}$, в якому хоча б один базисний елемент використаний без заперечення. Подання будь-якої множини $f(\overline{A})$ в розкладанні за цим базисом також єдине. Стандартний базис (СБ) дає змогу зробити таке представлення найбільш економним.

Базис $\overline{B}$, який містить повну множину елементарних кон'юнкцій, називатимемо повним диз'юнктивним базисом. У випадку $U \in \overline{A}$ маємо $|\overline{B}| = 2^m$, а у випадку $U \notin \overline{A}$ маємо $|\overline{B}| = 2^m - 1$.

Приклад 3. Припустимо, що потрібно побудувати стандартний диз'юнктивний базис системи множин A, B, C. Якщо ці множини мають спільний перетин, як на рис. 1, то

$$StBase = < ABC, \overline{A}BC, A\overline{B}C, AB\overline{C}, \overline{A}\,\overline{B}C, \overline{A}B\overline{C}, A\overline{B}\,\overline{C} >. \quad (1)$$

Якщо ж, наприклад, $AB = \varnothing$ (рис. 2), то $\overline{A}B = B$, $A\overline{B} = A$ і

$$StBase =$$
$$= < BC, AC, \overline{A}\,\overline{B}C, B\overline{C}, A\overline{C} >.$$

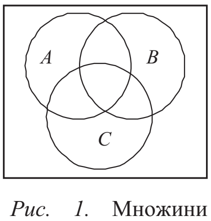

Рис. 1. Множини A, B, C у спільному розміщенні (1)

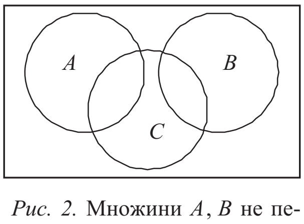

Рис. 2. Множини A, B не перетинаються

Розглянемо властивості стандартних диз'юнктивних базисів.

1. Кожен елемент СБ — це елементарна кон'юнкція B, представлення якої має вигляд

$$B_j = A_1^{\alpha_1} \cdot A_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot A_n^{\alpha_n}, \text{ де } A^{\alpha} = \begin{cases} t & \text{для } \alpha = 0, \\ A & \text{для } \alpha = 1, \\ \overline{A} & \text{для } \alpha = -1. \end{cases} \quad (2)$$

Це саме представлення можна записати у вигляді

$$B_j = A_{j1}^{\alpha_{j1}} \cdot A_{j2}^{\alpha_{j2}} \cdot \ldots \cdot A_{jk}^{\alpha_{jk}}, \text{ де } A^{\alpha} = \begin{cases} A & \text{для } \alpha = 1, \\ \overline{A} & \text{для } \alpha = -1. \end{cases} \quad (3)$$

Потужністю $|B_j|$ елемента назвемо число k у представленні (3).

2. У гіршому випадку для всіх елементів СБ маємо $|B_j| = m$. Тоді $|\overline{B}| = 2^m - 1$, а представлення елемента $f(\overline{A}) \in \Omega(\overline{A})$ у розкладанні за СБ — досконала диз'юнктивна нормальна форма $f(\overline{A})$.

3. Якщо $|B_j| = k < m$, то можна перейменувати змінні B_j так, що $B_j = A_1^{\alpha_1} \cdot A_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot A_k^{\alpha_k}$. У цьому разі для будь-якого $j > k$ $B_j \cdot A_j = 0$, $B_j \cdot \neg A_j = B_j$.

1.2. Алгоритми побудови стандартного базису. Нехай задано скінченну систему непорожніх підмножин $\overline{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ універсуму U. Якщо за цією системою побудувати стандартний диз'юнктивний базис $\overline{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$, то проблема належності розв'язується перевіркою рівності $StBase(\overline{A}, C) = StBase(\overline{A})$.

Розглянемо алгоритм побудови СБ системи множин $\overline{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$. Цей алгоритм є прикладом алгоритму критичної пари/поповнення.

Алгоритм 1 (випливає із системи множин $\overline{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$).

Крок 1. Нехай $B_i^{(0)} = A_i$, $\overline{B}^{(0)} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$.

Крок 2. Якщо у множині $\overline{B}^{(s)} = \{B_1^{(s)}, B_2^{(s)}, \ldots, B_l^{(s)}\}$ існують такі два елементи $B_i^{(s)}, B_j^{(s)}$, що $B_i^{(s)} \cap B_j^{(s)} \neq \varnothing$, то вважаємо, що $B_{l+1}^{(s)} = B_i^{(s)} \cap B_j^{(s)}$, та перетворюємо $B_i^{(s)}, B_j^{(s)}$:

$$B_i^{(s)} := B_i^{(s)} - B_{l+1}^{(s)}, \; B_j^{(s)} := B_j^{(s)} - B_{l+1}^{(s)}.$$

Елементи $B_i^{(s)}, B_j^{(s)}$ з непорожнім перетином називають критичною парою. Інакше кажучи, елементи критичної пари $B_i^{(s)}, B_j^{(s)}$ редукуються відніманням від кожної множини їхнього перетину. У результаті виконання цієї операції множини $B_i^{(s)}, B_j^{(s)}$ редуковані до неперетинних і система поповнена множиною $B_{l+1}^{(s)} = B_i^{(s)} \cap B_j^{(s)}$.

Ці перетворення виконуються за умови, що обчислені множини не порожні.

Крок 3. Якщо у множині $\overline{B}^{(s)} = \{B_1^{(s)}, B_2^{(s)}, \ldots, B_l^{(s)}\}$ існують два елементи $B_i^{(s)}, B_j^{(s)}$, що дорівнюють один одному: $B_i^{(s)} = B_j^{(s)}$, то алгоритм вилучає із системи $\overline{B}$ один із таких елементів.

