



СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ

УДК 519.872

М.Ю. КУЗНЕЦОВ

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
Фізико-технічний інститут Національного технічного університету України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна,
e-mail: *kuznetsov2016@icloud.com*.

І.М. КУЗНЕЦОВ

Фізико-технічний інститут Національного технічного університету України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна,
e-mail: *sea_hawk@icloud.com*.

А.А. ШУМСЬКА

Фізико-технічний інститут Національного технічного університету України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна,
e-mail: *shumska-aa@ukr.net*.

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДВОХ МОДИФІКОВАНИХ МЕТОДІВ ПРИСКОРЕНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЙМОВІРНОСТІ ВІДМОВИ СИСТЕМИ РАНГОВОЇ СТРУКТУРИ

Анотація. Розглянуто модель відновлюваної резервованої системи рангової структури, функціонування якої з погляду надійності визначається розподілами загального виду. Наведено два модифікованих методи прискореного моделювання ймовірності відмови системи у фіксованому проміжку часу. Висновки щодо точності цих методів залежно від характеристик надійності елементів системи проілюстровано числовим прикладом.

Ключові слова: надійність, резервована система з відновленням, ранг, моделювання із забороною, метод суттєвої вибірки, оцінка, дисперсія.

ВСТУП

Процес становлення методів математичної теорії надійності можна поділити на три етапи. На початковому етапі науковці віддавали перевагу аналітичним методам, метою яких було встановлення явної аналітичної формули або деякої системи рівнянь для знаходження невідомої характеристики. Цей підхід застосовували для відносно простих моделей, адекватність яких реальним системам можна поставити під сумнів. При цьому, отримавши систему рівнянь (наприклад, у термінах перетворень Лапласа–Стілтєса), математики вважали свою задачу виконаною, хоча саме тут і починалися труднощі для інженерів, які намагалися скористатись цими результатами. Внаслідок підвищення надійності систем виникла потреба у створенні наближених асимптотичних методів, точність яких є тим вищою, чим вищою є надійність системи. При цьому суттєво ускладнились як самі моделі, так і математичний апарат їхнього дослідження [1–5]. На жаль, сфера практичних застосувань асимптотичних оцінок виявилася також доволі обмеженою. Це зумовлено як складністю математичного апарату, так і відсутністю прийнятних з практичного погляду оцінок похибки апроксимації.

© М.Ю. Кузнецов, І.М. Кузнецов, А.А. Шумська, 2022

Тому, незважаючи на суттєве удосконалення математичної теорії, основним інструментом дослідження в інженерній практиці став метод Монте-Карло, інтенсивний розвиток якого припадає на 60-ті роки минулого століття. Цьому сприяв і бурхливий прогрес у галузі комп'ютерної техніки, а також поява нових ефективних інформаційних технологій.

Водночас майже одразу був помічений основний недолік безпосереднього моделювання надійності системи методом Монте-Карло: для досягнення потрібної точності оцінки час моделювання стрімко зростає у міру підвищення надійності елементів системи. Є два принципово різних підходи до підвищення ефективності моделювання. Один з них пов'язаний зі створенням більш досконалої швидкодіючої елементної бази та використанням багатопроекторних обчислювальних комплексів (як-от СКІТ-3 або СКІТ-4 в Інституті кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України). Альтернативний підхід ґрунтується на розробленні спеціальних алгоритмів моделювання, спрямованих на зменшення дисперсії оцінки. Саме цей напрям досліджень є домінуючим протягом останніх 30 років у математичній теорії надійності. Також варто зауважити, що алгоритми моделювання ґрунтуються на законі великих чисел і тому найкраще підходять для розпаралелювання. Отже, на думку авторів, поєднання двох зазначених підходів забезпечує побудову найбільш точних оцінок, при цьому витрати часу на моделювання є мінімальними.

Перерахувати всі підходи, які використовуються для прискорення моделювання, дуже складно. Найбільш поширеними є метод суттєвої вибірки [6–11], аналітико-статистичний метод [12–17], метод розшарованої вибірки [18–20], метод багаторівневого розщеплення [21, 22] та низка інших. Переважну більшість ідей, що лежать в основі зменшення дисперсії оцінок характеристик надійності, наведено у книгах [16, 23] та оглядових роботах [24, 25].

Кожен наведений метод орієнтований на певний клас систем і його точність суттєво залежить від значень параметрів, які визначають функціонування системи з погляду її надійності. Переважна більшість авторів зосереджують увагу на тих числових значеннях параметрів, за яких метод демонструє гарні результати, і повністю оминають увагою випадок, коли запропонований метод має вкрай низьку точність (навіть гіршу, ніж прямий метод Монте-Карло). Метою цієї роботи є порівняльний аналіз двох методів прискореного моделювання. Один з них [14] удосконалює ідеї І.М. Коваленка [12] про заборону потрапляння системи в певні класи станів. Це був один із найперших методів, який давав змогу будувати незміщені оцінки надійності систем, поведінку яких не можна описати регенерувальним процесом. Другий метод [9] ґрунтується на ідеях суттєвої вибірки. Для кожного з цих методів відомі умови, які забезпечують обмеженість відносної середньоквадратичної похибки у міру зростання надійності елементів системи. Водночас виникає питання щодо точності оцінок у тих випадках, коли надійність елементів не прямує до одиниці. У цій роботі на прикладі енергетичної системи [26] продемонстровано як переваги, так і недоліки кожного з цих методів.

МОДЕЛЬ СИСТЕМИ РАНГОВОЇ СТРУКТУРИ

Розглянемо модель резервованої системи з відновленням. Система складається з m елементів різних типів. Нехай V — це множина допустимих типів, відображення $v(\cdot): \{1, \dots, m\} \rightarrow V$ визначає тип елемента. Тривалість безвідмовної роботи i -го елемента типу $v(i)$ має функцію розподілу (ФР) $F_{v(i)}(u)$. Відмови миттєво встановлюються, відновлення починається у момент відмови, його тривалість визначається ФР $G_{v(i)}(u)$.

