УДК 517.977

А.О. ЧИКРІЙ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *g.chikrii@gmail.com.*

Й.С. РАППОПОРТ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *jeffrappoport@gmail.com.*

МОДИФІКАЦІЇ УМОВИ ПОНТРЯГІНА У ПРОБЛЕМІ ЗБЛИЖЕННЯ КОНФЛІКТНО-КЕРОВАНИХ ОБ'ЄКТІВ

Анотація. Розглянуто проблему зближення керованих об'єктів у ігрових задачах динаміки. Сформульовано модифіковані достатні умови закінчення гри за кінцевий гарантований час у разі, коли умова Понтрягіна не виконується. Замість селектора Понтрягіна, якого не існує, розглядаються деякі функції зсуву, а з їхньою допомогою вводяться спеціальні багатозначні відображення. Вони породжують верхні і нижні розв'язувальні функції спеціального типу і на їхній основі запропоновано модифіковані схеми першого методу Понтрягіна та методу розв'язувальних функцій, що забезпечує завершення конфліктно-керованого процесу в класі квазістратегій і контркерувань. Новітні теоретичні результати проілюстровано на контрольному прикладі Понтрягіна з однотипними об'єктами.

Ключові слова: квазілінійна диференціальна гра, багатозначне відображення, вимірний селектор, стробоскопічна стратегія, розв'язувальна функція.

ВСТУП

Робота присвячена вивченню проблеми зближення керованих об'єктів та перехоплення цілей в ігрових задачах динаміки на основі першого методу Понтрягіна [1] і методу розв'язувальних функцій [2] та його сучасної версії [3]. Актуальність цієї проблеми пов'язана з необхідністю теоретичного обґрунтування відомих проєктувальникам ракетної та космічної техніки методів кривої погоні Л. Ейлера, методу переслідування за променем і, зокрема, паралельного зближення. Умова Понтрягіна [1] є ключовою умовою в першому методі Понтрягіна та методу розв'язувальних функцій і у разі її невиконості ці методи не працюють. У цій роботі описано випадок, коли умова Понтрягіна не виконується. Розглядаються спеціальні багатозначні відображення, які породжують верхні і нижні розв'язувальні функції, вперше введені в статті [4]. За допомогою цих функцій запропоновано модифіковані схеми першого методу Понтрягіна та методу розв'язувальних функцій, що забезпечує завершення конфліктно-керованого процесу в класі квазістратегій і контркерувань. Нові теоретичні результати проілюстровано на контрольному прикладі Понтрягіна з однотипними об'єктами.

Робота продовжує дослідження [1–5], дотична до публікацій [6–12] і поширює клас ігрових задач зближення керованих об'єктів та перехоплення цілей, які мають розв'зок.

МОДИФІКОВАНА СХЕМА ПЕРШОГО МЕТОДУ ПОНТРЯГІНА

Розглянемо конфліктно-керований процес, еволюція якого описується рівністю

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t,\tau)\varphi(u(\tau), \upsilon(\tau))\, d\tau, \;\; t \ge 0\,. \tag{1}$$

Тут $z(t) \in R^n$, функція $g(t)$, $g: R_+ \to R^n$, вимірна за Лебегом [9] і обмежена для $t > 0$, матрична функція $\Omega(t, \tau)$, $t \geq \tau \geq 0$, вимірна за t, а також є сумовною за τ для кожного $t \in R_+$. Блок керування задається функцією $\varphi(u, v)$, $\varphi: U \times V \to R^n$, яка вважається безперервною за сукупністю змінних на прямому добутку непорожніх компактів U і V; m, l, n – натуральні числа.

Керування гравців $u(\tau)$, $u: R_+ \to U$, і $v(\tau)$, $v: R_+ \to V$, є вимірними функціями часу.

Крім процесу (1) задано термінальну множину M^*, що має циліндричний вигляд

$$M^* = M_0 + M, \tag{2}$$

де M_0 – лінійний підпростір з R^n, а M – компакт з ортогонального додатка L до підпростору M_0 у R^n.

Цілі першого (u) і другого (v) гравців протилежні. Перший гравець (переслідувач) намагається вивести траєкторію процесу (1) на термінальну множину (2) за найкоротший час, а другий гравець (втікаюч) – максимально відтягнути момент потрапляння траєкторії на множину M^* або взагалі уникнути зустрічі.

Станемо на бік першого гравця і вважатимемо, що у разі, коли гра (1), (2) триває на інтервалі $[0, T]$, керування першого гравця в момент t вибиратимемо на основі інформації про $g(T)$ и $v_t(\cdot)$, тобто у вигляді вимірної функції

$$u(t) = u(g(T), v_t(\cdot)), \; t \in [0, T], \; u(t) \in U, \tag{3}$$

де $v_t(\cdot) = \{v(s): s \in [0, t]\}$ – передісторія керування другого гравця до моменту t, або у вигляді контркерування

$$u(t) = u(g(T), v(t)), \; t \in [0, T], \; u(t) \in U. \tag{4}$$

Якщо, зокрема, $g(t) = e^{At} z_0$, $\Omega(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$, $z(0) = z_0$, а e^{At} — матрична експонента, то вважають, що керування $u(t) = u(z_0, v_t(\cdot))$ реалізує квазістратегію [7], а контркерування [6] $u(t) = u(z_0, v(t))$ є проявом стробоскопічної стратегії Хайєка [8].