На завершення кроків 2, 3 задамо $s := s + 1$ (перехід до наступного кроку перетворень).

Крок 4. Алгоритм завершує роботу, коли умови кроків 2, 3 нездійсненні.

Можна довести, що побудований у такий спосіб базис є стандартним. Алгоритм 1 використовує чотири типи операцій:

— пошук в системі $\overline{B}^{(s)}$ критичної пари множин;

— поповнення системи $\overline{B}^{(s)}$ перетином множин критичної пари;

— редукування системи $\overline{B}^{(s)}$ відніманням від даних множин їхнього перетину;

— мінімізації системи $\overline{B}^{(s)}$ вилученням із $\overline{B}^{(s)}$ одного з двох однакових її елементів.

Цей алгоритм і міркування можна застосовувати в загальній ситуації. Потрібно тільки виконання умови, щоб алгебра множин $\Omega(\overline{A})$ над універсумом U була конструктивною.

Спеціальний алгоритм побудови стандартного базису. Алгоритм 1 побудови СБ має загальний характер. У деяких випадках, наприклад в алгебрі лінійних напівалгебраїчних множин [11, 12], цей алгоритм неефективний. Для алгебри множин його можна уточнити, а саме: оскільки будь-який стандартний диз'юнктивний базис складається з елементарних кон'юнкцій, обчислення можна провести за таким алгоритмом.

Алгоритм 2.

Крок 1. Доповнимо систему твірних універсумом $U: \overline{A} = \{U, A_1, A_2, \dots, A_m\}$.

Крок 2. $\overline{B}^{(0)} = \{U\}$.

Крок 3. Нехай $\overline{B}^{(j)} = \{B_1^{(j)}, B_2^{(j)}, \dots, B_k^{(j)}\}$ — стандартний базис $\overline{A}^{(j)} = \{U, A_1, A_2, \dots, A_j\}$. Тоді для всіх пар вигляду $(B_i^{(j)}, A_{j+1})$, $i = 1, 2, \dots, k$, виконуються перетворення:

$$B_i^{(j)} \cap A_{j+1} = \varnothing \to B_i^{(j+1)} = B_i^{(j)} \ // \ B_i^{(j)} \cap \overline{A}_{j+1} = B_i^{(j)},$$

$$B_i^{(j)} \cap \overline{A}_{j+1} = \varnothing \to B_i^{(j+1)} = A_{j+1} \ // \ B_i^{(j)} \cap A_{j+1} = A_{j+1}$$
$$// \ B_i^{(j)} \cap \overline{A}_{j+1} \neq \varnothing, \ B_i^{(j)} \cap A_{j+1} \neq \varnothing.$$

Задача 1. Представлення елементів. Представити елемент $f(\overline{A}) \in \Omega(\overline{A})$ у розкладанні за диз'юнктивним базисом $\overline{B} = (B_1, B_2, \dots, B_k)$, тобто у вигляді

$$f(\overline{A}) = B_{i1} \cup B_{i2} \cup \dots \cup B_{il_i}. \qquad (4)$$

Розв'язання. Нехай

$$f(\overline{A}) = B_{i1} \cup B_{i2} \cup \dots \cup B_{il_i}, \ B_j(\overline{A}) = A_{j1}^{\alpha_{j1}} \cdot A_{j2}^{\alpha_{j2}} \cdot \dots \cdot A_{jk}^{\alpha_{jk}}, \ j = 1, 2, \dots, n. \qquad (5)$$

Покладемо $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Набір множин у представленні $B_j(\overline{A})$ позначимо $\overline{A}_j$, а відповідний набір змінних — X_j. Тоді функцію $f(X)$ можна розкласти за СБ, тобто записати у вигляді

$$f(X) = B_1(X_1) \cdot f_1(X - X_1) \vee \dots \vee B_j(X_j) \cdot f_j(X - X_j) \vee \dots$$
$$\dots \vee B_k(X_k) \cdot f_k(X - X_k), \qquad (6)$$

до того ж або $f_j(\overline{A} - \overline{A}_j) \equiv U$, або $f_j(\overline{A} - \overline{A}_j) \equiv \varnothing$, а $B_i(A_i) = B_i$. Тоді

$$f(\overline{A}) = B_{i1}(A_{i1}) \vee \dots \vee B_{ij}(A_{ij}) \vee \dots \vee B_{ik}(A_{ik}), \qquad (7)$$

$$f_1(A - A_{i1}) = U, \dots, f_{ij}(A - A_{ij}) \equiv U, \dots, f_{ik}(A - A_{ik}) \equiv U.$$

Визначимо правила побудови представлень (6) і (7).

За базисним елементом $B_j(X) = x_1^{\alpha_{j1}} \cdot x_2^{\alpha_{j2}} \cdot \ldots x_m^{\alpha_{jm}}$, де

$$x_i^{\alpha_{ji}} = \begin{cases} \_, & \alpha_{ji} = 0,\ x_i \text{ не входить у } B_j, \\ x_i, & \alpha_{ji} = 1,\ x_i \text{ входить у } B_j \text{ без заперечення}, \\ \neg x_i, & \alpha_{ji} = -1,\ x_i \text{ входить у } B_j \text{ із запереченням}, \end{cases}$$

обчислюємо $f_j(X - X_j)$. Для цього у формулу функції $f(X) = f(X_j, X - X_j)$ підставляємо замість кожної змінної набору X_j логічне значення λ_{ji} з $\{0, 1\}$. У результаті отримаємо для кожного базисного елемента функцію $f_j(X - X_j)$, для якої має місце (6). Вочевидь, що у функції $f_j(X - X_j)$ у базисний набір представлення $f(X)$ входять ті B_j, для яких $f_j(X - X_j) \equiv 1$.