Всі елементи вважаються статистично незалежними, тобто тривалості безвідмовної роботи та відновлення є незалежними випадковими величинами (ВВ). Припустимо, що ФР $\{F_j(u), j \in V\}$ є абсолютно неперервними, тобто існують щільності $\{f_j(u), j \in V\}$. Структура системи з погляду надійності визначається множиною $M = \{(k; i_1, \dots, i_k)\}$ мінімальних перерізів відмов, де k — кількість елементів у перерізі, а i_1, \dots, i_k — їхні номери (якщо кількість таких перерізів є надмірною, то найбільш малоймовірними з них нехтують). Система функціонує протягом часу T , у початковий момент $t=0$ всі елементи знаходяться у робочому стані. Позначимо $Q(T)$ ймовірність відмови системи у проміжку $[0, T]$.

Уведемо неперервний справа марковський процес, що визначає функціонування системи з погляду надійності:

$$\zeta(t) = (\bar{v}(t); \bar{\gamma}(t)) = (v_1(t), \dots, v_m(t); \gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t)), \quad t \geq 0,$$

з початковим станом $\zeta(0) = (0, \dots, 0; 0, \dots, 0)$, де

$$v_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i\text{-й елемент перебуває у робочому стані у момент } t, \\ 1, & \text{якщо } i\text{-й елемент перебуває на відновленні у момент } t, \end{cases}$$

якщо $v_i(t) = 0$, то $\gamma_i(t) = \sup \{u: v_i(s) = 0 \text{ для будь-якого } s \in (t-u, t)\}$, ($\gamma_i(t)$ — час неперервного перебування елемента у робочому стані до моменту t); якщо ж $v_i(t) = 1$, то $\gamma_i(t)$ — це час до завершення відновлення i -го елемента.

Дискретна змінна $\bar{v} = (v_1, \dots, v_m)$ визначає «якісний» стан системи. Нехай S — множина усіх можливих значень вектора \bar{v} . Підмножину E_0 станів відмови системи задають у такий спосіб:

$$E_0 = \{\bar{v} = (v_1, \dots, v_m) : \text{існує переріз } (k; i_1, \dots, i_k) \in M \text{ такий,} \\ \text{що } v_{i_j} = 1, j=1, \dots, k\}.$$

Позначимо $\bar{e}_j = (e_1, \dots, e_m)$ m -вимірний одиничний вектор, $e_j = 1$, $e_l = 0$, $l \neq j$. Введемо множини станів:

$$E_r = \{\bar{v} = (v_1, \dots, v_m) \notin E_0 \cup \dots \cup E_{r-1} : \text{існує } j \text{ таке, що } v_j = 0 \\ \text{і } \bar{v} + \bar{e}_j \in E_{r-1}\}, \quad r=1, \dots, R,$$

де $R = \max\{r: E_r \neq \emptyset\}$. Очевидно, що $S = E_0 \cup \dots \cup E_R$. Число R називають рангом системи, а множина E_r містить стани рангу r . Якщо стан системи \bar{v} має ранг r , то це означає, що існують r елементів у робочому стані, відмова яких призводить до відмови системи.

ПРИСКОРЕНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЙМОВІРНОСТІ $Q(T)$ МЕТОДОМ ЗАБОРОНИ

У роботі [12] І.М. Коваленко запропонував загальний метод прискореного моделювання, який дав змогу будувати асимптотично незміщені оцінки надійності систем, поведінка яких описується суттєво багатовимірними процесами теорії масового обслуговування (метод заборони). У [14] цей метод був узагальнений, у результаті чого з'явилася можливість будувати незміщені оцінки. У цьому розділі наведено модифіковану версію методу заборони, орієнтовану на системи рангової структури.

Нехай $\bar{v} = (v_1, \dots, v_m) \in E_k$ ($1 \leq k \leq R$) — довільний стан системи. Елемент j назвемо основним, якщо $v_j = 0$ і $\bar{v} + \bar{e}_j \in E_{k-1}$, тобто відмова цього елемента зменшує ранг стану. Множину основних елементів для стану системи \bar{v} позначимо $W(\bar{v})$.

Алгоритм побудови незміщеної оцінки $\hat{Q}_1(T)$ в одній реалізації для ймовірності $Q(T)$ має такий вигляд.

1. Задаємо стан системи у початковий момент $t_0 = 0$: $\zeta(t_0) = (\bar{v}^{(0)}, \bar{\gamma}^{(0)}) = (0, \dots, 0; 0, \dots, 0)$, $\bar{v}^{(0)} \in E_R$.

2. Припустимо, що в деякий момент $t_k \in [0, T]$ ($0 \leq k < R$) система вперше потрапила у множину станів E_{R-k} :

$$\zeta(t_k) = (\bar{v}; \bar{\gamma}) = (v_1, \dots, v_m; \gamma_1, \dots, \gamma_m), \bar{v} \in E_{R-k}.$$

Знайдемо ймовірність переходу і момент переходу системи у множину станів E_{R-k-1} . Для цього моделюємо траєкторію процесу $\zeta(t)$, $t \in [t_k, T]$, за умови, що у $[t_k, T]$ не відмовить жоден елемент. Формула для $n = \sum_{i: v_i=1, \gamma_i < T-t_k} 1$ —

кількість елементів, відновлення яких завершиться до моменту T . При цьому визначаємо такі величини:

$$t_k = u^{(0)} < u^{(1)} < \dots < u^{(n)} < u^{(n+1)} = T \text{ — моменти завершення відновлень елементів;}$$

$\zeta(u^{(j)}) = (\bar{v}^{(j)}; \bar{\gamma}^{(j)}) = (v_1^{(j)}, \dots, v_m^{(j)}; \gamma_1^{(j)}, \dots, \gamma_m^{(j)})$, $j=0, \dots, n$, — стани процесу у відповідні моменти.