Сформулюємо необхідні факти з опуклого аналізу [1, 10] у вигляді леми.

Лема 1. Нехай $X \in R^n$ – опуклий компакт, $\omega(\tau)$ — невід'ємна обмежена вимірна числова функція. Тоді $\int_0^T \omega(\tau) X d\tau = \int_0^T \omega(\tau) d\tau X$, $T > 0$. При цьому якщо $0 \in X$, $f(\tau) \in \omega(\tau) X$ і $\int_0^T \omega(\tau)\, d\tau < 1$, то $\int_0^T f(\tau)\, d\tau \in X$, $f(\tau)$ — вимірна функція, $\tau \in [0, T]$.

Позначимо π оператор ортогонального проєктування з R^n у L. Покладемо $\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v): u \in U\}$ і розглянемо багатозначні відображення

$$W(t, \tau, v) = \pi \Omega(t, \tau) \varphi(U, v), \; W(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} W(t, \tau, v)$$

на множинах $\Delta_\Theta \times V$ и Δ_Θ відповідно, де $\Delta_\Theta = \{(t, \tau): 0 \leq \tau \leq t \leq \Theta < \infty\}$, Θ — деяке позитивне число. Припустимо, що багатозначне відображення $W(t, \tau, v)$ має замкнені значення на множині $\Delta_\Theta \times V$.

Умова Понтрягіна. Багатозначне відображення $W(t, \tau)$ приймає непусті значення на множині Δ_Θ, Θ – деяке позитивне число.

З урахуванням припущень про матричну функцію $\Omega(t,\tau)$ можна зробити висновок, що для будь-якого фіксованого $t>0$ вектор-функція $\pi\Omega(t,\tau)\varphi(u,\upsilon)$ буде $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-вімірною за $(\tau,\upsilon)\in[0,t]\times V$ і безперервною за $u\in U$. Тому на підставі теореми про прямий образ [9] за будь-якого фіксованого $t>0$ багатозначне відображення $W(t,\tau,\upsilon)$ є $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-вимірним за $(\tau,\upsilon)\in[0,t]\times V$. Якщо умова Понтрягіна виконана, то на множині Δ існує принаймні один селектор $\gamma_0(t,\tau)$ відображення $W(t,\tau)$, $\gamma_0(t,\tau)\in W(t,\tau)$. Такий селектор називають селектором Понтрягіна. Сформулюємо умову Понтрягіна в еквівалентному вигляді.

Умова 1. На множині Δ_Θ, де Θ – деяке позитивне число, існує селектор Понтрягіна $\gamma_0(t,\tau)$, для якого справедливе включення

$$0\in\bigcap_{\upsilon\in V}[W(t,\tau,\upsilon)-\gamma_0(t,\tau)].$$

Нехай $\gamma(t,\tau)$, $\gamma\colon\Delta_\Theta\to L$, деяка (майже всюди) обмежена вимірна за t і сумовна за τ, $\tau\in[0,t]$, для кожного $t>0$ функція, яку називатимемо функцією зсуву, $\Delta_\Theta=\{(t,\tau)\colon 0\le\tau\le t\le\Theta<\infty\}$, Θ – деяке позитивне число.

Позначимо $\xi(t)=\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))=\pi g(t)+\int_0^t\gamma(t,\tau)d\tau$ і розглянемо для $\tau\in[0,t]$, $t>0$, $\upsilon\in V$ багатозначне відображення

$$\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon)=\{\alpha\ge 0\colon 0\in[[W(t,\tau,\upsilon)-\gamma(t,\tau)]-\alpha[M-\xi(t)]]\}.$$

Якщо на множині Δ_Θ виконано умову $\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon)\ne\varnothing$, то розглянемо для $\tau\in[0,t]$, $t>0$, $\upsilon\in V$ верхню та нижню скалярні розв'язувальні функції [3]

$$\alpha^*(t,\tau,\upsilon)=\sup\{\alpha\colon\alpha\in\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon)\},\ \alpha_*(t,\tau,\upsilon)=\inf\{\alpha\colon\alpha\in\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon)\}.$$

Можна показати [12], що багатозначне відображення $\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon)$ замкнено-значне, $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-вимірне за сукупністю (τ,υ), $\tau\in[0,t]$, $\upsilon\in V$, а верхня та нижня розв'язувальні функції $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-вимірні за сукупністю (τ,υ), $\tau\in[0,t]$, $\upsilon\in V$, і тому вони суперпозиційовно вимірні [12], тобто $\alpha^*(t,\tau,\upsilon(\tau))$ і $\alpha_*(t,\tau,\upsilon(\tau))$ вимірні за τ, $\tau\in[0,t]$, для будь-якої вимірної функції $\upsilon(\cdot)\in V(\cdot)$, де $V(\cdot)$ — сукупність вимірних функцій $\upsilon(\tau)$, $\tau\in[0,+\infty]$, зі значеннями щодо V. Зазначимо також, що верхня розв'язувальна функція напівбезперервна зверху, а нижня – напівбезперервна знизу за змінної υ і функції $\inf_{\upsilon\in V}\alpha^*(t,\tau,\upsilon)$ та $\sup_{\upsilon\in V}\alpha_*(t,\tau,\upsilon)$ вимірні за τ, $\tau\in[0,t]$.