Підставимо це значення у рівність $f(\overline{A}) = B_{i1} \cup B_{i2} \cup \ldots \cup B_{il_i}$. Тоді, вочевидь, $Val(A_{jn}^{\alpha_{jn}}) = 1$, $Val(B_{ij}) = 1$, $Val(B_{ik}) = 0$ для $k \neq i$ і

$$Val(f(\overline{A} | B_{ij})) = 1 \tag{8}$$

на наборі логічних значень, визначеному диз'юнктивним членом B_{ij}. Перейдемо у формулі (8) до логічного вигляду. Для спрощення позначень вважатимемо, що $k < m$ і змінні перейменовані так, що $B_j = A_1^{\alpha_1} \cdot A_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot A_k^{\alpha_k}$. Тоді у логічному вигляді $Val(f(X \mid B_{ij}(X))) = f_j(x_{k+1}, \ldots, x_m)$ і $f_j(x_{k+1}, \ldots, x_m) \equiv 1$. Отримаємо $Val(f(X \mid B_{ij}(X)) = 1$. Можна записати диз'юнктивний член $f(X)$ у такий спосіб:

$$x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{\alpha_k} \cdot f_j(x_{k+1}, \ldots, x_m) = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{\alpha_k} \cdot x_{k+1} \cdot f_j(t, x_{k+2}, \ldots, x_m) +$$
$$+ x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{\alpha_k} \cdot \neg x_{k+1} \cdot f_j(f, x_{k+2}, \ldots, x_m).$$

За властивістю 3 отримаємо

$$x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{\alpha_k} \cdot f_j(x_{k+1}, \ldots, x_m) = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{\alpha_k} \cdot f_j(f, x_{k+2}, \ldots, x_m).$$

Застосуємо ці перетворення до змінних $x_{k+2}, \ldots, x_m$ і отримаємо

$$x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{\alpha_k} \cdot f_j(x_{k+1}, \ldots, x_m) = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{\alpha_k} \cdot f_j(f, f, \ldots, f).$$

Отже, набір диз'юнктивних елементів розкладу (4) містить ті й тільки ті елементи B_i стандартного базису, для яких $f_j(f, f, \ldots, f) = 0$.

Якщо диз'юнктивний базис $\overline{B}$ знайдено, задача представлення має суто логічний розв'язок, загальний для всіх алгебр множин, який використовує лише формулу $f(X)$.

2. ЗАДАЧІ ПРИКЛАДНИХ АЛГЕБР МНОЖИН

2.1. Алгебра скінченних множин. Розглянемо задачу побудови СБ системи скінченних множин, якщо універсум U лінійно впорядкований і множини A_i представлено впорядкованими списками елементів. У цьому разі алгоритми теоретико-множинних операцій і відношень мають лінійну обчислювальну складність за часом щодо суми потужностей множин-аргументів. Вочевидь, що покращити ці алгоритми не можна.

Задача 2. Проблема належності в алгебрі скінченних множин. Нехай $C \subset U$. Як було зазначено вище, алгоритмічна проблема полягає у визначенні істинності відношення $C \in \Omega(\overline{A})$. Розширений алгоритм повинен будувати функцію f таку, що $C = f(\overline{A})$. Якщо стандартний диз'юнктивний базис побудовано, то C можна представити у вигляді $C = B_{i1} \cup B_{i2} \cup \ldots \cup B_{il_i}$.

Отже, алгоритм розв'язання проблеми належності полягає у розкладанні C за стандартним базисом.

Розв'язання. Нехай U — скінченна множина-універсум, $\overline{A} = \{A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_m\}$, $\Omega(\overline{A})$ — прикладна алгебра множин. Припустимо, що ДБ $\overline{B} = (B_1, B_2, \ldots, B_k)$ системи $\overline{A}$ побудовано, до того ж базисні елементи та множина C представлені впорядкованими (за спаданням) списками. Позначимо $LeadItem(B_j)$ найбільший елемент множини B_j. Тоді, використовуючи порядок на множині $\{LeadItem(B_j)\}$, множину базисних елементів можна впорядкувати: $B_1 > \ldots > B_j > \ldots > B_k$.

Нехай $C = \{c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_l\}$ і $\{c_1 > \ldots > c_i > \ldots > c_l\}$. Тоді, якщо $C \in \Omega(\overline{A})$, існує таке j, що $c_1 = LeadItem(B_j)$, і тоді потрібно перевірити включення $B_j \subseteq C$.

Алгоритм 3.

Крок 1. Ініціюємо загальний список L елементів диз'юнктивного базису розкладання C та включимо множину B_j до загального списку:

$L := \varnothing$; $d := 1$; $j := 1$;
While $LeadItem(B_j) <> c_1$ *do* $j := j + 1$;
$L := B_j$.

Крок 2. Припустимо, що перші d елементів множини C та списку L вже оброблено. Тоді якщо $c_{d+1} \in L$, то $d := d + 1$, інакше c_{d+1} має дорівнювати деякому наступному B_j:

While $c_{d+1} <> LeadInem(B_j)$ *do* $j := j + 1$;
$L := L \cup B_j$; $d := d + 1$.

Тоді елементи цього базису можна впорядкувати так, щоб у представленні $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik_i}\}$ одержати $a_{i1} > a_{i2} > \ldots > a_{ik_i}$.

Оскільки операція об'єднання та перегляд списку L виконуються за лінійний час, алгоритм розв'язання проблеми належності за таким диз'юнктивним базисом виконується за лінійний час.

2.2. Алгебра множин Лебега на числовій осі (алгебра *LSet* лінійних напівалгебраїчних множин розмірності 1).

