УДК 311

В.А. ПЕПЕЛЯЄВ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *pepelaev@yahoo.com*.
О.М. ГОЛОДНІКОВ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна.
Н.О. ГОЛОДНІКОВА
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна.

НОВИЙ МЕТОД ОПТИМІЗАЦІЇ НАДІЙНОСТІ В КЛАСИЧНІЙ ПОСТАНОВЦІ ЗАДАЧІ

Анотація. Розглянуто задачу мінімізації надійності. Проведено аналіз одного із існуючих підходів до розв'язання цієї задачі, а саме: bPOE. Визначено переваги і недоліки цього підходу. Зазначено, що результати мінімізації ймовірності відмов у класичній постановці і мінімізації bPOE можуть відрізнятися. Запропоновано новий метод оптимізації надійності в класичній постановці задачі. Проведено порівняльний аналіз результатів мінімізації надійності з використанням bPOE із результатами, отриманими запропонованим методом.

Ключові слова: bPOE, VaR, мінімізація ймовірності відмов, надійність, хвіст функції розподілу, функція втрат, поріг.

ВСТУП

Класична задача оптимізації надійності полягає у мінімізації ймовірності того, що випадкова величина X, яка використовується для моделювання небажаної події, перевищує деякий критичний поріг h. У цьому підході ігнорується ступінь перевищення випадковою величиною X заданого порога. Така постановка задачі є адекватною у випадках, коли збитки від перевищення порога h не є критичними і не залежать від ступеню перевищення. Наприклад, під час аналізу ризику аварій на деяких виробничих об'єктах внаслідок перевищення межі області працездатних станів важливим є сам факт такого перевищення, а не його ступінь. Однак для мінімізації ймовірності відмов у такій постановці виникають значні математичні труднощі, зумовлені відсутністю неперервності функції розподілу випадкової змінної X [1, 2].

Іноді неврахування в моделях ступеню перевищення заданого порога h може призвести до ігнорування величезних втрат з малою ймовірністю. Це стосується, перш за все, моделей, пов'язуваних з катастрофічними подіями, такими як урагани [3], значні втрати врожаю внаслідок посух [4].

Для подолання цих вад у роботі [1] було розроблено нову альтернативну міру ризику — буферну ймовірність відмови. Ця міра ризику враховує ступінь перевищення порога відмови $h = 0$ і є більш консервативною, ніж ймовірність відмови в класичній постановці задачі. У роботі [5] запропоновано використовувати буферну ймовірність перевищення (Buffered Probability of Exceedance, bPOE) як міру ризику, що узагальнює буферну ймовірність відмови на випадок, коли поріг функціональної відмови системи є будь-яким числом (не тільки нулем). Ця міра ризику ґрунтується на властивостях міри CVaR [6, 7]. Приклади застосування CVaR і bPOE в різних оптимізаційних задачах надано в роботах [3, 4, 8–14]. Альтернативні підходи до оптимізації bPOE запропоновано в [8, 12].

Зауважимо, що використання міри ризику bPOE орієнтоване на мінімізацію частки найбільших значень функції розподілу втрат, математичне сподівання яких дорівнює порогу h. Отже, результати мінімізації ймовірності відмов у класичній постановці і мінімізації bPOE можуть відрізнятися.

У цій роботі запропоновано новий підхід до оптимізації надійності в класичній постановці, який є модифікацією методу, розробленого в [12]. Для ілюстрації ефективності запропонованого підходу здійснено обчислення з використанням трьох варіантів даних.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай $X=(x_1,\dots,x_N)$ — вектор, компоненти якого є випадковими величинами. Випадкова величина x_n з однаковою ймовірністю $p=1/M$ набуває M значень $x_{1n},\dots,x_{Mn}$, $n=1,\dots,N$. Нехай $Y=(y_1,\dots,y_N)$ — вектор, компоненти якого задовольняють обмеження

