УДК 519.8

Т.Т. ЛЕБЄДЄВА
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *lebedevatt@gmail.com*.
Н.В. СЕМЕНОВА
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *nvsemenova@meta.ua*.
Т.І. СЕРГІЄНКО
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *taniaser62@gmail.com.*

СТІЙКІСТЬ І РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ ВЕКТОРНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ ЗА МОЖЛИВИХ ЗБУРЕНЬ КРИТЕРІЇВ

Анотація. Наведено нові результати щодо стійкості та регуляризації векторних (багатокритерійних) задач оптимізації за можливих збурень вхідних даних векторного критерію, що складається з квадратичних чи лінійних функцій. Доведено стійкість задач з квадратичними критеріями пошуку розв'язків, оптимальних за Слейтером. У випадку оптимізації за Парето розроблено підхід до регуляризації задач з лінійними критеріальними функціями.

Ключові слова: векторна задача, Парето-оптимальні розв'язки, множина Слейтера, стійкість за векторним критерієм, збурення вхідних даних, регуляризація.

ВСТУП

Сучасний інтерес до дослідження проблем стійкості та регуляризації векторних (багатокритерійних) моделей оптимізації обумовлений значною мірою їхнім широким застосуванням для розв'язання важливих задач економіки, екології, керування, проєктування різноманітних складних систем, прийняття рішень в умовах невизначеності та багатьох інших. Результати фундаментальних досліджень стійкості мають очевидну прикладну направленість. Аналіз групових експертних оцінок, розв'язання слабкоструктурованих задач вибору, оцінка ризиків у виробничій і комерційній діяльностях, менеджменті та інші проблеми, що виникають за умов невизначеності та некоректності вхідних даних, дають можливість їхнього широкого застосування. Існує багато оптимізаційних задач, для яких як завгодно малі похибки у визначенні вхідних даних породжують значні спотворення істинного шуканого розв'язку. У зв'язку з цим особливо важливо вміти виділяти такі класи задач, в яких малим змінам вхідних даних відповідають малі зміни вихідних результатів, а також розробляти методи регуляризації, що надають змогу замінити розв'язання нестійкої задачі з непередбачуваним впливом збурень у вхідних даних розв'язанням задачі, стійкої до таких збурень і достатньо близької до початкової задачі [1–9].

Під векторною оптимізаційною задачею зазвичай розуміють задачу відшукання деякої множини ефективних розв'язків, тобто вибір із множини допустимих розв'язків таких, які задовольняють заданий принцип оптимальності. У разі, коли часткові критерії задачі рівноважливі, як такий принцип найчастіше розглядають оптимальність за Парето або за Слейтером [10–13], і дослідження стійкості векторної оптимізаційної задачі полягає у вивченні поведінки деякої визначеної множини оптимальних розв'язків за умови можливих збурень параметрів (вхідних даних) задачі.

Традиційно під стійкістю задач оптимізації розуміють неперервну залежність розв'язків від вхідних даних задачі [14]. Найбільш загальні підходи до дослідження стійкості оптимізаційних задач ґрунтуються на вивченні властивостей багатозначних (точково-множинних) відображень, що задають принцип оптимальності (функцію вибору) [1, 3, 4].

Продовжуючи дослідження, описані, зокрема, в [1, 15–22], наведемо нові результати щодо питань стійкості та регуляризації векторних задач оптимізації за можливих збурень вхідних даних векторного критерію, який складається з квадратичних чи лінійних функцій. Доведено стійкість задач з квадратичними критеріями для пошуку розв'язків, оптимальних за Слейтером. У випадку оптимізації за Парето розроблено підхід до регуляризації задач з лінійними критеріальними функціями.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ

Розглянемо задачу вигляду

$$Q(F, X): \max\{F(x) \mid x \in X\},$$

де X — множина з R^n довільної структури, можливо дискретної, R^n — n-вимірний дійсний простір, $X \neq \varnothing$, $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\ell(x))$, $\ell \geq 2$, $f_i : R^n \to R^1$ — квадратичні функції вигляду $f_i(x) = \langle x, D_i x \rangle + \langle c_i, x \rangle$, $c_i = (c_{i1}, \ldots, c_{in}) \in R^n$, $D_i = [d^i_{jk}] \in R^{n \times n}$, $i \in N_\ell = \{1, \ldots, \ell\}$, $j, k \in N_n = \{1, \ldots, n\}$.