Означення 3. Елемент алгебри *LSet* є скінченним об'єднанням обмежених числових інтервалів на числовій осі над полем *Rat* з таким конструктором і контекстними умовами:

$LSet\ S = Segment\ s + + S \mid s$;
$s = [Rat\ a, Rat\ b] \mid [a, b) \mid (a, b] \mid (a, b)$;
$leadInt(S) = s$; $LeadInt(s) > S$.

Розглянемо розв'язання задачі належності в алгебрі Лебега *LSet*.

Задача 3. Проблема належності в алгебрі *LSet*.

Універсум U — це множина різноманітних числових множин Лебега. Множина Лебега визначається як скінченне об'єднання числових проміжків, тобто має вигляд $A = s_1 + + s_2 + + \ldots + + s_k$, де s_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, — відкриті, напіввідкриті або замкнені числові проміжки, як в означенні 3.

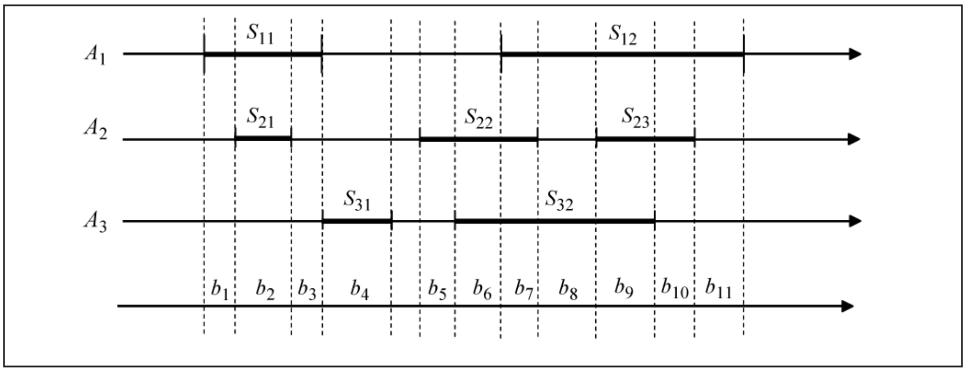

Рис. 3. Графічна ілюстрація задачі 2

Система $\overline{A} = \{A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_m\}$ — це система множин Лебега, $\Omega(\overline{A})$ — алгебра множин Лебега і $C \in U$. Оскільки алгебра *LSet* замкнена стосовно основних теоретико-множинних операцій, стандартний базис можна отримати, застосувавши алгоритм 1.

Отже, розв'язання задачі належності можна отримати, звівши цю задачу до задачі 2. Проілюструємо метод зведення на рис 3. Перші три числові осі ілюструють три множини Лебега. Вони впорядковані за зростанням лівих кінців старших проміжків s_{11}, s_{21}, s_{31}. Алгоритм 1 обчислює стандартний базис $\overline{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7\}$ системи $\overline{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$. Метод зведення задачі до предметної області задачі 2 — алгебри скінченних множини полягає у тому, що кожному елементарному проміжку, зображеному на четвертій числовій осі, ставиться у відповідність літерал b_j, $j = 1, 2, \ldots, 11$, тому елементи стандартного базису представлено скінченними множинами літералів:

$$B_1 = A_1 \cdot \neg A_2 \cdot \neg A_3 = \{b_1, b_3, b_{11}\},\ B_2 = A_1 \cdot A_2 \cdot \neg A_3 = \{b_2, b_{10}\},$$

$$B_3 = \neg A_1 \cdot \neg A_2 \cdot A_3 = \{b_4\},\ B_4 = \neg A_1 \cdot A_2 \cdot \neg A_3 = \{b_5\},$$

$$B_5 = \neg A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = \{b_6\},\ B_6 = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = \{b_7, b_9\},$$

$$B_7 = A_1 \cdot \neg A_2 \cdot A_3 = \{b_8\}.$$

2.3. Алгебра лінійних напівалгебраїчних множин розмірності 2. Нехай $\overline{L} = (L_1, L_2, \ldots, L_m)$ — набір лінійних нерівностей від змінних x, y з раціональними коефіцієнтами. Вважатимемо, що L_j — розв'язні відносно y, тобто мають вигляд $y < ax + b$, $y \le ax + b$, $y > ax + b$, $y \ge ax + b$ або $x < a$, $x \le a$, $x > a$, $x \ge a$.

Означення 4. Лінійною напівалгебраїчною множиною (ЛНАМ) назвемо множину — елемент алгебри $\Omega(\overline{L})$: $\{f(L_1, \ldots, L_m) \mid f \in \Omega(X)\}$.

Поняття канонічної форми та алгоритм обчислення канонічних форм ЛНАМ у *n*-вимірному просторі над *Rat* наведено у роботах [11–13]. Далі викладено новий алгоритм розв'язання цієї задачі в окремому випадку, який використовує алгоритм критичної пари/поповнення. Ми розглядатимемо цей алгоритм для ЛНАМ на площині, але неважко цей алгоритм узагальнити на випадок просторів довільної розмірності.