Лема 2. Для конфліктно-керованого процесу (1), (2) виконано умову 1 тоді і тільки тоді, коли існує функція зсуву $\gamma(t,\tau)$ така, що $0\in\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon)$ на множині $\Delta_\Theta\times V$.

Доведення. Нехай існує функція зсуву $\gamma(t,\tau)$ така, що $0\in\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon)$ на множині $\Delta_\Theta\times V$. Тоді маємо $0\in W(t,\tau,\upsilon)-\gamma(t,\tau)$, $(t,\tau)\in\Delta_\Theta$, $\upsilon\in V$, тобто справедлива умова 1.

Виходячі з міркувань про зворотний порядок, дійдемо потрібного висновку.

Зауваження 1. Якщо для певної функції зсуву $\gamma(t,\tau)$ на множині Δ_Θ виконана умова 1, то з урахуванням леми 2 $\alpha_*(t,\tau,\upsilon)=\inf\{\alpha\colon\alpha\in\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon)\}=0$ на множині $\Delta_\Theta\times V$.

Умова 1 є ключовою умовою в першому методі Понтрягіна, і якщо вона не виконана, то метод не працює. Сформулюємо модифіковану умову Понтрягіна.

Умова 2. Для деякого позитивного числа Θ на множині Δ_Θ справедливі співвідношення

$$0 \in \bigcap_{\upsilon \in V} \{[W(t,\tau,\upsilon) - \gamma(t,\tau)] - \mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon)[M - \xi(t)]\}, \quad \int_0^t \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(t,\tau,\upsilon)\, d\tau < 1.$$

Якщо для певної функції зсуву $\gamma(t,\tau)$ на множині Δ_Θ виконано умову 1, то з урахуванням леми 2 і зауваження 1 виконана умова 2.

Розглянемо множину

$$\mathrm{P}_*(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \{\Theta \geq t \geq 0 \colon \xi(t) \in M\}. \qquad (5)$$

Якщо включення (5) не виконуються ні для яких $\Theta \geq t \geq 0$, то покладемо $\mathrm{P}_*(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \varnothing$.

Наведену теорему можна розглядати як модифіковану схему першого методу Понтрягіна.

Теорема 1. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2) і деякого позитивного числа Θ на множині Δ_Θ виконана умова 2, множина M опукла, для деякої функції зсуву $\gamma(t,\tau)$ множина $\mathrm{P}_*(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$ не є порожньою та $\mathrm{P}_* \in \mathrm{P}_*(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$. Тоді гра може бути закінчена в момент P_* з використанням керування вигляду (4).

Доведення. Нехай $\upsilon(\tau)$ – довільний вимірний селектор компакта V, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*]$. Зазначимо спосіб вибору керування переслідувачем.

Розглянемо для $\upsilon \in V$, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*]$ компактнозначне багатозначне відображення

$$U_*(\tau,\upsilon) = \{u \in U \colon \pi\Omega(\mathrm{P}_*,\tau)\varphi(u,\upsilon) - \gamma(\mathrm{P}_*,\tau) \in \alpha_*(\mathrm{P}_*,\tau,\upsilon)[M - \xi(\mathrm{P}_*)]\}.$$

З урахуванням властивостей параметрів процесу (1) і нижньої розв'язувальної функції $\alpha_*(\mathrm{P}_*,\tau,\upsilon)$ компактнозначне відображення $U_*(\tau,\upsilon)$ є $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірним [12] для $\upsilon \in V$, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*]$. Тому за теоремою про вимірний вибір селектора [9] багатозначне відображення $U(\tau,\upsilon)$ містить $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірний селектор $u_*(\tau,\upsilon)$, який є суперпозиційно вимірною функцією [12].

Покладемо керування першого гравця $u_*(\tau) = u_*(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*]$. З урахуванням формули (1) отримаємо

$$\pi z(\mathrm{P}_*) = \xi(\mathrm{P}_*) + \int_0^{\mathrm{P}_*} (\pi\Omega(\mathrm{P}_*,\tau)\varphi(u_*(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(\mathrm{P}_*,\tau))d\tau. \qquad (6)$$

Згідно з вибором керування і за визначенням моменту P_* маємо

$$0 \in M - \xi(\mathrm{P}_*), \quad \int_0^{\mathrm{P}_*} \alpha_*(\mathrm{P}_*,\tau,\upsilon(\tau))\, d\tau \leq \int_0^{\mathrm{P}_*} \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(\mathrm{P}_*,\tau,\upsilon)\, d\tau < 1,$$

$$\pi\Omega(\mathrm{P}_*,\tau)\varphi(u_*(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(\mathrm{P}_*,\tau) \in \alpha_*(\mathrm{P}_*,\tau,\upsilon(\tau))[M - \xi(\mathrm{P}_*)].$$

Тоді з урахуванням леми 1 справедливе включення

$$\int_0^{\mathrm{P}_*} [\pi\Omega(\mathrm{P}_*,\tau)\varphi(u_*(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(\mathrm{P}_*,\tau)]d\tau \in M - \xi(\mathrm{P}_*).$$

Таким чином, співвідношення (6) визначає

$$\pi z(\mathrm{P}_*) \in \xi(\mathrm{P}_*) + M - \xi(\mathrm{P}_*) = M.$$

Отже, $z(\mathrm{P}_*^1) \in M^*$, що завершує доведення теореми.