Під розв'язанням задачі $Q(F, X)$ будемо розуміти відшукання деякої підмножини множини $S\ell(F, X)$ оптимальних за Слейтером розв'язків:

$$S\ell(F, X) = \{x \in X \mid \sigma(x, F, X) = \varnothing\}, \tag{1}$$

де $\sigma(x, F, X) = \{y \in X \mid F(y) > F(x)\}$. Зокрема, якщо мова буде йти про задачу на відшукання точок множини Парето

$$P(F, X) = \{x \in X \mid \pi(x, F, X) = \varnothing\}, \tag{2}$$

де $\pi(x, F, X) = \{y \in X \mid F(y) \geq F(x),\ F(y) \neq F(x)\}$, то таку задачу будемо позначати $Q_P(F, X)$. Задачу на відшукання множини Слейтера позначатимемо $Q_{Sl}(F, X)$. Очевидні такі співвідношення: $P(F, X) \subset S\ell(F, X)$ і $\forall x \in X$ $\sigma(x, F, X) \subset \pi(x, F, X)$.

Для задачі $Q(F, X)$ як вхідні дані, що можуть зазнати збурень, будемо розглядати коефіцієнти векторного критерію F. Набір таких вхідних даних позначимо $u = (D, C) \in U \subset R^{n \times n \times \ell} \times R^{\ell \times n}$, де U — простір вхідних даних задачі, що стосуються векторного критерію, $D = (D_1, \ldots, D_\ell) \in R^{n \times n \times \ell}$, $C = [c_{ij}] \in R^{\ell \times n}$. Крім позначень $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\ell(x))$, для векторної цільової функції і часткових критеріїв задачі $Q(F, X)$ будемо користуватися в разі необхідності також позначеннями $F_u(x) = (f_1^u(x), \ldots, f_\ell^u(x))$, що уточнюють, який саме елемент u із простору U вхідних даних відповідає задачі, що розглядається.

Далі для будь-якого натурального числа q дійсний векторний простір R^q розглядатимемо як нормований. Норму в R^q задамо формулою $\|z\| = \sum_{i \in N_q} |z_i|$, де $z = (z_1, \ldots, z_q) \in R^q$. Під нормою деякої матриці $B = [b_{ij}] \in R^{m \times k}$ будемо розуміти норму вектора $(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{mk})$. Зазначимо [23], що у скінченновимірному просторі R^q будь-які дві норми: $\|\cdot\|^{(1)}, \|\cdot\|^{(2)}$, є еквівалентними, тобто знайдуться такі числа $\alpha > 0$ та $\beta > 0$, що $\forall z \in R^q$ виконуються нерівності $\alpha \|z\|^{(1)} \leq \|z\|^{(2)} \leq \beta \|z\|^{(1)}$. З урахуванням цієї еквівалентності викладені далі результати справедливі й для інших норм, уведених у скінченновимірному просторі.

Для набору вхідних даних $u \in U$ і будь-якого числа $\delta > 0$ визначимо множину збурених вхідних даних

$$O_\delta(u) = \{u(\delta) \in U \,|\, \|u(\delta) - u\| < \delta\}.$$

Задача зі збуреними вхідними даними для векторного критерію матиме вигляд

$$Q(F_{u(\delta)}, X) \colon \max\{F_{u(\delta)}(x) \,|\, x \in X\},$$

де $u(\delta) \in O_\delta(u)$, $F_{u(\delta)}(x) = (f_1^{u(\delta)}(x), \ldots, f_\ell^{u(\delta)}(x))$.

Означення 1. Задачу $Q_{Sl}(F_u, X)$ $(Q_P(F_u, X))$ назвемо стійкою за векторним критерієм, якщо $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ таке, що $\forall u(\delta) \in O_\delta(u)$ виконується умова $Sl(F_{u(\delta)}, X) \subset O_\varepsilon(Sl(F_u, X))$ (відповідно $P(F_{u(\delta)}, X) \subset O_\varepsilon(P(F_u, X))$.