$$\sum_{i=1}^{N} y_i=1, \tag{1}$$

$$y_i\ge 0,\ i=1,\dots,N. \tag{2}$$

Розглянемо випадкову функцію втрат

$$\eta_X(Y)=b-\sum_{i=1}^{N} y_i x_i, \tag{3}$$

де b — константа. Для фіксованих значень $\tilde{y}_1,\dots,\tilde{y}_N$ компонентів вектора $\tilde{Y}$ випадкова величина $\eta_X(\tilde{Y})=b-\sum_{i=1}^{N}\tilde{y}_i x_i$ набуває значень $b-\sum_{i=1}^{N}\tilde{y}_i x_{1i},\dots$ $\dots,b-\sum_{i=1}^{N}\tilde{y}_i x_{Mi}$ з однаковою ймовірністю $p=1/M$.

Функція розподілу $\eta_X(\tilde{Y})$ визначається як $F_\eta(u)=P\{\eta_X(\tilde{Y})\le u\}$. Квантилем рівня α ($\alpha\in[0,1]$) цієї функції розподілу є число x_α таке, що $P\{\eta_X(\tilde{Y})\le x_\alpha\}=\alpha$. У публікаціях з фінансової інженерії замість поширеного терміна «квантиль» використовується термін VaR, який обчислюється за формулою

$$VaR_\alpha(\eta)=\min\{u\,|\,F_\eta(u)\ge\alpha\}.$$

Класична задача оптимізації надійності формулюється як задача мінімізації ймовірності того, що втрати перевищуватимуть заданий поріг h:

$$\min_{y_1,\dots,y_N} P\left\{b-\sum_{i=1}^{N} y_i x_i>h\right\} \tag{4}$$

за обмежень (1), (2).

МЕТОД МІНІМІЗАЦІЇ ЙМОВІРНОСТІ ВІДМОВ

Нехай β — змінна величина, яка задовольняє умови $0\le\beta\le 1$. Для розв'язання задачі (4), (1), (2) запропоновано таку оптимізаційну модель.

Знайти максимальне значення β:

$$\max\beta, \tag{5}$$

за якого існує вектор $Y=(y_1,\dots,y_N)$ такий, що

$$VaR_\beta\left(b-\sum_{i=1}^{N} y_i x_i\right)\le h, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{N} y_i=1, \tag{7}$$

$$y_i\ge 0,\ i=1,\dots N, \tag{8}$$

$$0\le\beta\le 1. \tag{9}$$

Деякі оптимізаційні пакети програм не забезпечують можливості розв’язання задачі в такій постановці. Тому ми ввели в цільову функцію штучну змінну t з нульовим коефіцієнтом і звели задачу (5)–(9) до наведеної еквівалентної дворівневої оптимізаційної задачі.

Знайти максимальне значення β:

$$\max \beta, \tag{10}$$

за якого наведена оптимізаційна задача має розв’язок:

$$\max 0 \cdot t \tag{11}$$

за обмежень

$$VaR_\beta \left(b - \sum_{i=1}^{N} y_i x_i \right) \le h, \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = 1, \tag{13}$$

$$y_i \ge 0, \ i = 1, \ldots, N, \tag{14}$$

$$0 \le \beta \le 1. \tag{15}$$

Для розв’язання цієї задачі запропоновано застосовувати наведений ітеративний дворівневий метод оптимізації.

На кожній ітерації на верхньому рівні вибирається значення $\beta = \tilde{\beta}$ на одновимірному відрізку [0,1]. На нижньому рівні за фіксованим значенням $\tilde{\beta}$ розв’язується оптимізаційна задача (11)–(15). Зауважимо, що VaR_β є неспадною функцією β. Тому для пошуку максимального значення β, за якого оптимізаційна задача (11)–(15) має розв’язок, запропоновано застосовувати метод дихотомії. Цей метод одновимірної оптимізації дає змогу швидко знайти максимальне значення β з будь-якою точністю.