Умова 2 є ключовою умовою в схемі методу роз'язувальних функцій, і якщо вона не виконана, то метод не працює. Сформулюємо модифіковану схему методу розв'язувальних функцій.

Умова 3. Для деякого позитивного числа Θ на множині Δ_Θ виконана умова 2 та справедливе включення

$$0 \in \bigcap_{\upsilon \in V} \{[W(t, \tau, \upsilon) - \gamma(t, \tau)] - \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(t, \tau, \upsilon)[M - \xi(t)]\}.$$

Зауваження 2. Якщо для певної функції зсуву $\gamma(t, \tau)$ на множині Δ_Θ виконана умова 1, то за аналогією з лемою 2 виконана умова 3 і $\sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(t, \tau, \upsilon) = 0$.

Розглянемо множину

$$T(g(t), \gamma(\cdot, \cdot)) = \left\{ \Theta \geq t \geq 0 \colon \int_0^t \inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(t, \tau, \upsilon)\, d\tau \geq 1 \right\}. \tag{7}$$

Якщо для деякого $\Theta \geq t > 0$ маємо $\alpha^*(t, \tau, \upsilon) \equiv +\infty$ за $\tau \in [0, t]$, $\upsilon \in V$, то значення відповідного інтеграла в фігурних дужках співвідношення (7) природно вважати $+\infty$ і $t \in T(g(t), \gamma(\cdot, \cdot))$. У разі, коли нерівність співвідношення (7) не справджується для всіх $\Theta \geq t > 0$, покладемо $T(g(t), \gamma(\cdot, \cdot)) = \varnothing$.

Теорема 2. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2) і деякого позитивного числа Θ на множині Δ_Θ виконана умова 3, множина M опукла, для деякої функції зсуву $\gamma(t, \tau)$ множина $T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не є порожньою і $T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$. Тоді гра може бути закінчена в момент T з використанням керування вигляду (3).

Доведення. Нехай $\upsilon(\tau)$ – довільний вимірний селектор компакта V, $\tau \in [0, T]$. Зазначимо спосіб вибору керування переслідувачем.

Розглянемо спочатку випадок $\xi(T, g(T), \gamma(\cdot, \cdot)) \notin M$ і запровадимо контрольну функцію

$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau)) d\tau - \int_t^T \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T, \tau, \upsilon) d\tau, \; t \in [0, T].$$

За визначенням T матимемо

$$h(0) = 1 - \int_0^T \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T, \tau, \upsilon)\, d\tau > 0,$$

$$h(T) = 1 - \int_0^T \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau)) d\tau \leq 1 - \int_0^T \inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(T, \tau, \upsilon)\, d\tau \leq 0.$$

Внаслідок безперервності функції $h(t)$ існує такий момент часу t_*, $t_* \in (0, T]$, що $h(t_*) = 0$. Зауважимо, що момент перемикання t_* залежить від передісторії керування другого гравця $\upsilon_{t_*}(\cdot) = \{\upsilon(s) \colon s \in [0, t_*]\}$.

Проміжки часу $[0, t_*)$, $[t_*, T]$ називатимемо активним і пасивним відповідно. Запишемо спосіб керування першого гравця на кожному проміжку. Для цього розглянемо компактнозначні відображення

$$U_1^*(\tau, \upsilon) = \\ = \{u \in U \colon \pi \Omega(T, \tau) \varphi(u, \upsilon) - \gamma(T, \tau) \in \alpha^*(T, \tau, \upsilon)[M - \xi(T)]\}, \; \tau \in [0, t_*), \tag{8}$$

$$U_*^1(\tau, \upsilon) =$$
$$= \left\{ u \in U : \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, \upsilon) - \gamma(T, \tau) \in \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T, \tau, \upsilon)[M - \xi(T)] \right\}, \ \tau \in [t_*, T]. \quad (9)$$

Багатозначні відображення $U_1^*(\tau, \upsilon)$ і $U_*^1(\tau, \upsilon)$ мають непорожні образи.

З урахуванням властивостей параметрів процесу (1), функцій $\alpha^*(T, \tau, \upsilon)$ і $\sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T, \tau, \upsilon)$ компактнозначні відображення $U_1^*(\tau, \upsilon)$, $\tau \in [0, t_*)$, і $U_*^1(\tau, \upsilon)$, $\tau \in [t_*, T]$, для $\upsilon \in V$ є $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірними [12]. Тому за теоремою про вимірний вибір селектора [9] в кожному з них існує хоча б по одному $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірному селектору $u_1^*(\tau, \upsilon)$ і $u_*^1(\tau, \upsilon)$, які є суперпозиційно вимірними функціями [12]. Покладемо керування першого гравця на активному проміжку $u_1^*(\tau) = u_1^*(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [0, t_*)$, а на пасивному проміжку покладемо $u_*^1(\tau) = u_*^1(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [t_*, T]$.