3. Для всіх $n+1$ проміжків знаходимо ймовірність відмови кожного елемента:

$$q_i^{(j)} = \frac{F_{v(i)}(u^{(j+1)} - u^{(j)} + \gamma_i^{(j)}) - F_{v(i)}(\gamma_i^{(j)})}{1 - F_{v(i)}(\gamma_i^{(j)})}, i: v_i^{(j)} = 0, j=0, \dots, n. \quad (1)$$

4. У проміжку $[t_k, T]$ забороняємо відмову основних елементів, тобто тих елементів, відмова яких переводить систему у множину станів E_{R-k-1} . Може реалізуватись один з двох сценаріїв: або у $[t_k, T]$ не буде жодної відмови, або відбудеться щонайменше одна відмова неосновних елементів. Обчислюємо цю ймовірність. У кожному з $n+1$ проміжків обчислюємо ймовірність відмови одного з неосновних елементів:

$$q^{(j)} = 1 - \prod_{i: v_i^{(j)}=0, i \notin W(\bar{v}^{(j)})} (1 - q_i^{(j)}), j=0, \dots, n. \quad (2)$$

5. Обчислюємо ймовірність відмови одного з неосновних елементів:

$$q = \sum_{j=0}^n q^{(j)} \prod_{l=0}^{j-1} [1 - q^{(l)}] = 1 - \prod_{j=0}^n [1 - q^{(j)}]. \quad (3)$$

6. Якщо не було відмов неосновних елементів (відповідна ймовірність дорівнює $1 - q$), то траєкторія із заборонами відмов основних елементів вже побудована і визначається моментами $\{u^{(j)}\}$. В іншому випадку (відповідна ймовірність дорівнює q) потрібно промодельовати траєкторію системи за умови щонайменше однієї відмови неосновного елемента. Для цього моделюємо номер проміжку $\kappa \in \{0, \dots, n\}$, в якому відмовляє один з неосновних елементів, тобто $\kappa = j$ з імовірністю $q^{(j)} \prod_{l=0}^{j-1} [1 - q^{(l)}] / q$. Припустимо, що $\kappa = j$.

7. Моделюємо номер елемента μ та момент τ його відмови у $[u^{(j)}, u^{(j+1)}]$ за умови, що у цьому проміжку відмовив один з неосновних елементів. Для цього моделюємо ВВ ρ , яка набуває значення з множини $\{i: v_i^{(j)} = 0, i \notin W(\bar{v}^{(j)})\}$

з імовірністю $q_i^{(j)} \prod_{0 \leq l < i, v_l^{(j)} = 0, l \in W(\bar{v}^{(j)})} [1 - q_l^{(j)}] / q^{(j)}$. Нехай $\rho = i$. Крім того, моделюємо ВВ ξ_i^* та $\xi_l^*, i < l \leq n, v_l^{(j)} = 0, l \notin W(\bar{v}^{(j)})$, які мають відповідно ФР

$$\frac{F_{v(i)}(z + \gamma_i^{(j)}) - F_{v(i)}(\gamma_i^{(j)})}{F_{v(i)}(u^{(j+1)} - u^{(j)} + \gamma_i^{(j)}) - F_{v(i)}(\gamma_i^{(j)})}, z \in [u^{(j)}, u^{(j+1)}],$$

та

$$\frac{F_{v(l)}(z + \gamma_l^{(j)}) - F_{v(l)}(\gamma_l^{(j)})}{1 - F_{v(l)}(\gamma_l^{(j)})}, z \geq 0.$$

Тоді

$$\tau = u^{(j)} + \min\{\xi_i^*, \xi_l^*, i < l \leq n, v_l^{(j)} = 0, l \notin W(\bar{v}^{(j)})\},$$

$$\mu = \arg \min\{\xi_i^*, \xi_l^*, j < l \leq n, v_l^{(j)} = 0, l \notin W(\bar{v}^{(j)})\}.$$

8. Моделюємо тривалість відновлення μ -го елемента і знаходимо стан системи у момент τ , якщо відомо, що в цей момент відмовив μ -й елемент.

9. У проміжку $[\tau, T]$ будуємо траєкторію процесу $\zeta(t)$ із забороною відмовляти основним елементам. Отже, маємо дві траєкторії із забороною відмов основним елементам: $\zeta_1(t), t \in [t_k, T]$, яка відповідає випадку, коли відсутні відмови неосновних елементів, та $\zeta_2(t), t \in [t_k, T]$, яка є траєкторією зі щонайменше однією відмовою неосновного елемента.

10. Для кожної траєкторії обчислюємо ймовірності P_1 і P_2 відмови одного з основних елементів (формули подібні до (1)–(3)).

11. Обчислюємо $\Lambda_k = P_1(1 - q) + P_2 q$.

12. Якщо $k = R - 1$, то алгоритм завершено і як оцінку в одній реалізації вибираємо

$$\hat{Q}_1(T) = \prod_{j=0}^{R-1} \Lambda_j. \quad (4)$$

13. Нехай $k < R - 1$. Тоді з імовірністю $P_1(1 - q) / \Lambda_k$ вибираємо траєкторію $\zeta_1(t), t \in [t_k, T]$, а з імовірністю $P_2 q / \Lambda_k$ — траєкторію $\zeta_2(t), t \in [t_k, T]$.

14. На вибраній траєкторії моделюємо момент t_{k+1} відмови основного елемента та його номер.

15. Знаходимо новий стан процесу в момент t_{k+1} , збільшуємо k на одиницю та повертаємося на крок 2 алгоритму.

Наведений алгоритм дає змогу будувати незміщені оцінки ймовірності $Q(T)$ для будь-яких значень характеристик надійності елементів. Оскільки $\hat{Q}_1(T) < 1$ з імовірністю 1 (див. (1)–(4)), то цей метод гарантує дисперсію оцінки, меншу за відповідну дисперсію, отриману методом Монте-Карло. Теоретичним обґрунтуванням високої точності (або стійкості обчислень) будь-якого методу моделювання прийнято вважати обмеженість відносної середньоквадратичної похибки (ВСКП) $\sqrt{\mathbf{D} \hat{Q}_1(T) / Q(T)}$ у випадку, коли $Q(T) \rightarrow 0$. Якщо переважний внесок у відмову системи вносять мінімальні перерізи мінімальної довжини, то можна розраховувати на обмеженість ВСКП. Якщо це не так, то і ВСКП буде зростати у міру підвищення надійності системи. Водночас у реальних системах характеристики надійності є фіксованими і може статися так, що для певних значень параметрів метод, для якого не вдалося довести обмеженість ВСКП, будує оцінки з меншою дисперсією, ніж метод, який має властивість обмеженості ВСКП (див. наведений нижче числовий приклад).

ПРИСКОРЕНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЙМОВІРНОСТІ $Q(T)$ МЕТОДОМ СУТТЄВОЇ ВИБІРКИ

Як зазначено вище, метод суттєвої вибірки (importance sampling) є домінуючим методом прискореного моделювання у дослідженні високонадійних систем. У роботі [10] запропоновано метод суттєвої вибірки для обчислення ймовірності $Q(T)$, який за певних умов має обмежену ВСКП тоді, коли різні групи елементів мають суттєво різну надійність. Нехай

$$\zeta(t) = x = (\bar{v}; \bar{\gamma}) = (v_1, \dots, v_m; \gamma_1, \dots, \gamma_m), \bar{v} \in S \setminus E,$$

— це довільний поточний стан процесу. Припустимо, що подальші відмови елементів не відбуваються. Тоді поведінка системи в $[t, T]$ з погляду надійності описується детермінованою траєкторією $z(s; t, x)$, $s \in [t, T]$, яка однозначно визначається моментами завершення відновлень несправних у стані x елементів. Для того, щоб у проміжку $[t, T]$ відбулася відмова системи, необхідно, щоб у цьому проміжку відбувалися відмови елементів. Ключовим є таке питання: як організувати відмову елементів (яких саме і в які моменти часу), щоб отримати найбільш імовірну траєкторію відмови? Саме відповідь на це питання і є метою наведеного нижче методу суттєвої вибірки.

Нехай $K = K(x) = \sum_{i: v_i=1, \gamma_i < T-t} 1$ — кількість елементів, відновлення яких завершиться в $[t, T]$. Послідовність моментів завершення відновлення деяких елементів j_1, j_2, \dots, j_K позначимо $t < u_1 < u_2 < \dots < u_K < T$. Якщо позначити $u_0 = t$, $u_{K+1} = T$, то траєкторія $z(s; t, x)$, $s \in [t, T]$, матиме таку структуру:

$$z(s; t, x) = (\bar{v}^{(k)}; \bar{\gamma}^{(k)}(s)) = (v_1^{(k)}, \dots, v_m^{(k)}; \gamma_1^{(k)}(s), \dots, \gamma_m^{(k)}(s)), s \in [u_k, u_{k+1}),$$

$k = 0, 1, \dots, K$, де $\bar{v}^{(0)} = \bar{v}$, $\bar{\gamma}^{(0)}(t) = \bar{\gamma}$, вектор $\bar{v}^{(k)}$ відрізняється від $\bar{v}^{(k-1)}$ лише тим, що компонента з номером j_k змінює значення з 1 на 0; при цьому $\gamma_{j_k}^{(k)}(u_k) = 0$. Компонента $\gamma_i^{(k)}(s)$ лінійно зростає за s (якщо $v_i^{(k)} = 0$) або лінійно спадає (якщо $v_i^{(k)} = 1$).

Якщо $s \in [u_k, u_{k+1})$, то інтенсивність $\Lambda_k(s)$ відмови в момент s одного з елементів визначається у такий спосіб:

$$\Lambda_k(s) = \sum_{i: v_i^{(k)} = 0} \lambda_{v(i)}(\gamma_i^{(k)}(s)), \quad (5)$$

де $\lambda_{v(i)}(\gamma_i^{(k)}(s)) = \frac{f_{v(i)}(\gamma_i^{(k)}(s))}{1 - F_{v(i)}(\gamma_i^{(k)}(s))}$. Якщо у момент s відбувається відмова

одного з елементів, то новий стан $\zeta(s)$ визначається за таким алгоритмом.

1. Моделюємо ВВ δ , яка набуває значення $j \in \{i: v_i^{(k)} = 0\}$ з імовірністю $\frac{\lambda_{v(j)}(\gamma_j^{(k)}(s))}{\Lambda(s)}$. Нехай $\delta = j$.

2. Згідно з розподілом $G_{v(j)}(u)$ моделюємо ВВ η_j . Нехай $\eta_j = b$.

3. Знаходимо нові значення: $v_j^{(k)} = 1$ і $\gamma_j^{(k)}(s) = b$. Всі інші компоненти векторів $\bar{v}^{(k)}$ і $\bar{\gamma}^{(k)}(s)$ свого стану не змінюють.

Якщо моделювати відмову елементів згідно з (5), то отримаємо звичайний метод Монте–Карло, ефективність якого буде швидко спадати у міру підвищення надійності елементів (зменшення $\Lambda(s)$). У роботі [10] для збільшення ймовірності потрапляння системи у стан відмови запропоновано скористатися методом зваже-

ного моделювання. Для кожного стану системи проводять аналіз наслідків відмови того чи іншого елемента і за рахунок уведення вагових коефіцієнтів збільшують імовірність відмови елементів, які більш суттєво впливають на відмову системи. При цьому оцінка є незміщеною і за певних умов має відносну похибку, яка залишається обмеженою у міру підвищення надійності елементів системи.

Припустимо, що $\{\varphi(v), v \in S\}$ — це деякий довільний набір невід’ємних скінченних чисел. Загальний алгоритм побудови незміщеної оцінки ймовірності $Q(T)$ методом прискореного моделювання сформулюємо у такий спосіб (будуємо оцінку $\hat{Q}_1(T)$ в одній реалізації для $Q(T)$).

1. Покладемо $n = 0$ (лічильник кількості відмов у проміжку $[0, T]$). Визначимо початковий стан процесу в момент $t_0 = 0$: $\zeta(t_0) = x_0 = (0, \dots, 0; 0, \dots, 0)$.

2. Припустимо, що у момент $t_n < T$ відбулась n -та відмова ($n \geq 0$) одного з елементів і система перейшла у стан $x_n = (\bar{v}; \bar{\gamma}) = (v_1, \dots, v_m; \gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $\bar{v} \in S \setminus E$ (для спрощення позначень залежність від стану x_n вказувати не будемо). За умови відсутності відмов елементів будують в $[t_n, T]$ детерміновану траєкторію $z(s; t_n, x_n)$, $s \in [t_n, T]$. Як вже було зазначено, ця траєкторія характеризується кількістю $K = \sum_{i: v_i=1, \gamma_i < T-t_n} 1$ елементів, відновлення яких завершиться до моменту T , їхніми номерами j_1, j_2, \dots, j_K та моментами $t = u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_K < T = u_{K+1}$ завершення відновлень (випадок $K = 0$ не виключається). Для $s \in [u_k, u_{k+1})$ траєкторія $z(s; t_n, x_n)$ матиме вигляд

$$z(s; t_n, x_n) = (\bar{v}^{(k)}; \bar{\gamma}^{(k)}(s)) = (v_1^{(k)}, \dots, v_m^{(k)}; \gamma_1^{(k)}(s), \dots, \gamma_m^{(k)}(s)). \quad (6)$$

Розглянемо кожен з $K + 1$ інтервалів (u_k, u_{k+1}) , $k = 0, \dots, K$. Позначимо $\bar{\mu}_i^{(k)}$ стан, у який перейде система, якщо в інтервалі (u_k, u_{k+1}) відмовить елемент i такий, що $v_i^{(k)} = 0$.