Означення 5. Трапецоїдом назвемо множину вигляду

$$T = \{(x, y) \mid a_1 x + b_1 \prec y \prec a_2 x + b_2,\ c \prec x \prec d\},$$

де символ $\prec$ означає знак строгої або нестрогої нерівності. Позначимо

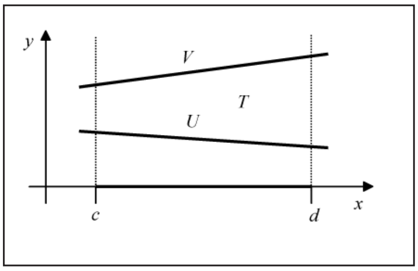

Рис. 4. Трапецоїд на площині

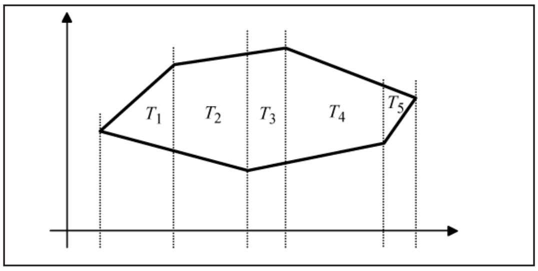

Рис. 5. Розбиття поліедра на трапецоїди

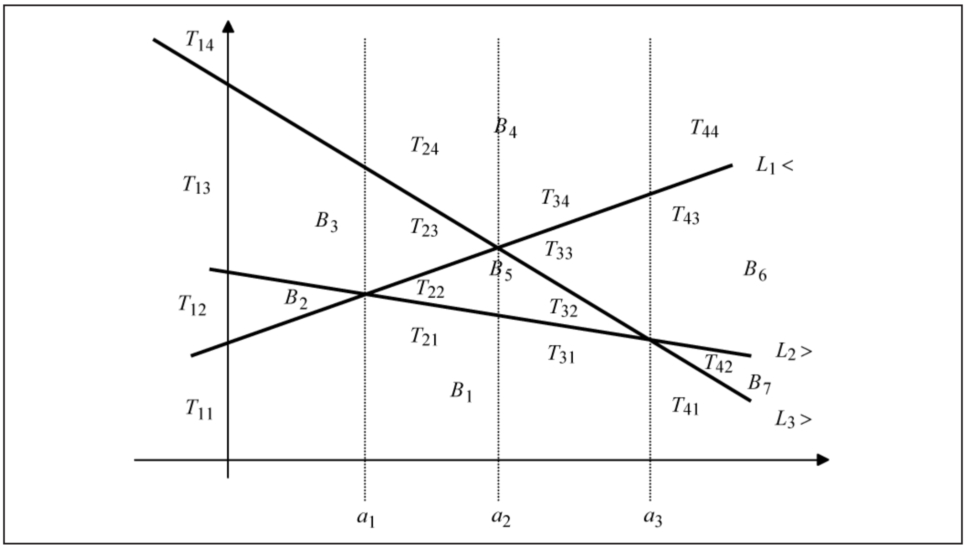

Рис. 6. Розбиття площини на елементи стандартного базису та розбиття базисних елементів на трапецоїди

$U \overset{\text{df}}{=} y \succ a_1 x + b_1$, $V \overset{\text{df}}{=} y \prec a_2 x + b_2$ і запишемо множину T у вигляді $T = [U, y, V].[c, x, d]$. Множину T назвемо трапецоїдом (рис. 4).

Трапецоїд позначимо $T = S_y.S_x$. Зазначимо, що S_x — проєкція T на вісь $0x$.

Довільна опукла напівлінійна множина (поліедр) може бути представлена у вигляді розбиття на трапецоїди так, як це показано на рис. 5.

На рис. 6 зображено розбиття площини на сім базисних ($B = \{B_1, B_2, \ldots, B_7\}$) елементів трьома прямими: L_1, L_2, L_3. Кожен базисний елемент розбито на трапецоїди $T_{11}, T_{12}, \ldots, T_{44}$ вертикальними пунктирними прямими, a_1, a_2, a_3 — проєкції точок попарного перетину цих прямих на вісь $0x$. Унаслідок розбиття отримаємо

$$B_1 = T_{11} + (T_{21} + T_{31}) + T_{41},\ B_2 = T_{12},\ B_3 = T_{13} + T_{23},$$

$$B_4 = (T_{14} + T_{24}) + (T_{34} + T_{44}),\ B_5 = T_{22} + T_{32},\ B_6 = T_{33} + T_{43},\ B_7 = T_{42}.$$

Зауважимо, що у представленнях $B_1 = T_{11} + (T_{21} + T_{31}) + T_{41}$ і $B_4 = (T_{14} + T_{24}) + (T_{34} + T_{44})$ трапецоїди в дужках можна редукувати відповідно до правила

$$Sy.[a, x, b] + + Sy.[b, x, c] = Sy.[a, x, c]. \tag{9}$$

Цей приклад демонструє алгоритм 2 побудови ДБ базису через розбиття площини на трапецоїди. Зазначимо ключові комбінаторні формули.

1. Нехай m — кількість твірних алгебри $\Omega(L_1, \ldots, L_m)$. Тоді $|\overline{B}| \leq$ $\leq m(m+1)/2+1$.

2. Нехай k — кількість проєкцій вигляду S_x алгебри $\Omega(L_1, \ldots, L_m)$. Тоді $|k| \leq m(m-1)/2+1$.

3. Нехай t — кількість трапецоїдів із загальною проєкцією S_x. Тоді $t \leq m+1$.

4. Нехай Σt — загальна кількість трапецоїдів розбиття площини. Тоді $\Sigma t \leq (m^3 + m + 2)/2$.

Алгоритм 2 обчислення диз'юнктивного базису потребує уточнення. Нехай площина розбита на елементи диз'юнктивного базису m прямими і

$$\overline{B} = (B_1, \ldots, B_j, \ldots, B_k), \; B_j = T_{j1} + + \ldots + + T_{ji} + + \ldots + + T_{jk_j}.$$

Припустимо також, що базисні множини оброблено алгоритмом, який додає $(m+1)$-у пряму L_{m+1} до твірних алгебри $\Omega(\overline{L})$. Вочевидь, якщо пряма не перетинає B_i, то цей базисний елемент є елементом нового базису. В іншому випадку B_i розбивається прямою L_{m+1} на дві частини, кожна з яких є новим елементом нового базису. У разі необхідності після розбиття потрібно застосувати операцію редукування (9).