На основі формули (1) для вибраних керувань отримаємо

$$\pi z(T) = \xi(T) + \int_0^{t_*} [\pi\Omega(T, \tau)\varphi(u_1^*(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(T, \tau)] d\tau +$$
$$+ \int_{t_*}^T [\pi\Omega(T, \tau)\varphi(u_*^1(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(T, \tau)] d\tau. \quad (10)$$

Співвідношення (8)–(10) визначають

$$\pi z(T) \in \xi(T) + \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau))[M - \xi(T)] d\tau + \int_{t_*}^T \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T, \tau, \upsilon)[M - \xi(T)] d\tau =$$

$$= \xi(T) + \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau)) d\tau [M - \xi(T)] + \int_{t_*}^T \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T, \tau, \upsilon) d\tau [M - \xi(T)] =$$

$$= \xi(T)[1 - \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau)) d\tau - \int_{t_*}^T \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T, \tau, \upsilon) d\tau] +$$

$$+ \left[\int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau)) d\tau + \int_{t_*}^T \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T, \tau, \upsilon) d\tau \right] M = M.$$

Тут враховано лему 1 і рівність $h(t_*) = 0$.

Для випадку $\xi(T, g(T), \gamma(\cdot, \cdot)) \in M$ достатньо застосувати теорему 1, що завершує доведення теореми 2.

З доведення теореми 2 випливає, що переслідувач в момент t використовує інформацію про $\upsilon_t(\cdot)$, до того ж вона необхідна тільки для визначення моменту перемикання t_*, який поділяє активний і пасивний інтервали. На самих інтервалах переслідувач застосовує контркерування, яке визначається стробоскопічною стратегією. У наведеній далі теоремі показано, що для реалізації гарантованого часу теореми 2 можна обмежитися контркеруванням.

Умова 4. Для деякого позитивного числа Θ на множині Δ_Θ виконана умова 3 та справедливе включення

$$0 \in \bigcap_{\upsilon \in V} \{[W(t, \tau, \upsilon) - \gamma(t, \tau)] - \inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(t, \tau, \upsilon)[M - \xi(t)]\}.$$

Теорема 3. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2) і деякого позитивного числа Θ на множині Δ_Θ виконана умова 4, множина M опукла, для деякої функції зсуву $\gamma(t,\tau)$ множина $T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ не є порожньою і $T\in T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$. Тоді гра може бути закінчена в момент T з використанням керування вигляду (4).

Доведення. Нехай $\upsilon(\tau)$ — довільний вимірний селектор компакта V, $\tau\in[0,T]$. Зазначимо спосіб вибору керування переслідувачем.

Розглянемо спочатку випадок $\xi(T,g(T),\gamma(\cdot,\cdot))\notin M$ і запровадимо контрольну функцію

$$h(t)=1-\int_0^t \inf_{\upsilon\in V}\alpha^*(T,\tau,\upsilon)d\tau-\int_t^T \sup_{\upsilon\in V}\alpha_*(T,\tau,\upsilon)d\tau,\ \ t\in[0,T].$$

За визначенням T маємо

$$h(0)=1-\int_0^T \sup_{\upsilon\in V}\alpha_*(T,\tau,\upsilon)\,d\tau>0,\ \ h(T)=1-\int_0^T \inf_{\upsilon\in V}\alpha^*(T,\tau,\upsilon)\,d\tau\le 0.$$

Внаслідок безперервності функції $h(t)$ існує такий момент часу t_*, $t_*\in(0,T]$, що $h(t)=0$. Зазначимо, що момент перемикання t_* не залежить від передісторії керування другого гравця $\upsilon_{t_*}(\cdot)=\{\upsilon(s): s\in[0,t_*]\}$.

Проміжки часу $[0,t_*)$, $[t_*,T]$ називатимемо активним і пасивним відповідно. Запишемо спосіб керування першого гравця на кожному проміжку. Для цього розглянемо компактнозначні відображення

$$U_2^*(\tau,\upsilon)=$$
$$=\left\{u\in U:\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u,\upsilon)-\gamma(T,\tau)\in\inf_{\upsilon\in V}\alpha^*(T,\tau,\upsilon)[M-\xi(T)]\right\},\ \ \tau\in[0,t_*),\quad (11)$$

$$U_*^2(\tau,\upsilon)=$$
$$=\left\{u\in U:\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u,\upsilon)-\gamma(T,\tau)\in\sup_{\upsilon\in V}\alpha_*\big(T,\tau,\upsilon\big)[M-\xi(T)]\right\},\ \ \tau\in[t_*,T].\quad (12)$$

Багатозначні відображення $U_2^*(\tau,\upsilon)$ і $U_*^2(\tau,\upsilon)$ мають непорожні образи.