3. Для кожного $k = 0, \dots, K$ і кожного i такого, що $v_i^{(k)} = 0$, обчислюємо ймовірність відмови i -го елемента в інтервалі (u_k, u_{k+1}) за умови, що він не відмовив у (t_n, u_k) :

$$p_i^{(k)}(t_n, x_n) = \frac{F_{v(i)}(\gamma_i^{(k)}(u_k) + u_{k+1} - u_k) - F_{v(i)}(\gamma_i^{(k)}(u_k))}{1 - F_{v(i)}(\gamma_i^{(k)}(u_k))}, \quad i: v_i^{(k)} = 0,$$

$$P(t_n, x_n) = \sum_{k=0}^K \sum_{i: v_i^{(k)}=0} \varphi(\bar{\mu}_i^{(k)}) p_i^{(k)}(t_n, x_n).$$

4. Моделюємо двовимірну ВВ (σ, ρ) , яка набуває значення (k, i) з імовірністю $\varphi(\bar{\mu}_i^{(k)}) p_i^{(k)}(t_n, x_n) / P(t_n, x_n)$, $k = 0, \dots, K$, $i: v_i^{(k)} = 0$. Нехай $(\sigma, \rho) = (k, i)$.

5. Обчислюємо нормувальний множник $h(t_n, x_n) = P(t_n, x_n) / \varphi(\bar{\mu}_i^{(k)})$.

6. Моделюємо ВВ $\xi_i^{(k)}$ з ФР

$$F_i^{(k)}(t) = \frac{F_{v(i)}(\gamma_i^{(k)}(u_k) + t - u_k) - F_{v(i)}(\gamma_i^{(k)}(u_k))}{F_{v(i)}(\gamma_i^{(k)}(u_k) + u_{k+1} - u_k) - F_{v(i)}(\gamma_i^{(k)}(u_k))}, \quad t \in [u_k, u_{k+1}]. \quad (7)$$

Покладемо $t_{n+1} = \xi_i^{(k)}$.

7. Обчислюємо ще один нормувальний множник:

$$w(t_n, x_n) = \prod_{l: v_l=0, l \neq i} \frac{1 - F_{v(l)}(\gamma_l + t_{n+1} - t_n)}{1 - F_{v(l)}(\gamma_l)} \prod_{r: u_r < t_{n+1}, j_r \neq i} [1 - F_{v(j_r)}(t_{n+1} - u_r)]$$

(відмова i -го елемента є першою відмовою в інтервалі (t_n, T)).

8. Згідно з розподілом $G_{v(i)}(u)$ моделюємо час η_i відновлення i -го елемента.

9. Знаходимо новий стан процесу $x_{n+1} = \zeta(t_{n+1})$ за умови, що в цей момент відмовив i -й елемент з часом відновлення η_i .

10. Якщо після відмови i -го елемента система залишається у робочому стані, то збільшуємо n на одиницю і повертаємося до кроку 2 алгоритму.

11. Якщо система переходить у стан відмови, то алгоритм завершено і як оцінку в одній реалізації алгоритму вибираємо

$$\hat{Q}_1(T) = h(t_0, x_0) w(t_0, x_0) \dots h(t_n, x_n) w(t_n, x_n).$$

У роботі [10] доведено, що $\hat{Q}_1(T)$ залишається незміщеною оцінкою для $Q(T)$ за будь-якого вибору невід'ємних скінченних чисел $\{\varphi(\bar{v}), \bar{v} \in S\}$. Однак, у разі належного вибору множників $\{\varphi(\bar{v}), \bar{v} \in S\}$ метод суттєвої вибірки гарантує обмеженість ВСКП у міру зростання надійності елементів системи.

Час безвідмовної роботи елементів зазвичай значно перевищує тривалість відновлення. Крім того, тривалості безвідмовної роботи різних елементів можуть також бути величинами суттєво різних порядків. Цю особливість реальних систем формалізуємо у такий спосіб.

Нехай $\varepsilon > 0$ — деякий малий параметр такий, що ФР $\{F_j(u), j \in V\}$ можна представити у вигляді $F_j(u) = F_j^{(0)}(\varepsilon^{\delta_j} u)$, де $F_j^{(0)}(u)$ — деяка ФР, а $\delta_j > 0$ — параметр, що визначає «порядок» часу безвідмовної роботи елемента j -го типу. Припустимо, що ФР $\{F_j^{(0)}(u)\}$ є абсолютно неперервними зі щільностями $\{f_j^{(0)}(u)\}$, які задовольняють умову [19]: існують $\varepsilon_0 > 0$, $\beta_j > 0$, $\Delta \in (0, T/2)$ та функції $\psi_j^{(1)}(u)$, $\psi_j^{(2)}(u)$ такі, що співвідношення

$$\varepsilon^{\beta_j-1} \psi_j^{(1)}(u) \leq f_j^{(0)}(\varepsilon u) \leq \varepsilon^{\beta_j-1} \psi_j^{(2)}(u) \quad (8)$$

виконується для будь-яких $0 < u \leq T$ та $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, причому

$$\Psi^{(1)} = \min_{j \in V} \inf_{0 \leq z \leq T-\Delta} \int_z^{z+\Delta} \psi_j^{(1)}(u) du > 0, \quad \Psi^{(2)} = \max_{j \in V} \int_0^T \psi_j^{(2)}(u) du < \infty. \quad (9)$$

Умови (8), (9) не є занадто обмежувальними — типові розподіли математичної теорії надійності їх задовольняють (наприклад, розподіли Вейбулла, Ерланга, гамма-розподіл, розподіл Коші).

Як зазначено вище, структура системи з погляду її надійності визначається множиною $M = \{(k; i_1, \dots, i_k)\}$ мінімальних перерізів відмов, де k — кількість елементів у перерізі, а i_1, \dots, i_k — їхні номери. Нехай $\bar{v} = (v_1, \dots, v_m)$ — довільний стан системи. Якщо існує переріз $\pi = (k; i_1, \dots, i_k) \in M$ такий, що $v_{i_j} = 1$, $j = 1, \dots, k$, то система знаходиться у стані відмови, тобто $\bar{v} \in E_0$, і в цьому випадку покладемо $\varphi(\bar{v}) = 1$. Припустимо, що $\bar{v} \in S \setminus E_0$. Позначимо

$$r(\bar{v}, \pi) = \sum_{j: v_{i_j}=0, 1 \leq j \leq k} \delta_{i_j} \beta_{i_j}, \quad r(\bar{v}) = \min_{\pi \in M} r(\bar{v}, \pi) \quad (10)$$

та покладемо

$$\varphi(\bar{v}) = \varepsilon^{r(\bar{v})}. \quad (11)$$

Справджується таке твердження [10].