Тут і далі $O_\varepsilon(B) = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, \inf\limits_{y \in B} \|x - y\| < \varepsilon \right\}$ — ε-окіл будь-якої множини $B \in R^n$.

Наведемо деякі відомі поняття [1, 3, 4], що характеризують властивості неперервності і замкненості точково-множинних відображень і будуть використовуватися для дослідження питань стійкості задачі $Q_{Sl}(F_u, X)$ та регуляризації задачі $Q_P(F_u, X)$ за можливих збурень вхідних даних.

Нехай $\Gamma \colon U \to 2^X$ — точково-множинне відображення, яке кожній точці $u \in U$ ставить у відповідність деяку підмножину $\Gamma(u)$ множини X (наприклад, підмножину $S\ell(F_u, X)$ або $P(F_u, X)$). Точково-множинне відображення Γ вважається напівнеперервним зверху за Хаусдорфом у деякій точці $u \in U$, якщо $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ таке, що $\forall u(\delta) \in O_\delta(u) \colon \Gamma(u(\delta)) \subset O_\varepsilon(\Gamma(u))$.

Враховуючи означення 1, зазначимо, що стійкість за векторним критерієм задачі $Q_{Sl}(F_{\bar{u}}, X)$ $(Q_P(F_{\bar{u}}, X))$, де $\bar{u} \in U$ означає, що точково-множинне відображення $Sl \colon U \to 2^X$, $u \to Sl(u) = Sl(F_u, X)$ (відповідно відображення $P \colon U \to 2^X$, $u \to P(u) = P(F_u, X)$) є напівнеперервним зверху за Хаусдорфом у точці $\bar{u}$.

Відображення $\Gamma \colon U \to 2^X$ називається напівнеперервним зверху за Бержем у точці $u \in U$, якщо для будь-якої відкритої множини $\Omega \subset X$, для якої $\Gamma(u) \subset \Omega$, існує число $\delta = \delta(\Omega) > 0$ таке, що $\forall u(\delta) \in O_\delta(u) \colon \Gamma(u(\delta)) \subset \Omega$.

Замкненість відображення Γ у точці $u \in U$ означає, що для будь-яких двох послідовностей: $\{u_s\}$ і $\{x_s\}$, таких, що $\{u_s \,|\, s \in N\} \subset U$, $\{x_s \,|\, s \in N\} \subset X$, $N = \{1, 2, \ldots\}$, $\lim\limits_{s \to \infty} u_s = u$, $\lim\limits_{s \to \infty} x_s = x^o \in X$, з належностей $x_s \in \Gamma(u_s)$, $s \in N$, випливає, що $x^o \in \Gamma(u)$.

УМОВИ СТІЙКОСТІ ТА РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ ВЕКТОРНОЇ ЗАДАЧІ ЗА МОЖЛИВИХ ЗБУРЕНЬ КРИТЕРІЇВ

Сформулюємо згідно з [1] дві елементарні властивості точково-множинних відображень, які використаємо далі під час доведення теореми 1 про напівнеперервність зверху за Хаусдорфом точково-множинного відображення $Sl \colon U \to 2^X$, $u \to Sl(u) = Sl(F_u, X)$.

Властивість 1. Якщо множина X є компактом (тобто обмеженою і замкненою), то із замкненості точково-множинного відображення $\Gamma \colon U \to 2^X$ у деякій точці $u \in U$ випливає його напівнеперервність зверху за Бержем у цій точці.

Властивість 2. З напівнеперервності зверху за Бержем точково-множинного відображення $\Gamma \colon U \to 2^X$ у точці $u \in U$ випливає його напівнеперервність зверху за Хаусдорфом у цій точці.

Теорема 1. Нехай допустима множина X задачі $Q(F_u, X)$, де $u \in U$, є компактом. Тоді точково-множинне відображення $Sl: U \to 2^X$ є напівнеперервним зверху за Хаусдорфом у точці $u \in U$.