З урахуванням властивостей параметрів процесу (1), функцій $\inf_{\upsilon\in V}\alpha^*(T,\tau,\upsilon)$ і $\sup_{\upsilon\in V}\alpha_*(T,\tau,\upsilon)$ компактнозначні відображення $U_2^*(\tau,\upsilon)$, $\tau\in[0,t_*)$, і $U_*^2(\tau,\upsilon)$, $\tau\in[t_*,T]$, для $\upsilon\in V$ є $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-вимірними [12]. Тому за теоремою про вимірний вибір селектора [9] в кожному з них існує хоча б по одному $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-вимірному селектору $u_2^*(\tau,\upsilon)$ і $u_*^2(\tau,\upsilon)$, які є суперпозиційно вимірними функціями [12]. Покладемо керування першого гравця на активному проміжку $u_2^*(\tau)=u_2^*(\tau,\upsilon(\tau))$, $\tau\in[0,t_*)$, а на пасивному проміжку покладемо $u_*^2(\tau)=u_*^2(\tau,\upsilon(\tau))$, $\tau\in[t_*,T]$.

Згідно з формулою (1) для визначених керувань отримаємо

$$\pi z(T)=\xi(T)+\int_0^{t_*}(\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u_2^*(\tau),\upsilon(\tau))-\gamma(T,\tau))d\tau+$$
$$+\int_{t_*}^T(\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u_*^2(\tau),\upsilon(\tau))-\gamma(T,\tau))d\tau.\quad (13)$$

Співвідношення (11)–(13) визначають

$$\pi z(T)\in\xi(T)+\int_0^{t_*}\inf_{\upsilon\in V}\alpha^*(T,\tau,\upsilon)[M-\xi(T)]d\tau+\int_{t_*}^{T}\sup_{\upsilon\in V}\alpha_*(T,\tau,\upsilon)[M-\xi(T)]d\tau=$$

$$=\xi(T)+\int_0^{t_*}\inf_{\upsilon\in V}\alpha^*(T,\tau,\upsilon)d\tau[M-\xi(T)]+\int_{t_*}^{T}\sup_{\upsilon\in V}\alpha_*(T,\tau,\upsilon)d\tau[M-\xi(T)]=$$

$$=\xi(T)\left[1-\int_0^{t_*}\inf_{\upsilon\in V}\alpha^*(T,\tau,\upsilon)d\tau-\int_{t_*}^{T}\sup_{\upsilon\in V}\alpha_*(T,\tau,\upsilon)d\tau\right]+$$

$$+\left[\int_0^{t_*}\inf_{\upsilon\in V}\alpha^*(T,\tau,\upsilon)d\tau+\int_{t_*}^{T}\sup_{\upsilon\in V}\alpha_*(T,\tau,\upsilon)d\tau\right]M=M.$$

Тут враховано лему 1 і рівність $h(t_*)=0$.

У разі $\xi(T,g(T),\gamma(\cdot,\cdot))\in M$ достатньо застосувати теорему 1, що завершує доведення теореми.

КОНТРОЛЬНИЙ ПРИКЛАД ПОНТРЯГІНА З ОДНОТИПНИМИ ОБ'ЄКТАМИ

Нехай у просторі R^{2n}, $n\geq 2$, об'єкти записано рівняннями

$$\dot z_1=z_2,$$
$$\dot z_2=-az_2+u-\upsilon. \tag{14}$$

Тут

$$a>0,\ z=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}\in R^{2n},\ U=\left\{\begin{pmatrix}0\\u\end{pmatrix}:\ u\in S_r^\rho\right\}\subset R^{2n},\ V=\left\{\begin{pmatrix}0\\\upsilon\end{pmatrix}:\ \upsilon\in S_0^1\right\}\subset R^{2n},$$

$S_r^\rho\subset R^n$ — кільце з центром в нулі, зовнішнім радіусом ρ і внутрішнім радіусом r, $\rho>1\geq r\geq 0$.

Термінальна множина $M^*=\{z\colon\ z_1=0\}$, причому $M_0=\{z\colon z_1=0\}$, $M=\{z\colon\ z_1=z_2=0\}$. Тоді $L=\{z\colon\ z_2=0\}=\{R^n,0\}$. Оператор ортогонального проєктування $\pi\colon R^{2n}\to L$ задається матрицею $\pi\colon\begin{pmatrix}E\,0\\0\,0\end{pmatrix}$, де 0 — нульова матриця порядку n. Оператор π виокремлює із вектора z його першу компоненту, $\pi z=z_1$. Матриця A і фундаментальна матриця однорідної системи (14) e^{At} мають вигляд

$$A=\begin{pmatrix}0&E\\0&-aE\end{pmatrix},\ e^{At}=\begin{pmatrix}E&\varphi(t)E\\0&e^{-at}E\end{pmatrix},$$

де $\varphi(t)=\dfrac{1-e^{-at}}{a}$. Оскільки $u\in S_r^\rho$ і $\upsilon\in S_0^1$, то матимемо $\pi e^{At}U=\varphi(t)S_r^\rho$, $\pi e^{At}V=\varphi(t)S_0^1$ і $W(t)=\pi e^{At}U\stackrel{*}{-}\pi e^{At}V=\varphi(t)[S_r^\rho\stackrel{*}{-}S_0^1]$, де $\stackrel{*}{-}$ — геометрична різниця Мінковського [1]. Якщо $r>0$, то $0\notin W(t)$ і $\gamma(t,\tau)\equiv 0$ не є селектором Понтрягіна.