Теорема 1. Якщо щільності $\{f_j^{(0)}(u), j \in V\}$ задовольняють умови (8), (9), $\min_{j \in V} [1 - G_j(\Delta)] > 0$ для того самого Δ , що і в умові (9), та нормувальні множники $\{\varphi(\bar{v}), \bar{v} \in S\}$ вибрано згідно з (10), (11), то оцінка $\hat{Q}_1(T)$ має обмежену ВСКП:

$$\frac{\sqrt{\mathbf{D}\hat{Q}_1(T)}}{Q(T)} = O(1), \text{ якщо } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Формули (10), (11) реалізують принцип монотонних відмов, запропонований І.М. Коваленком. Траєкторію системи з початковим станом \bar{v} називають монотонною, якщо до моменту відмови системи кількість несправних елементів монотонно зростає, тобто не завершиться відновлення жодного елемента. Чим вищою є надійність елементів, тим більш імовірно, що відмова системи відбудеться саме за монотонною траєкторією. Тому в деяких випадках як нормувальні множники $\{\varphi(\bar{v}), \bar{v} \in S\}$ доцільно вибирати верхню оцінку ймовірності монотонної відмови. При цьому враховується не тільки поточний стан \bar{v} , а й значення вектора додаткових змінних $\bar{\gamma}$, тобто маємо $\{\varphi(\bar{v}, \bar{\gamma})\}$.

Формули (10) та (11) вказують лише порядок імовірності монотонної відмови. Спробуємо покращити цю оцінку. Розглянемо крок 2 алгоритму. Для $s \in [u_k, u_{k+1})$ траєкторія $z(s; t_n, x_n)$ має вигляд (6). Оцінимо ймовірність монотонної відмови системи у випадку, коли в інтервалі (u_k, u_{k+1}) відмовить елемент i такий, що $v_i^{(k)} = 0$. Скористаємося таким алгоритмом.

1. Згідно з розподілом (7) моделюємо момент відмови $\xi_i^{(k)} \in (u_k, u_{k+1})$ елемента i .
2. Згідно з розподілом $G_{v(i)}(u)$ моделюємо час η_i відновлення i -го елемента.
3. Знаходимо новий стан процесу x_i^* за умови, що в момент $\xi_i^{(k)}$ відмовив i -й елемент з часом відновлення η_i .
4. Будуємо верхню оцінку ймовірності монотонної відмови зі стану x_i^* :

$$\begin{aligned} & \varphi(x_i^*) = \\ & = \sum_{(k; i_1, \dots, i_k) \in M} \prod_{\substack{j: v_{i_j} = 0, i_j \neq i, \\ j=1, \dots, k}} \frac{F_{v(i_j)}(\gamma_{i_j}^{(k)}(u_k) + \xi_i^{(k)} - u_k + h_i^{(k)}) - F_{v(i_j)}(\gamma_{i_j}^{(k)}(u_k) + \xi_i^{(k)} - u_k)}{1 - F_{v(i_j)}(\gamma_{i_j}^{(k)}(u_k) + \xi_i^{(k)} - u_k)}, \quad (12) \end{aligned}$$

де $h_i^{(k)} = \min(\eta_i, u_{k+1} - \xi_i^{(k)})$.

Отже, верхня оцінка ймовірності монотонної відмови зі стану x_i^* — це сума за всіма мінімальними перерізами добутоків імовірностей відмови у проміжку довжини $h_i^{(k)}$ всіх елементів перерізу, які знаходяться у робочому стані в момент u_k (окрім i -го елемента).

ЧИСЛОВИЙ ПРИКЛАД

Метою цього розділу є порівняльний аналіз трьох методів прискореного моделювання: 1) модифікованого методу заборони; 2) методу суттєвої вибірки, в якому вагові множники $\{\varphi(\bar{v}), \bar{v} \in S\}$ вибирають згідно з (11); 3) методу суттєвої вибірки, в якому $\{\varphi(\bar{v}), \bar{v} \in S\}$ вибирають згідно з (12). На ці методи далі посилаємось як на методи 1, 2, 3. Порівняльний аналіз проведемо на прикладі корабельної енергетичної системи [26] (див. рис. 1).