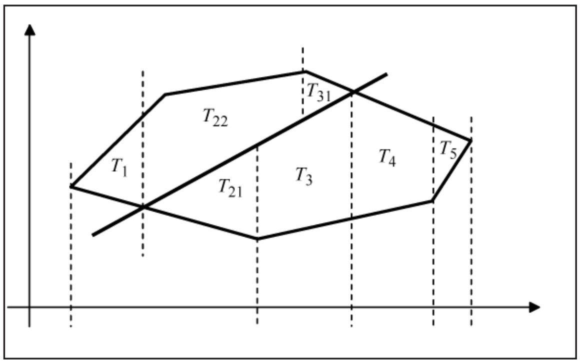

Рис. 7. Розбиття елемента базиса новою прямою на дві частини: $B = B' + + B''$, $B' = T_1 + T_{22} + T_{31}$, $B'' = T_{21} + T_3 + T_4 + T_5$

Пряма перетинає тільки дві шапки трапецоїдів базисного елемента, решта трапецоїдів розсікаються навпіл повністю (рис. 7). Оброблення кожного трапецоїда виконується за час $O(1)$, а побудова СБ (у гіршому випадку) — за час $O(m^3)$.

Задача 4. Побудова канонічної форми множини $f(L_1, L_2, \ldots, L_m)$.

Зазначимо, що ця задача полягає у визначенні всіх базисних елементів, які представляють множину $f(L_1, L_2, \ldots, L_m)$:

$$f(L_1, L_2, \ldots, L_m) = B_{i1} + + B_{i2} + + \ldots + + B_{ik_f}.$$

Розв'язання. Базисні елементи мають вигляд $B_i = T_{i1} + + \ldots + + T_{ij_i}$. Виберемо у кожному з базисних трапецоїдів $T_{11}, T_{21}, \ldots, T_{n1}$ по одній точці: $A_{11}(u_1, v_1)$, $A_{21}(u_2, v_2), \ldots, A_{n1}(u_n, v_n)$. Запишемо формулу f у вигляді $f(A_1(u,v), A_2(u,v), \ldots, A_m(u,v))$ і підставимо замість u, v координати u_i, v_i. У результаті кожна нерівність $L_j(u_i, v_i)$ отримає логічне значення $l_i \in \{0,1\}$.

Обчислимо логічне значення $f(l_1, l_2, \ldots, l_m) = l_f$, до того ж $l_f = 1$ тоді і тільки тоді, коли $B_i \in \{B_{i1}, B_{i2}, \ldots, B_{ik_f}\}$. Позначимо $||f||$ довжину формули f. Тоді складність обчислення канонічної форми $f(L_1, L_2, \ldots, L_m) = B_{i1} + + B_{i2} + + \ldots$ $\ldots + + B_{ik_f}$ у гіршому випадку дорівнюватиме $T(f, m) = O(||f|| \cdot m^2)$.

2.4. Алгебра кіл Ейлера. Нехай $\overline{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ — набір квадратичних нерівностей від змінних x, y з раціональними коефіцієнтами a, b, r вигляду $C = (x-a)^2 + (y-b)^2 \prec r^2$, де символ $\prec$ позначає строгу або нестрогу нерівність. Отже, кожна формула C_j являє собою коло з центром (a, b) радіуса r.

Надалі коло C представлятимемо у вигляді подвійної нерівності:

$$b-\sqrt{r^2-(x-a)^2} \prec y \prec b+\sqrt{r^2-(x-a)^2}.$$

Формулу вигляду $b \pm \sqrt{r^2-(x-a)^2}$ позначимо $C^{\pm}(a,b,r)$. Символ $\pm$ означає тут або $+$, або $-$, а $\prec$ означає строгу або нестрогу нерівність.

Означення 6. Елементом алгебри кіл Ейлера назвемо множину — елемент алгебри $\Omega(\overline{C})$: $\{f(C_1,\ldots,C_m) \mid f(X) \in \Omega(X)\}$.

Зауваження 1. Ця назва асоційована з поняттям кіл Ейлера — графічною ілюстрацією на площині взаємного розташування множин.

Нижче наведено алгоритм побудови стандартного диз'юнктивного базису алгебри $\Omega(\overline{C})$, цілком аналогічний алгоритму 3.

Означення 7. Назвемо C-трапецоїдом множину вигляду

$$T=\{(x,y) \mid C^{\pm}(a_1,b_1,r_1,x) \prec y \prec C^{\pm}(a_2,b_2,r^2,x),\ c \prec x \prec d)\},$$

якщо для будь-якого $x \in [c,d]$ виконується $C^{\pm}(a_1,b_1,r_1,x) \le C^{\pm}(a_2,b_2,r^2,x)$. Уведемо такі позначення: $U \overset{\text{df}}{=} C^{\pm}(a_1,b_1,r_1,x)$, $V \overset{\text{df}}{=} C^{\pm}(a_2,b_2,r^2,x)$. Запишемо T у вигляді $T=[U,y,V].[c,x,d]$. C-трапецоїд зображено на рис. 8.

Скорочено C-трапецоїд позначатимемо $T=S_y.S_x$. Дуги U, V окружностей назвемо нижньою і верхньою шапками C-трапецоїда. Зазначимо, що S_x — проєкція T на вісь $0x$. Залежно від напряму опуклості шапок існує чотири типи C-трапецоїдів, які зображено схематично на рис. 9.