Порівнюватимемо результати використання моделі (10)–(15) для розв’язання задачі (1), (2), (4) з результатами мінімізації bPOE [5]:

$$\min_{y_1, \ldots, y_N} bPOE_h \left\{ b - \sum_{i=1}^{N} y_i x_i \right\}. \tag{16}$$

Міра ризику bPOE для випадкової величини ξ визначається у такий спосіб [5]:

$$bPOE_h(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad h \ge \sup \xi; \\ 1 - CVaR^{-1}(h; \xi), & \text{якщо} \quad E\xi < h < \sup \xi; \\ 1 & \text{інакше}, \end{cases}$$

де вираз $CVaR^{-1}(h; \xi)$ позначає функцію, обернену до $CVaR_h(\xi)$.

РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ

Порівняємо результати оптимізації надійності, що одержані з використанням запропонованої моделі (10)–(15), з результатами мінімізації (16). Для проведення обчислень використовувались пакет програм AORDA PSG [15] і дані з бібліотеки тестових оптимізаційних задач, розміщених на сайті AORDA з ме-

Таблиця 1

Номер задачі	Назва даних	Вхідні дані для трьох оптимізаційних задач з параметрами				
		b	N	M	h	Компоненти вектора Y^0
1	Omega	0.064	9	641	0.0672	$y_1^0 = \ldots = y_8^0 = 0.1111,\ y_9^0 = 0.1112$
2	AUC	0.5	6	10000	1.243648	$y_1^0 = \ldots = y_5^0 = 0.15.\ y_6^0 = 0.25$
3	Classification	0.46	4	1264	0.56	$y_1^0 = \ldots = y_4^0 = 0.25$

Таблиця 2

Вектор Y^*	Оптимальні значення компонентів вектора $Y^* = (y_1^*, \ldots, y_N^*)$ для даних і задач					
	Omega		AUC		Classification	
	Задача (16)	Задача (10)–(15)	Задача (16)	Задача (10)–(15)	Задача (16)	Задача (10)–(15)
y_1^*	7.486645e-2	7.486645e-2	1.972043e-1	1.706503e-1	7.358282e-1	4.309416e-1
y_2^*	3.575082e-1	3.575082e-1	0	3.023876e-4	0	2.785902e-2
y_3^*	0	0	3.677601e-1	3.547316e-1	2.641718e-1	5.411994e-1
y_4^*	0	0	3.559229e-1	3.875104e-1	0	0
y_5^*	3.02188e-1	3.02188e-1	7.91127e-2	8.653416e-2	–	–
y_6^*	5.244932e-2	5.244932e-2	0	2.711551e-4	–	–
y_7^*	1.943639e-2	1.943639e-2	–	–	–	–
y_8^*	1.032006e-1	1.032006e-1	–	–	–	–
y_9^*	9.035097e-2	9.035097e-2	–	–	–	–

тою порівняльного аналізу [16]. Інформація на цьому сайті містить постановку задачі, вхідні дані і результати оптимізації. За цією інформацією ми використовували лише дані щодо формування випадкового вектора $X = (x_1, \ldots, x_N)$, компоненти якого входять до обмежень (6), (12). Значення параметрів b і h вибиралися довільно. Вільний доступ до даних на сайті AORDA дає змогу перевіряти отримані результати оптимізації, які наведено в цій статті. Розрахунки здійснювалися для трьох оптимізаційних задач [17–19], реалізованих у середовищі Run-File. Дані для кожної задачі наведено в табл. 1.

Дані задачі Omega були завантажені з сайту Case Study: Omega Portfolio Rebalancing [17], задачі AUC — з сайту Case Study: Classification by Maximizing Area Under ROC Curve (AUC) [18], задачі Classification — з сайту Case Study: Style Classification with Quantile Regression [19].

Позначення в табл. 1: b — константа для функції втрат $\eta_X(Y)$ у виразі (3); N — розмірність випадкового вектора X; M – кількість значень, які приймає кожна компонента випадкового вектора X; h — заданий поріг; $Y^0 = (y_1^0, \ldots, y_N^0)$ — вектор початкових значень змінних задачі.

Результати розрахунків наведено в табл. 2 і табл. 3.

Аналіз результатів розрахунків, наведених в табл. 2, свідчить, що розв'язки задач (16) та (10)–(15) (оптимальні точки) для даних Omega повністю збігаються, а для даних AUC та Classification — суттєво відрізняються. Більш детальна інформація щодо отриманих результатів наведена в табл. 3.