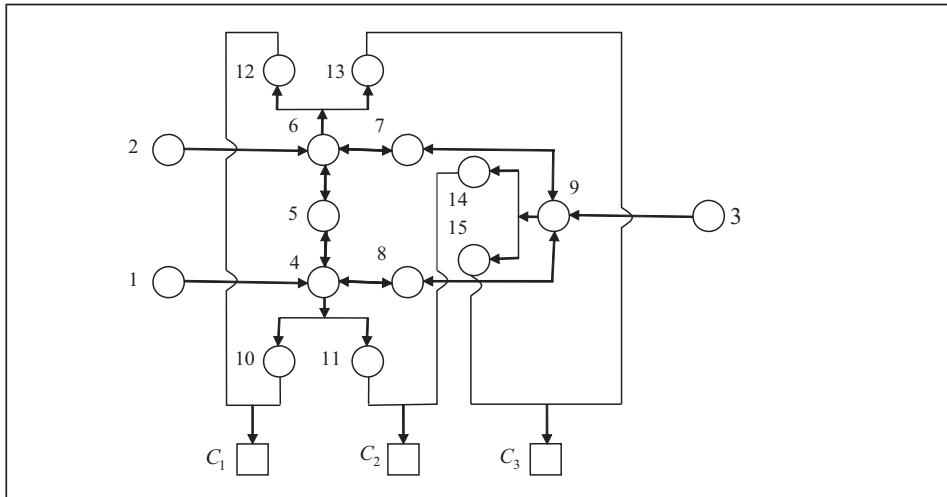


Рис 1. Функціональна схема енергетичної системи

Система складається з $m=15$ елементів, серед яких три генератори однакової потужності (перший тип: елементи 1, 2, 3), три головних розподільних щити (другий тип: елементи 4, 6, 9), допоміжні елементи (третій тип: елементи 5, 7, 8), шість вторинних розподільних щитів (четвертий тип: елементи 10–15). Метою системи є одночасне забезпечення електроенергією трьох відповідальних споживачів C_1, C_2, C_3 . Потужності одного генератора вистачає для живлення усіх трьох споживачів. Стрілки вказують можливі напрями передачі електроенергії. Структура системи з погляду надійності визначається множиною M , яка містить 31 мінімальний переріз: $M = \{(2; 4, 6), (2; 4, 9), (2; 4, 12), (2; 4, 14), (2; 6, 9), (2; 6, 10), (2; 6, 15), (2; 9, 11), (2; 9, 13), (2; 10, 12), (2; 11, 14), (2; 13, 15), (3; 1, 2, 3), (3; 1, 2, 9), (3; 1, 3, 6), (3; 1, 5, 9), (3; 1, 6, 8), (3; 2, 3, 4), (3; 2, 4, 7), (3; 2, 5, 9), (3; 3, 4, 7), (3; 3, 6, 8), (4; 1, 2, 7, 8), (4; 1, 3, 5, 7), (4; 1, 5, 8, 12), (4; 1, 5, 8, 14), (4; 2, 3, 5, 8), (4; 2, 5, 7, 10), (4; 2, 5, 7, 15), (4; 3, 7, 8, 11), (4; 3, 7, 8, 13)\}$, де перше число вказує кількість елементів у перерізі, а наступні числа є номерами цих елементів.

Розглянемо випадок, коли тривалості безвідмовної роботи різних груп елементів є величинами суттєво різних порядків. Припустимо, що всі ВВ мають розподіл Вейбулла із параметрами, що суттєво відрізняються:

$$F_j(u) = 1 - \exp\{-(\varepsilon^{\bar{\delta}_j} u)^{\beta_j}\}, G_j(u) = 1 - \exp\{-(a_j u)^2\}, j = 1, 2, 3, 4,$$

де $\bar{\delta} = (4, 2, 1, 3)$, $\bar{\beta} = (1, 3, 4, 2)$, $\bar{a} = (100, 200, 300, 400)$. Тут $\varepsilon > 0$ — деякий малий параметр. Саме цей параметр лежить в основі порівняльного аналізу трьох методів прискореного моделювання. Параметри $\bar{\delta}$, $\bar{\beta}$ та \bar{a} підібрано так, щоб важко було визначити, які саме перерізи найбільше впливають на відмову системи.

Припустимо, що $T=1$, тобто система функціонує у проміжку $[0, 1]$. Усі наведені нижче оцінки побудовано з достовірністю 0.99 та відносною похибкою 1%. Уведемо такі позначення:

$\hat{Q}(T)$ — оцінка ймовірності відмови $Q(T)$;

$\hat{D}(T)$ — вибіркова дисперсія, тобто незміщена оцінка для $\mathbf{D}\hat{Q}_1(T)$;

$\hat{\rho}(T) = \sqrt{\hat{D}(T)} / \hat{Q}(T)$ — оцінка для ВСКП $\sqrt{\mathbf{D}\hat{Q}_1(T)} / Q(T)$.

Результати обчислень наведено у табл. 1.

Таблиця 1. Результати порівняльного аналізу трьох методів прискореного моделювання

ε	Метод 1			Метод 2			Метод 3		
	$\hat{Q}(T)$	$\hat{D}(T)$	$\hat{\rho}(T)$	$\hat{Q}(T)$	$\hat{D}(T)$	$\hat{\rho}(T)$	$\hat{Q}(T)$	$\hat{D}(T)$	$\hat{\rho}(T)$
0.6	$2.72 \cdot 10^{-4}$	$7.00 \cdot 10^{-8}$	0.97	$2.69 \cdot 10^{-4}$	$9.76 \cdot 10^{-7}$	3.80	$2.67 \cdot 10^{-4}$	$4.98 \cdot 10^{-4}$	86.9
0.4	$2.08 \cdot 10^{-6}$	$5.58 \cdot 10^{-12}$	1.13	$2.09 \cdot 10^{-6}$	$1.38 \cdot 10^{-11}$	1.77	$2.10 \cdot 10^{-6}$	$6.34 \cdot 10^{-10}$	12.0
0.2	$5.11 \cdot 10^{-10}$	$3.47 \cdot 10^{-19}$	1.15	$5.09 \cdot 10^{-10}$	$5.55 \cdot 10^{-19}$	1.46	$5.16 \cdot 10^{-10}$	$3.30 \cdot 10^{-20}$	0.35
0.1	$1.24 \cdot 10^{-13}$	$2.25 \cdot 10^{-26}$	1.21	$1.26 \cdot 10^{-13}$	$3.29 \cdot 10^{-26}$	1.45	$1.25 \cdot 10^{-13}$	$1.23 \cdot 10^{-27}$	0.28
0.05	$3.04 \cdot 10^{-17}$	$1.23 \cdot 10^{-33}$	1.15	$3.03 \cdot 10^{-17}$	$1.90 \cdot 10^{-33}$	1.44	$3.04 \cdot 10^{-17}$	$7.27 \cdot 10^{-35}$	0.28

Аналізуючи отримані результати, можна дійти таких висновків: 1) оцінки, побудовані трьома методами, є достатньо близькими, що підтверджує коректність не тільки алгоритмів, але й їхньої програмної реалізації; 2) усі три методи демонструють обмеженість ВСКП у міру зростання надійності системи, хоча теоретично ця властивість доведена лише для методу 2; 3) не можна виділити метод, який для всіх значень ε є більш точним порівняно з іншими методами. Так, у випадку високої надійності елементів системи використання формули (12) (метод 3) дає змогу досягнути оцінок надзвичайно високої точності (ВСКП становить лише 0.28). Водночас у разі збільшення ε метод 3 втрачає свою точність і для $\varepsilon = 0.6$ дає оцінки з більшою дисперсією, ніж у випадку використання звичайного методу Монте-Карло. Оцінки, отримані методами 1 та 2, мають рівномірно обмежену ВСКП, причому метод 1 є помітно кращим в усьому діапазоні зміни ε (тим паче, що алгоритм методу 1 приблизно у 5 разів швидший за алгоритм методу 2 у перерахунку на одну реалізацію).