Доведення. Спочатку доведемо замкненість точково-множинного відображення $Sl: U \to 2^X$ у точці $u = (D, C) \in U$, врахувавши обмеженість множини X. Розглянемо дві послідовності $\{u_s\}$ та $\{x_s\}$ такі, що $\{u_s | s \in N\} \subset U$, $\{x_s | s \in N\} \subset X$ і, крім того,

$$\lim_{s\to\infty} u_s = u, \ \lim_{s\to\infty} x_s = x^o \in X, \tag{3}$$

$$u_s = (D^s, C^s), \ D^s = (D_1^s, \ldots, D_\ell^s) \in R^{n\times n\times \ell}, \ C^s = [c_{ij}^s] \in R^{\ell\times n},$$

$$x_s \in Sl(F_{u_s}, X), s \in N.$$

Останні належності означають, що $\forall (y \in X, s \in N) \ \exists i \in N_\ell$:

$$\left\langle y, D_i^s y \right\rangle + \left\langle c_i^s, y \right\rangle \le \left\langle x_s, D_i^s x_s \right\rangle + \left\langle c_i^s, x_s \right\rangle, \tag{4}$$

де $c_i^s = (c_{i1}^s, \ldots, c_{in}^s) \in R^n$.

Покажемо, що має місце належність $x^o \in Sl(F_u, X)$. Нехай (від супротивного) $\exists z \in X: F_u(z) > F_u(x^o)$, тобто $\forall i \in N_\ell: \left\langle z, D_i z \right\rangle + \left\langle c_i, z \right\rangle > \left\langle x^o, D_i x^o \right\rangle + \left\langle c_i, x^o \right\rangle$. У такому випадку згідно з (3), а також з урахуванням порядкових і арифметичних властивостей границь послідовностей та еквівалентності збіжності послідовностей у будь-якому дійсному векторному просторі з їхньою покоординатною збіжністю [23] робимо висновок, що існує такий номер $s_o \in N$, що $\forall s > s_o$ і $\forall i \in N_\ell$

$$\left\langle z, D_i^s z \right\rangle + \left\langle c_i^s, z \right\rangle > \left\langle x_s, D_i^s x_s \right\rangle + \left\langle c_i^s, x_s \right\rangle. \tag{5}$$

Проте, з формул (4) випливає, що $\forall s \in N \ \exists i > N_\ell: \left\langle z, D_i^s z \right\rangle + \left\langle c_i^s, z \right\rangle \le$ $\le \left\langle x_s, D_i^s x_s \right\rangle + \left\langle c_i^s, x_s \right\rangle$. Отже, отримуємо протиріччя з нерівністю (5), яке доводить замкненість відображення $Sl: U \to 2^X$ у точці $u \in U$. Звідси з урахуванням наведених властивостей 1 і 2 точково-множинних відображень і припущення щодо компактності множини X випливає напівнеперервність зверху за Бержем відображення $Sl: U \to 2^X$ у точці $u \in U$, з якої, своєю чергою, випливає напівнеперервність зверху за Хаусдорфом цього відображення. Доведення завершено.

Наслідок 1. Якщо допустима множина X задачі $Q(F_u, X)$, де $u \in U$, є компактом, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ таке, що $\forall u(\delta) \in O_\delta(u): S\ell(F_{u(\delta)}, X) \subset O_\varepsilon S\ell(F_u, X)$, тобто задача $Q_{Sl}(F_u, X)$ на відшукання множини Слейтера є стійкою за векторним критерієм.

Далі розглянемо підхід до регуляризації можливо нестійкої за векторним критерієм задачі $Q_P(F, X)$ у частковому випадку, коли критерій F складається з лінійних функцій

$$f_i(x) = \left\langle c_i, x \right\rangle, \ i \in N_\ell. \tag{6}$$

Для такої задачі набір u вхідних даних, які можуть підлягати збуренню, складається з елементів матриці C, тобто $u = C \subset U \subset R^{\ell\times n}$. Позначимо таку задачу $Q_P(F_C, X)$.