Позначення в табл. 3: opt — оптимальне значення функції цілі в задачі (16); P^0 — ймовірність перевищення порога h для початкових значень Y^0; P^* —

Т а б л и ц я 3

Показник	**Значення показників для даних і задач, отримані в результаті оптимізації**					
	Дані: Omega		Дані: AUC		Дані: Classification	
	Задача (16)	Задача (10)–(15)	Задача (16)	Задача (10)–(15)	Задача (16)	Задача (10)–(15)
opt	4.042107E-2	–	1.628014E-1	–	7.703582E-2	–
P^0	1.809443E-1	1.809443E-1	1.5E-1	1.5E-1	4.844298E-2	4.844298E-2
P^*	1.108994E-2	1.108994E-2	6.559342E-2	6.42E-2	3.453152E-2	3.050042E-2
$\Delta P(\%)$	-93.871	-93.871	-56.271	-57.2	-28.717	-37.039
β^*	–	0.98891	–	0.935702	–	0.969489

ймовірність перевищення порога h після розв'язання задач (16) та (10)–(15); $\Delta P(\%)$ — відсоток, на який зменшилась ймовірність перевищення порога h після розв'язання задач (16) та (10)–(15); β^* — максимальне значення β, $0 \le \beta \le 1$, за якого виконується нерівність (12) з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$; отже, $\beta^* + P^* = 1$.

Після розв'язання задачі (16) і задачі (10)–(15) з використанням даних Omega ймовірність перевищення порога h зменшується на 93.871% до початкового значення. Отже, в цьому випадку запропонований підхід до оптимізації надійності в класичній постановці має той самий результат, що і у випадку мінімізації bPOE. Під час використання даних AUC і даних Classification запропонований метод мінімізації ймовірності відмов дає кращі результати, ніж метод bPOE. Зокрема, у разі використання даних Classification розв'язання задачі (10)–(15) забезпечує зменшення ймовірності відмов на 37.039%, водночас як розв'язання задачі (16) — лише на 28.717%.

ВИСНОВКИ

Ймовірність відмови є основним показником надійності складних систем та їхніх компонентів. Оптимізація цього показника пов'язана із значними математичними труднощами, які зумовлені відсутністю неперервності функції розподілу випадкової змінної X, що моделює втрати. Альтернативною мірою ризику є буферна ймовірність відмови bPOE, яка дає змогу уникнути ці труднощі. У класичній постановці задачі мінімізації ймовірності відмов враховуються тільки мінімальні значення випадкової величини X, розташовані в хвості її функції розподілу. Для оптимізації bPOE використовується вся інформація про цей хвіст. Тому результати мінімізації цих двох показників надійності можуть відрізнятися. У разі, коли втрати від перевищення випадковою величиною X порога h не є критичними або не залежать від ступеню перевищення, класична постановка задачі мінімізації ймовірності відмов є більш адекватною.

У цій роботі запропоновано новий підхід до оптимізації надійності в класичній постановці. Результати розрахунків з використанням трьох наборів даних продемонстрували більшу ефективність запропонованого методу порівняно з bPOE.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Rockafellar T., Royset J.O. On buffered failure probability in design and optimization of structures. *Reliability Engineering and System Safety*. 2010. Vol. 95, N 5. P. 499–510. https://doi.org/10.1016/j.ress.2010.01.001.
2. Rockafellar R.T. Convexity and reliability in engineering optimization. *Proceedings of the 9th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (Chiangrai, Thailand)*. 2015. P. 1–10. URL: https://sites.math.washington.edu/~rtr/papers/rtr239-Reliability.pdf.