Визначимо функцію зсуву $\gamma(t,\tau)\equiv 0$ і покладемо $\xi(t)=z_1+\varphi(t)z_2$. Тоді багатозначне відображення $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ має вигляд

$$\mathfrak{A}(t,\tau,v)=\{\alpha\geq 0: -\alpha\xi(t)\in\varphi(t-\tau)[S_r^{\rho}-v]\},\ v\in S_0^1.$$

Вочевидь, $\mathfrak{A}(t,\tau,v)\neq\varnothing$, тому справедливе включення

$$0\in\bigcap_{v\in S_0^1}\{\varphi(t-\tau)[S_r^{\rho}-v]-\mathfrak{A}(t,\tau,v)[-\xi(t)]\}. \tag{15}$$

Верхня розв'язувальна функція визначається із співвідношення

$$\alpha^*(t,\tau,v)=\sup\{\alpha\geq 0:\ -\alpha\xi(t)\in\varphi(t-\tau)[S_r^{\rho}-v]\},\ v\in S_0^1.$$

Нехай $\xi(t)\neq 0$. Тоді маємо

$$\alpha^*(t,\tau,v)=\sup\{\alpha>0: [\varphi(t-\tau)v-\alpha\xi(t)]\in\varphi(t-\tau)S_r^{\rho}\}=$$

$$=\sup\{\alpha>0: \|\varphi(t-\tau)v-\alpha\xi(t)\|=\varphi(t-\tau)\rho\},\ v\in S_0^1.$$

При цьому значення функції $\alpha^*(t,\tau,v)$ є більшим позитивним коренем квадратного рівняння

$$\|\xi(t)\|^2\alpha^2-2\varphi(t-\tau)(v,\xi(t))\alpha-\varphi^2(t-\tau)(\rho^2-\|v\|^2)=0.$$

Отже, справедлива формула

$$\alpha^*(t,\tau,v)=\varphi(t-\tau)\frac{(v,\xi(t))+\sqrt{[(v,\xi(t))]^2+\|\xi(t)\|^2\varphi^2(t-\tau)(\rho^2-\|v\|^2)}}{\|\xi(t)\|^2},$$

$$v\in S_0^1.$$

При цьому

$$\min_{v\in S_0^1}\alpha^*(t,\tau,v)=\varphi(t-\tau)\frac{\rho-1}{\|\xi(t)\|}\ \text{і досягається на векторі}\ v=-\frac{\xi(t)}{\|\xi(t)\|}.$$

Визначимо час завершення гри:

$$T=\min\left\{t\geq 0: \int_0^t\min_{v\in S_0^1}\alpha^*(t,\tau,v)\,d\tau=1\right\}.$$

Отже, час T – це найменший позитивний корінь рівняння

$$\|\xi(t)\|=\int_0^t\varphi(t-\tau)\,d\tau[\rho-1]. \tag{16}$$

Якщо $\xi(t)=0$, то $t\geq T$. Дійсно, $\xi(0)=z_1$, $\|z_1\|>0$, а оскільки ліва і права частини рівняння (16) залежать від t безперервно, рівності $\xi(t)=0$ передуватиме рівність (16). Далі припускаємо, що $\xi(t)\neq 0$.

Рівняння (16) за будь-якого z має кінцевий позитивний корінь, оскільки для $t=0$ ліва частина рівняння більша за праву, а для $t\to+\infty$ ліва частина обмежена, а права частина лінійно зростає.

Для $v\in S_0^1$ нижня розв'язувальна функція визначається із співвідношення

$$\alpha_*(t,\tau,v)=\inf\{\alpha\geq 0: -\alpha\xi(t)\in\varphi(t-\tau)[S_r^{\rho}-v]\}.$$

Однак для $v \in S_0^r$ маємо

$$\alpha_*(t,\tau,v) = \alpha_*^r(t,\tau,v) = \sup\{\alpha > 0 \colon [\varphi(t-\tau)v - \alpha\xi(t)] \in \varphi(t-\tau)S_0^r\} =$$

$$= \sup\{\alpha > 0 \colon \|\varphi(t-\tau)v - \alpha\xi(t)\| = \varphi(t-\tau)r\}.$$

Отже, отримаємо для $v \in S_0^r$

$$\alpha_*^r(t,\tau,v) = \varphi(t-\tau)\frac{(v,\xi(t)) + \sqrt{[(v,\xi(t))]^2 + \|\xi(t)\|^2\,\varphi^2(t-\tau)(r^2 - \|v\|^2)}}{\|\xi(t)\|^2}.$$

Оскільки справедливо співвідношення $S_r^\rho \overset{*}{-} S_r^1 = \bigcap_{v \in S_r^1}[S_r^\rho - v] = S_0^{\rho-1}$, то для $v \in S_r^1$ маємо $\alpha_*(t,\tau,v) = \max_{v \in S_r^1}\alpha_*(t,\tau,v) = 0$.

Отже, для $v \in S_0^1$ виконується рівність $\alpha_*(t,\tau,v) = \alpha_*^r(t,\tau,v)$ і разом з тим отримаємо $\max_{v \in S_0^1}\alpha_*(t,\tau,v) = \max_{v \in S_0^r}\alpha_*^r(t,\tau,v) = \varphi(t-\tau)\dfrac{2r}{\|\xi(t)\|}$ і максимум досягається на векторі $v = \dfrac{\xi(t)}{\|\xi(t)\|}$.