Щодо стійкості за векторним критерієм задачі $Q_P(F_C, X)$ зазначимо [1, 17], що виконання рівності

$$S\ell(F_C, X) = \mathrm{cl}(P(F_C, X)), \tag{7}$$

де cl$B$ — замикання будь-якої множини $B \subset R^n$, є необхідною умовою стійкості задачі. Доведено також достатність умови (7) у випадку, коли допустима множина X є компактом.

Якщо припустити, що задача $Q_P(F_C, X)$ стійка до збурень елементів матриці C, тоді в результаті її розв'язання отримаємо розв'язки, близькі до істинних, навіть у випадку, коли мають місце досить невеликі помилки у поданні матриці C. Проте, якщо задача $Q_P(F_C, X)$ не є стійкою, тоді, враховуючи означення 1, $\exists \varepsilon > 0$ таке, що $\forall \delta > 0$ знайдеться матриця $C(\delta) \in O_\delta(C) = \{C(\delta) \in U \mid \|C(\delta) - C\| < \delta\}$, для якої $P(F_{C(\delta)}, X) \setminus O_\varepsilon P(F_C, X) = \varnothing$. У такому випадку під час розв'язання задачі $Q_P(F_{C(\delta)}, X)$ з можливими збуреннями (помилками, неточностями) у вхідних даних векторного критерію існує вірогідність отримати такі її Парето-оптимальні розв'язки, які не є Парето-оптимальними чи навіть близькими до них для задачі $Q_P(F_C, X)$. Щоб запобігти цьому, пропонується у випадку, коли множина X є компактом, перейти від розв'язання можливо нестійкої задачі $Q_P(F_C, X)$ оптимізації за Парето до розв'язання напевно стійкої задачі $Q_{S\ell}(F_{C^\tau}, X)$ на відшукання розв'язків, оптимальних за Слейтером, в якій матриця C^τ коефіцієнтів векторного критерію є спеціальним чином збуреною (зміненою) у порівнянні з початковою матрицею C. До того ж, будь-який оптимальний за Слейтером розв'язок задачі $Q_{S\ell}(F_{C^\tau(\delta)}, X)$ з можливими збуреннями у матриці C^τ буде належати ε-околу множини розв'язків початкової задачі $Q_P(F_C, X)$, тобто $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ таке, що $\forall C^\tau(\delta) \in O_\delta(C^\tau): S\ell(F_{C^\tau(\delta)}, X) \subset O_\varepsilon P(F_C, X)$.

Для обґрунтування цього способу регуляризації можливо нестійкої задачі $Q_P(F_C, X)$ застосуємо одне з положень теорії збурених конусів, представленої, зокрема, в [1, 15–17, 21]. Це положення, сформульоване далі у твердженні 1, з'ясовує співвідношення, яке за певних збурень матриці C виникає між конусом $K = \{x \in R^n \mid Cx \geq 0\}$, його лінійною підмножиною $K_0 = \{x \in R^n \mid Cx = 0\}$ і внутрішністю $\operatorname{int} K = \{x \in R^n \mid Cx > 0\}$. Зазначимо, що з урахуванням (1) і (2) $\forall x \in X$ справедливі еквівалентності:

$$x \in P(F_C, X) \Leftrightarrow (x + (K \setminus K_0)) \bigcap X = \varnothing, \tag{8}$$

$$x \in Sl(F_C, X) \Leftrightarrow (x + \operatorname{int} K) \bigcap X = \varnothing. \tag{9}$$

Збуримо матрицю C, замінивши кожен її вектор-рядок $c_i \ (i \in N_\ell)$ таким: $c_i^\tau = c_i - \tau w$, де $\tau \in R^1$ — параметр збурення, $w \in R^n$ — внутрішня точка опуклої оболонки множини $\{c_1, \ldots, c_\ell\}$, $w = \sum_{i \in N_\ell} \mu_i c_i$, $\sum_{i \in N_\ell} \mu_i = 1$, $\mu_i > 0 \ (i \in N_\ell)$. Збурену матрицю позначимо $C^\tau \in R^{\ell \times n}$. Їй у відповідність поставимо опуклі конуси, отримані збуренням конусів K і K_0: $K^\tau = \{x \in R^n \mid C^\tau x \geq 0\}$, $K_0^\tau = \{x \in R^n \mid C^\tau x = 0\}$.