Отже, у випадку менш надійних елементів системи більш доцільним є використання методу 1, а у міру підвищення надійності елементів перевагу слід віддати методу 3.

ВИСНОВКИ

У попередніх розділах наведено модифікації двох принципово різних методів прискореного моделювання систем рангової структури, один з яких ґрунтується на забороні відмови так званих основних елементів, а другий є по суті методом істотної вибірки, який реалізує принцип монотонних відмов, запропонований І.М. Коваленком. Якщо система складається з елементів високої надійності (це саме той випадок, коли працює принцип монотонних відмов), то метод істотної вибірки має суттєву перевагу в точності. Якщо надійність елементів зменшується, то варто використовувати більш ефективний метод моделювання із заборonoю.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Коваленко І.Н. Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности систем. Москва: Сов. Радио, 1980. 209 с.
2. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. Киев: Наукова, думка, 1982. 236 с.
3. Kovalenko I.N. Rare events in queueing systems – a survey. *Queueing Systems*. 1994. Vol. 16, N 1. P. 1–49.
4. Blaszczyszyn B., Rolski T., Schmidt V. Light-traffic approximations in queues and related stochastic models. Dshalalow J.H. (Ed.). *Advances in Queueing*. Boca Raton: CRC Press, 1995. P. 379–406.
5. Kovalenko I.N. Approximation of queues via small-parameter method. Dshalalow J.H. (Ed.). *Advances in Queueing*. Boca Raton: CRC Press, 1995. P. 481–506.

6. Heidelberger P. Fast simulation of rare events in queueing and reliability models. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*. 1995. Vol. 5, Iss. 1. P. 43–85.
7. Kouikoglou V.S., Yannis A.Ph. Review of a fast simulation method for the analysis of queueing networks. *Applied Stochastic Models and Data Analysis*. 1998. Vol. 13, Iss. 2. P. 73–83.
8. Falkner M., Devetsikiotis M., Lambadaris I. Fast simulation of networks of queues with effective and decoupling bandwidths. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*. 1999. Vol. 9, Iss. 1. P. 45–58.
9. Кузнецов Н.Ю. Условия ограниченности относительной погрешности при ускоренном моделировании надежности немарковских систем. *Кибернетика и системный анализ*. 2006. Т. 42, № 4. С. 63–80.
10. Kuznetsov N.Yu. Fast simulation technique in reliability evaluation of Markovian and non-Markovian systems. In: *Simulation and Optimization Methods in Risk and Reliability Theory*. New York: Nova Science Publishers, 2009. P. 69–112.
11. Li J., Mosleh A., Kang R. Likelihood ratio gradient estimation for dynamic reliability applications. *Reliab. Engin. and System Safety*. 2011. Vol. 96, N 12. P. 1667–1679.
12. Коваленко И.Н. К расчету характеристик высоконадежных систем аналитико-статистическим методом. *Электронное моделирование*. 1980. Т. 2, № 4. С. 5–8.
13. Завадская Л.А. Об одном подходе к ускорению моделирования систем с резервированием. *Электронное моделирование*. 1984. Т. 6, № 6. С. 57–60.
14. Кузнецов Н.Ю. Общий подход к нахождению вероятности безотказной работы структурно-сложных систем аналитико-статистическим методом. *Кибернетика*. 1985. № 3. С. 86–94.
15. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю. Методы расчета высоконадежных систем. Москва: Радио и связь, 1988. 176 с.
16. Kovalenko I.N., Kuznetsov N.Yu., Pegg Ph.A. Mathematical theory of reliability of time dependent systems with practical applications. Chichester: Wiley, 1997. 303 p.
17. Шпак В.Д. Аналитико-статистические оценки для обрывающихся процессов восстановления и их эффективность. *Кибернетика и системный анализ*. 2005. Т. 41, № 1. С. 138–155.
18. Fox B.L., Glynn P. W. Discrete-time conversion for simulating finite-horizon Markov processes. *SIAM J. Appl. Math.* 1990. Vol. 50, № 5. P. 1457–1473.
19. Шумская А.А. Ускоренное моделирование коэффициента неготовности восстанавливаемой системы с ограниченной относительной погрешностью оценки. *Кибернетика и системный анализ*. 2003. Т. 39, № 3. С. 45–58.
20. Кузнецов М.Ю., Кузнецов И.М. Прискорене моделювання ймовірності блокування вимог у мережах обслуговування із множинним доступом. *Кибернетика та системний аналіз*. 2021. Т. 57, № 4. С. 30–43.
21. Glasserman P., Heidelberger Ph., Shahabuddin P., Zajic T. Multilevel splitting for estimating rare event probabilities. *Oper. Research*. 1999. Vol. 47, № 4. P. 585–600.
22. Juneja S., Shahabuddin P., Zajic T. Splitting-based importance-sampling algorithm for fast simulation of Markov reliability models with general repair-policies. *IEEE Transactions on Reliab.* 2001. Vol. 50, N 3. P. 235–245.
23. Gertsbakh I.B., Shpungin Y. Models of network reliability: analysis, combinatorics, and Monte Carlo. Boca Raton: CRC Press, 2009. 203 p.
24. Lagnoux A. Rare event simulation. *Probab. Eng. and Inf. Sci.* 2006. Vol. 20, N 1. P. 45–66.
25. Blanchet J., Lam H. Rare event simulation techniques. *Proc. 2011 Winter Simulation Conference* (11–14 December 2011, Phoenix, Arizona, USA). Phoenix, 2011. P. 146–160.
26. Рябинин И.А., Черкесов Г.Н. Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно сложных систем. Москва: Радио и связь, 1981. 264 с.

М.Ю. Kuznetsov, I.M. Kuznetsov, A.A. Shumska

COMPARATIVE ANALYSIS OF TWO MODIFIED FAST SIMULATION METHODS FOR THE EVALUATION OF THE FAILURE PROBABILITY OF A RANK STRUCTURE SYSTEM

Abstract. A model of a redundant repairable system of the rank structure is considered. Its time operation is determined by distributions of general form. Two modified fast simulation methods for the evaluation of the system failure probability on a fixed time interval are proposed. The conclusions on the accuracy of these methods depending on the reliability characteristics of the system components are illustrated by a numerical example.

Keywords: reliability, redundant repairable system, rank, simulation with prohibition, importance sampling, estimate, variance.

Надійшла до редакції 04.04.2022