Якщо параметри гри задовольняють нерівності

$$\rho > 1 + 2r, \tag{17}$$

то отримаємо

$$\max_{v \in S_0^1}\alpha_*(t,\tau,v) < \min_{v \in S_0^1}\alpha^*(t,\tau,v), \tag{18}$$

і тому справедлива нерівність

$$\int_0^T \max_{v \in S_0^1}\alpha_*(t,\tau,v)\,d\tau < \int_0^T \min_{v \in S_0^1}\alpha^*(t,\tau,v)\,d\tau = 1.$$

Отже, з урахуванням включення (15) виконана умова 2.

За побудовою для всіх $v \in S_0^1$ справедливе включення $\varphi(t-\tau)v + \alpha_*(t,\tau,v)\xi(t) \in \varphi(t-\tau)S_r^1$. Тому з урахуванням нерівності (18) маємо $\varphi(t-\tau)v + \max_{v \in S_0^1}\alpha_*(t,\tau,v)\xi(t) \in \varphi(t-\tau)S_r^\rho$. Таким чином, виконується включення

$$0 \in \bigcap_{v \in S_0^1}[\varphi(t-\tau)[S_r^\rho - v] - \max_{v \in S_0^1}\alpha_*(t,\tau,v)\xi(t)]$$

і справедлива умова 3.

Перевіримо справедливість умови 4. За побудовою для всіх $v \in S_0^1$ справедливе включення $\varphi(t-\tau)v + \alpha^*(t,\tau,v)\xi(t) \in \varphi(t-\tau)\bar{S}_r^\rho$, де $\bar{S}_r^\rho$ — верхня границя кільця S_r^ρ. Тому з урахуванням нерівності (18) маємо $\varphi(t-\tau)v + \min_{v \in S_0^1}\alpha^*(t,\tau,v)\xi(t) \in \varphi(t-\tau)S_r^\rho$. Таким чином, виконується включення

$$0 \in \bigcap_{v \in S_0^1}[\varphi(t-\tau)[S_r^\rho - v] - \max_{v \in S_0^1}\alpha^*(t,\tau,v)\xi(t)]$$

і справедлива умова 4.

Отже, коли $r>0$, то функція зсуву $\gamma(t,\tau)\equiv 0$ не є селектором Понтрягіна. Але якщо параметри гри задовольняють нерівності (17), то для контрольного прикладу виконуються умови 2–4.

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто проблему зближення керованих об'єктів у ігрових задачах динаміки. Сформульовано достатні умови закінчення гри за кінцевий гарантований час, коли умова Понтрягіна не виконується. Введено верхні і нижні розв'язувальні функції спеціального типу і на їхній основі запропоновано модифіковані схеми першого методу Понтрягіна та методу розв'язувальних функцій, що забезпечує завершення конфліктно-керованого процесу в класі квазістратегій і контркерувань. Нові теоретичні результати проілюстровано на контрольному прикладі Понтрягіна з однотипними об'єктами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Т. 2. Москва: Наука, 1988. 576 с.
2. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Springer Science and Business Media, 2013. 424 p.
3. Chikrii A.A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proc. Steklov Institute of Mathematics.* 2010. Vol. 271. P. 69–85.
4. Chikrii A.A., Chikrii V.K. Image structure of multivalued mappings in game problems of motion control. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2016. Vol. 48, N 3. P. 20–35.
5. Чикрий А.А. Верхняя и нижняя разрешающие функции в игровых задачах динамики. *Тр. ИММ УрО РАН.* 2017. Т. 23, № 1. С. 293–305. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-1-293-305.
6. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. Москва: Наука. 1974. 455 с.
7. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. Москва: Наука, 1981. 288 с.
8. Hajek O. Pursuit Games. New York: Acad. Press, 1975. Vol. 12. 266 p.
9. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.
10. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. Москва: Мир, 1973. 470 с.
11. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. Москва: Наука, 1974. 480 с.
12. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов. *Кибернетика и системный анализ.* 2012. Т. 48, № 5. С. 40–64.

A.A Chikrii, I.S. Rappoport

MODIFICATIONS OF THE PONTRYAGIN CONDITIONS IN THE PROBLEM OF APPROACH OF CONFLICT-CONTROLLED OBJECTS

Abstract. The problem of approach of controlled objects in dynamic game problems is considered. Modified sufficient conditions for the game termination in a finite guaranteed time are formulated in the case where the Pontryagin condition is not satisfied. Instead of the Pontryagin selector, which does not exist, some shift functions are considered and used to introduce special multivalued mappings. They generate the upper and lower resolving functions of special type, and based on them, modified schemes of the first Pontryagin's method and of the method of resolving functions are proposed, which ensures the completion of the conflict-controlled process in the class of quasi-strategies and counter-controls. The new theoretical results are illustrated by the control Pontryagin's example of with objects of the same type.

Keywords: quasilinear differential game, multi-valued mapping, measurable selector, stroboscopic strategy, resolving function.

Надійшла до редакції 18.07.2022