3. Davis J.R., Uryasev S. Analysis of tropical storm damage using buffered probability of exceedance. *Natural Hazards*. 2016. Vol. 83. P. 465–483. https://doi.org/10.1007/s11069-016-2324-y.
4. Pepelyaev V.A., Golodnikov A.N., Golodnikova N.A. Reliability optimization in plant production. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2022. Vol. 58, N 2. P. 191–196. https://doi.org/10.1007/s10559-022-00450-5.
5. Mafusalov A., Uryasev S. Buffered probability of exceedance: Mathematical properties and optimization. *SIAM. J. Optim.* 2018. Vol. 28. P. 1077–1103. https://doi.org/10.1137/15M1042644.
6. Rockafellar R.T., Uryasev S. Optimization of conditional value-at-risk. *The Journal of Ris*k. 2000. Vol. 2, N 3. P. 21–41. https://doi.org/10.21314/JOR.2000.038.
7. Rockafellar R.T., Uryasev S. Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance.* 2002. Vol. 26, N 7. P. 1443–1471. https://doi.org/10.1016/S0378-4266(02)00271-6.
8. Norton M., Uryasev S. Maximization of AUC and buffered AUC in binary classification. *Mathematical Programming*. 2019. Series A and B. Vol. 174, N 1–2. P. 575–612. https://doi.org/10.1007/s10107-018-1312-2.
9. Rockafellar R.T., Uryasev S. Minimizing buffered probability of exceedance by progressive hedging. *Math. Program*. 2020. Vol. 181. P. 453–472. https://doi.org/10.1007/s10107-019-01462-4.
10. Zrazhevsky G.M., Golodnikov A.N., Uryasev S.P., Zrazhevsky A.G. Application of buffered probability of exceedance in reliability optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2020. Vol. 56, N 3. P. 476–484. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00263-4.
11. Golodnikov A., Kuzmenko V., Uryasev S. CVaR regression based on the relation between CVaR and mixed-quantile quadrangles. *Journal of Risk and Financial Management*. 2019. Vol. 12. P. 107. https://doi.org/10.3390/jrfm12030107.
12. Пепеляєв В.А., Голодніков О.М., Голоднікова Н.О. Метод оптимізації надійності, альтернативний bPOE. *Кібернетика та системний аналіз*. 2022. Т. 58, № 4. С. 112 –116.
13. Pepelyaev V.A., Golodnikova N.A. Mathematical methods for crop losses risk evaluation and account for sown areas planning. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N 1. P. 60–67. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9592-x.
14. Golodnikov A.N., Knopov P.S., Pepelyaev V.A. Estimation of reliability parameters under incomplete primary information. *Theor. Decis.* 2004. Vol. 57. P. 331–344. https://doi.org/10.1007/s11238-005-3217-9.
15. Portfolio Safeguard. URL: http://www.aorda.com/index.php/portfolio-safeguard/.
16. Test problems for nonLinear, stochastic, mixed-Integer optimization. URL: http://uryasev.ams.stonybrook.edu/index.php/research/testproblems/.
17. Omega Portfolio Rebalancing. URL: http://uryasev.ams.stonybrook.edu/index.php/research/testproblems/financial_engineering/omega-portfolio-rebalancing/.
18. Classification by maximizing area under ROC curve (AUC). URL: http://uryasev.ams.stonybrook.edu/index.php/research/testproblems/advanced-statistics/classification-by-maximizing-area-under-curve/.
19. Style classification with quantile regression. URL: http://uryasev.ams.stonybrook.edu//index.php/research/testproblems/financial_engineering/style-classification-with-quantile-regression/.

V.A. Pepelyaev, A.N. Golodnikov, N.A. Golodnikova

A NEW METHOD OF RELIABILITY OPTIMIZATION IN THE CLASSICAL PROBLEM STATEMENT

Abstract. The problem of reliability minimization is considered. An analysis of one of the available approaches to solving this problem, namely bPOE, is carried out. The advantages and disadvantages of this approach are determined. It is noted that the results of minimizing the probability of failures in the classical setting and minimizing bPOE may differ. A new method of reliability optimization in the classical formulation of the problem is proposed. A comparative analysis of the results of reliability minimization using bPOE and the results obtained by the proposed method is carried out.

Keywords: bPOE, VaR, failure probability minimization, reliability, tail distribution function, loss function, threshold.

Надійшла до редакції 26.06.2022