Твердження 1. Якщо $\tau < 0$, то має місце включення $K \setminus K_0 \subset \operatorname{int} K^\tau$.

Доведення. Нехай x — будь-яка точка множини $K \setminus K_0$. Тоді $\forall i \in N_\ell: c_i x \geq 0$ і $\exists k \in N_\ell: \langle c_k, x \rangle > 0$. Враховуючи ці нерівності, отримаємо оцінку скалярного добутку $\langle w, x \rangle = \sum_{i \in N_\ell} \mu_i \langle c_i, x \rangle > 0$. Отже, $\forall \tau < 0$ маємо $\left\langle c_i^\tau, x \right\rangle = \left\langle (c_i - \tau w), x \right\rangle = \left\langle c_i, x \right\rangle - \tau \langle w, x \rangle > 0$, $i \in N_\ell$, що означає належність $x \in \operatorname{int} K^\tau$.

Наступне твердження разом з наслідком 1 теореми 1 лежить в основі запропонованого підходу до регуляризації за векторним критерієм задачі $Q_P(F_C, X)$ з лінійними частковими критеріальними функціями вигляду (6).

Твердження 2 [1, 16]. Для будь-якого $\tau < 0$ справджується включення

$$S\ell(F_{C^\tau}, X) \subset P(F_C, X). \tag{10}$$

Доведення. Нехай $\tau < 0$. Для будь-якої точки $x \in S\ell(F_{C^\tau}, X)$ згідно з (9) справджується рівність $(x + \operatorname{int} K^\tau) \bigcap X = \varnothing$. З неї, враховуючи твердження 1, приходимо до висновку, що $(x + (K \setminus K_0)) \bigcap X = \varnothing$. Застосовуючи формулу (8), отримуємо належність $x \in P(F_C, X)$, яка і доводить включення (10).

Згідно з наслідком 1 теореми 1 і твердженням 2 отримаємо висновок, який обґрунтовує правомірність запропонованого підходу до регуляризації можливо нестійкої за векторним критерієм векторної задачі $Q_P(F_C, X)$.

Теорема 2. Якщо допустима множина X задачі $Q_P(F_C, X)$ є компактом, тоді $\forall \tau < 0$ і $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ таке, що $\forall C^\tau(\delta) \in O_\delta(C^\tau)$ мають місце включення

$$S\ell(F_{C^\tau(\delta)}, X) \subset O_\varepsilon S\ell(F_{C^\tau}, X) \subset O_\varepsilon P(F_C, X).$$

Отже, запропонований підхід до регуляризації можливо нестійкої задачі $Q_P(F_C, X)$ дає змогу перейти до напевно стійкої задачі $Q_{S\ell}(F_{C^\tau}, X)$ зі збуреним певним чином векторним критерієм, що забезпечує відшукання розв'язків, які належать ε-околу задачі $Q_P(F_C, X)$, тобто близьких до істинних, навіть коли мають місце невеликі збурення у поданні матриці C^τ.

ВИСНОВКИ

У статті наведено нові результати щодо умов стійкості та регуляризації векторних задач оптимізації за можливих збурень вхідних даних векторного критерію, який складається з квадратичних чи лінійних функцій. Доведено стійкість таких задач у випадку пошуку розв'язків, оптимальних за Слейтером. У разі оптимізації за Парето розроблено підхід до регуляризації задач з лінійними критеріальними функціями. Для векторних задач оптимізації розроблення цього підходу істотно пов'язано з використанням того факту, що задача $Q_{Sl}(F_u, X)$ пошуку точок з множини Слейтера завжди стійка у визначеному розумінні стійкості щодо збурень коефіцієнтів векторного критерію.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наук. думка, 1995. 170 с.
2. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. Киев: Наук. думка, 2003. 264 с.
3. Bank B., Guddat J., Klatte D., Kummer B., Tammer K. Non-liniar parametric optimization. Berlin: Akademie-Verlag, 1982. 226 p.
4. Математическая оптимизация: вопросы разрешимости и устойчивости. Под ред. Е.Г. Белоусова, Б. Банка. Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1986. 216 с.
5. Белоусов Е.Г., Андронов В.Г. Разрешимость и устойчивость задач полиномиального программирования. Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1993. 172 с.
6. Greenberg H. An annotated bibliography for post-solution analysis in mixed integer and combinatorial optimization. In: *Advances in Computational and Stochastic Optimization, Logic Programming and Heuristic Search.* D.L. Woodruff (ed.). New York: Springer Science+Business Media, 1998. P. 97–148. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2807-1_4.