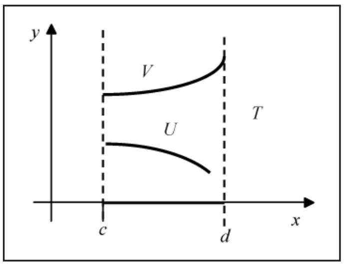

Рис. 8. C-трапецоїд на площині

Довільну множину Ейлера — елемент ДБ представимо у вигляді розбиття на C-трапецоїди. На рис. 10 зображено два кола, що перетинаються, і їхній розклад за стандартним диз'юнктивним базисом, елементи якого розбито на C-трапецоїди. (Для більш наочної ілюстрації масштаби осей координат різні.) На рис. 10 зображено розклад системи кіл C_1, C_2 на три базисних елементи: B_1, B_2, B_3. Дві вертикальні прямі L_1, L_2 проходять через дві точки перетину кіл. Дві пари вертикальних прямих (L_3, L_4), (L_5, L_6) дотичні до кіл. Ці шість прямих обмежують C-трапецоїди, розбиваючи вісь OX на п'ять проєкцій $[a_i, x, a_{i+1}]$, $i=1,2,\ldots,5$:

$$C_1 = B_1 + + B_2,\ C_2 = B_2 + + B_3,$$

$$B_1 = T_1 + + T_2 + + T_4,$$

$$B_2 = T_3 + + T_5 + + T_8,$$

$$B_3 = T_6 + + T_7 + + T_9.$$

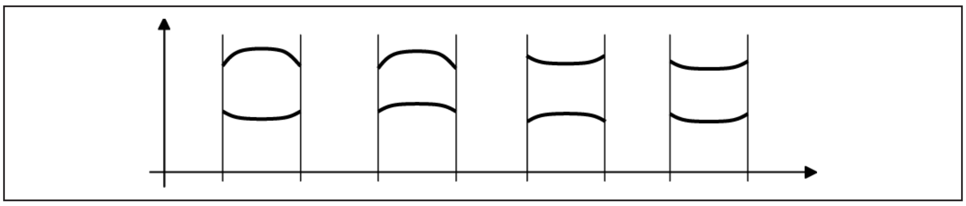
Рис. 9. Чотири типи C-трапецоїдів

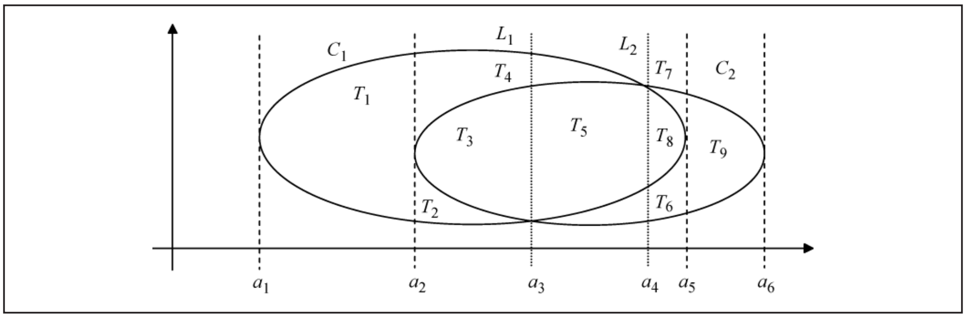

Рис. 10. Розклад системи кіл за стандартним базисом та розбиття базисних елементів на C-трапецоїди

Зауважимо, що трапецоїди T_4, T_6 отримано як результат операції редукції:

$$[U,\ y, V].[c, x\ , d] + +[U,\ y, V].[d, x\ , e] = [U,\ y, V].[c, x\ , e].$$

Наведемо ключові комбінаторні формули.

1. Нехай m — кількість твірних алгебри $\Omega(C_1, \dots, C_m)$. Тоді $|\overline{C}| \le m^2 - m + 1$.

2. Нехай t — кількість C-трапецоїдів із загальною проєкцією S_x до редукування. Тоді $t \le 2m - 1$.

3. Нехай Σt — загальна кількість C-трапецоїдів розбиття площини. Тоді $\Sigma t \le (m^2 + m)(2m - 1)$.

4. Нехай k — кількість проєкцій вигляду S_x алгебри $\Omega(C_1, \dots, C_m)$. Тоді $k \le m^2 + m$.

Алгоритм 2 обчислення диз'юнктивного базису потребує уточнення. Дійсно, нехай площина розбита на елементи диз'юнктивного базису прямими і

$$|\overline{B}| = (B_1, \dots, B_j, \dots, B_k),\ B_j = T_{j1} + + \dots + + T_{ji} + + \dots + + T_{jk_j}.$$

Припустимо також, що базисні множини вже оброблено алгоритмом, який додає $m+1$-е коло C_{m+1} до твірних алгебри $\Omega(\overline{C})$. Вочевидь, що коли коло C_{m+1} не перетинає B_i, базисний елемент залишається елементом нового базису. В іншому випадку B_i розбивається дугою кола C_{m+1} на кілька частин, кожна з яких є елементом нового базису. У разі необхідності після розбиття потрібно застосувати операцію редукції (9).

На рис. 11 зображено поточний базисний елемент $B = T_1 + + T_2 + + T_3 + + T_4$, розділений дугою нового кола C на дві частини — два нових базисних елементи:

$$B' = T_1 + + T_{21} + + T_{22} + T_{23} + + T_{31} + + T_{41},\ B'' = T_{23} + + T_{32} + + T_{42}.$$

Дуга C перетинає верхню шапку C-трапецоїда базисного елемента T_2, а C-трапецоїди T_3, T_4 розсікаються цією дугою навпіл (рис. 11). Обчислення нових C-трапецоїдів — задача аналітичної геометрії на площині. Оброблення кожного трапецоїда виконується за час $O(1)$, а побудова СДВ у гіршому випадку — за час $O(m^3)$.

Зазначимо, що задача 4 побудови канонічної форми множини $f(C_1, C_2, \dots, C_m)$ розв'язується так само, як і задача 3.

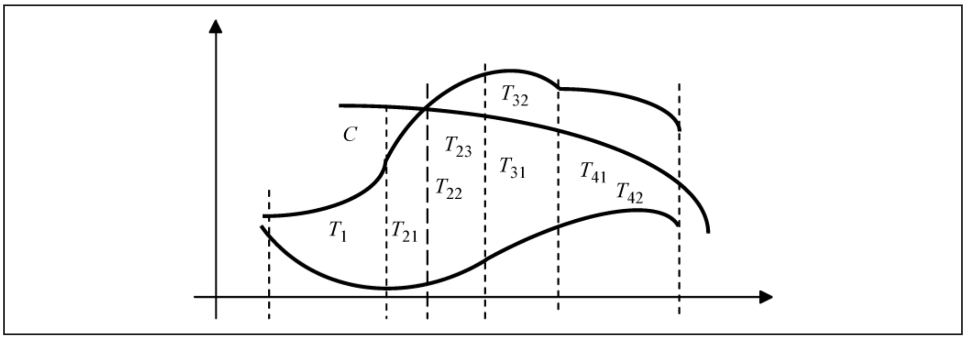

Рис. 11. Розбиття базисного елемента дугою нового кола на частини

ВИСНОВКИ

У статті розглянуто спеціальний клас конструктивних алгебр множин — прикладні алгебри множин. Для прикладних алгебр множин визначено поняття стандартного диз'юнктивного базису, який будується алгоритмом критичної пари/поповнення.

Якщо для алгебри побудовано СБ, багато алгоритмічних задач, таких як задача належності, можна розв'язувати ефективно. Цей висновок проілюстровано кількома прикладами.

Отже, поняття СБ та алгоритм критичної пари/поповнення, які добре відомі в конструктивній теорії поліноміальних ідеалів, виявляються ефективно застосовними у новій предметній галузі.

На наш погляд, слід продовжити як теоретичні дослідження, формулюючи поняття стандартних базисів та алгоритмів критичної пари/поповнення для інших класів конструктивних алгебр, так і практичну реалізацію та застосування результатів, отриманих у цій роботі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Buchberger B. A theoretical basis for the reduction of polynomials to canonical forms. *ACM SIGSAM Bulletin*. 1976. Vol. 10, N 3. P. 19–29.
2. Buchberger B. Basic features and development of the Critical-pair/Completion procedure. *Lect. Notes Comput. Sci.* 1985. Vol. 202. P. 1–45.
3. Knuth D.E., Bendix P.B. Simple word problems in universal algebras. In: Computational Problems in Abstract Algebra. J. Leech (ed.). Oxford: Pergamon Press, 1970. P. 263–297.
4. Cox D.A., Little J., O'Shea D. Ideals, varieties, and algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. 4th ed. Springer, 2015. 646 p.
5. Buchberger B., Collins G.E., Loos R. Computer algebra: Symbolic and algebraic computation. Springer, 2012. 283 p.
6. Winkler F. The Church–Rosser property in computer algebra and special theorem proving: An investigation of critical–pair/completion algorithms (Dissertationen der Johannes Kepler-Universität Linz). Austria, VWGO Wien, 1984. 193 p.
7. Lvov M. About one algorithm of program polynomial invariants generation. *Proc. Workshop on Invariant Generation, WING 2007*. 2007. P. 85–99.
8. Lvov M.S. Polynomial invariants of linear cycles. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2010. Vol. 46, N 4. P. 660–668.

9. Lvov M. Computations in extensions of multisorted algebras. *CEUR Workshop Proceedings*. 2019. Vol. 2393. P. 497–512.

10. Львов М.С. Об одном подходе к реализации алгебраических вычислений: вычисления в алгебре высказываний. *Вестник Харк. нац. ун-та*. 2009. № 863. С. 157–168.

11. Lvov M., Peschanenko V., Letychevskyi O., Tarasich Y., Baiev A. Algorithm and tools for constructing canonical forms of linear semi-algebraic formulas. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2018. Vol. 54, N 6. P. 993–1002. https://doi.org/10.1007/s10559-018-0102-4.

12. Lvov M., Peschanenko V., Letychevskiy O., Tarasich Y. The canonical forms of logical formulae over the data types and their using in programs verification. *CEUR Workshop Proceedings.* 2018. Vol. 1844. P. 536–554.

13. Lvov M.S. Algebraic approach to the problem of solving systems of linear inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2010. Vol. 46, N 2. P. 326–339.

M.S. Lvov

DISJUNCTIVE BASES OF APPLIED ALGEBRAS OF SETS AND THEIR USE IN PROBLEMS OF COMBINATORIAL GEOMETRY

Abstract. In this paper, the concepts of applied algebra of sets and a standard disjunctive basis of an applied algebra of sets are introduced. The algorithm for constructing a standard disjunctive basis is described. By analogy with Buchberger's algorithm in polynomial ideal theory and Knuth–Bendix's algorithm in the theory of semi groups of words, it is called the critical pair/completion algorithm. Examples of various applied algebras of sets are provided. They include the algebra of finite sets in realization on ordered lists, the Lebesgue algebra of sets on the number axis, algebra of linear semi-algebraic sets on a plane, and algebra of circles on a plane, called the Euler algebra. Implementations of the critical pair/completion algorithm are also considered. The main result of the study is that the presence of a standard disjunctive basis makes it possible to construct time-efficient (polynomial) algorithms for solving basic problems in applied algebras of sets, such as the representation problem, membership problem, equality problem, emptiness problem, etc. Algorithms in the algebra of linear semi-algebraic sets on a plane and the Euler algebra on a plane can be extended to more general applied algebras of sets.

Keywords: applied algebra of sets, algorithm of critical pair/completion, combinatorial geometry, membership problem, representation problem.

Надійшла до редакції 26.11.2021