7. Емеличев В.А., Подкопаев Д.П. Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования. *Дискретный анализ и исследование операций.* 2001. Сер. 2. Том 8, № 1. С. 47–69.
8. Емеличев В.А., Гуревский Е.Е. О регуляризаци векторных задач целочисленного квадратичного программирования. *Кибернетика и системный анализ.* 2009. № 2. С. 128–134.
9. Emelichev V.A., Kotov V.M., Kuzmin K.G., Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Stability and effective algorithms for solving multiobjective discrete optimization problems with incomplete information. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2014. Vol. 46, N 2. P. 27–41.
10. Pareto V. Manuel d'economie politique. Qiard.-Paris, 1909.
11. Steuer R. Multiple criteria optimization: theory, computation and application. New York: John Wiley, 1986. 546 p.
12. Ehrgott M. Multicriteria optimization. Berlin; Heidelberg: Springer, 2005. 323 p.
13. Johannes J. Vector optimization. Theory, applications, and extensions. Second edition. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 481 p.
14. Hadamard J. Sur les problems aux derives partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin.* 1902. Vol. 13. P. 49–52.
15. Kozeratskaya L.N., Lebedeva T.T., Sergienko T.I. Mixed integer vector optimization: Stability issues. *Cybernetics.* 1991. Vol. 27, N 1. P. 76–80.
16. Kozeratskaya L.N., Lebedeva T.T., Sergienko T.I. Regularization of integer vector optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis.* 1993. Vol. 29, N 3. P. 455–458.
17. Kozeratskaya L.N. Vector optimization problems: Stability in the decision space and in the space of alternatives. *Cybernetics and Systems Analysis.* 1994. Vol. 30, N. 6. P. 891–899.
18. Sergienko I.V., Lebedeva T.T., Semenova N.V. Existence of solutions in vector optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2000. Vol. 36, N 6. P. 823–828.
19. Lebedeva, T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Stability of vector problems of integer optimization: Relationship with the stability of sets of optimal and nonoptimal solutions. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2005. Vol. 41, N. 4. P. 551–558.
20. Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Qualitative characteristics of the stability vector discrete optimization problems with different optimality principles. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2014. Vol. 50, N. 2. P. 228–233.
21. Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Properties of perturbed cones ordering the set of feasible solutions of vector optimization problem. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2014. Vol. 50, N. 5. P. 712–717.
22. Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Multi-objective optimization problem: stability against perturbations of input data in vector-valued criterion. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2020. Vol. 56, N 6. P. 953–958.
23. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К. Математичний аналіз. Ч. 1. Київ: Вища школа. 1992. 495 с.

T.T. Lebedeva, N.V. Semenova, T.I. Sergienko

STABILITY AND REGULARIZATION OF VECTOR OPTIMIZATION PROBLEMS WITH POSSIBLE PERTURBATIONS OF CRITERIA

Abstract. The article is devoted to new results related to the stability and regularization of vector (multicriteria) optimization problems for possible perturbations of the input data of a vector criterion consisting of quadratic or linear functions. The stability of problems with quadratic criteria for finding solutions that are Slater-optimal is proved. In the case of Pareto optimization, an approach to regularization of problems with linear criterion functions is developed.

Keywords: vector problem, Pareto-optimal solutions, Slater set, stability with respect to vector criterion, perturbations of initial data, regularization.

Надійшла до редакції 31.05.2022