УДК 519.21

Г.М. ПЕРУН
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
e-mail: *perungm@ukr.net.*

В.К. ЯСИНСЬКИЙ
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
e-mail: *vkyasynskyy@ukr.net.*

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ СТОХАСТИЧНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ

Анотація. Розглянуто задачу Коші для стохастичного нелінійного рівняння параболічного типу із запізненням. За допомогою функції Гріна отримано формулу для знаходження розв'язку задачі методом кроків. Існування розв'язку встановлюється з імовірністю 1 і оцінюється за спеціально введеною нормою.

Ключові слова: задача Коші, стохастичне параболічне рівняння, метод кроків, перетворення Фур'є, функція Гріна.

Постановка задачі. У вступі до монографії [1] наголошується на тому, що диференціальні рівняння з відхиленням аргументу можна застосувати в теоріях автоматичного керування та автоколивних систем, під час вивчення процесів, пов'язаних з горінням у ракетних двигунах, біофізичних проблем, проблем довготермінового прогнозування в економіці та інших галузях науки і техніки.

Наявність відхилення-запізнення в системі, яка вивчається, є зазвичай причиною явищ, які суттєво впливають на процес. Зокрема, в системах з автоматичним регулюванням запізнення є проміжок часу, потрібний системі для реагування на вхідний імпульс. Наявність запізнення може вплинути на виникнення самовільних коливань, збільшення її нерегульованості.

У книзі [1] вивчаються як звичайні детерміновані, так і стохастичні диференціальні рівняння з відхиленням аргументу. Відомо також, що класичними результатами у галузі диференціальних рівнянь є праці математиків А.Д. Мишкіса, М.В. Азбелева, Ю.О. Митропольського, А.М. Самойленка, М.М. Перестюка, В.П. Рубаника, В.І. Фодчука, Д.І. Мартинюка, Дж. Хейла, Е.М. Райта, Р. Беллмана та багатьох інших.

Так, у статті [2] встановлюється методом кроків коректна розв'язність задачі Коші для квазілінійного B-параболічного рівняння із запізненням [1].

У монографії [3, с. 102–110] доводиться теорема про розв'язність задачі Коші для лінійного параболічного стохастичного рівняння з неперервними збуреннями, розв'язання якого в фіксовані моменти часу зазнає імпульсного впливу [4].

Формулювання основного результату. Нехай на ймовірносному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \ge 0\}, P)$ з неспадним потоком σ-алгебр $\{F_t, t \ge 0\}$, $F_{t_1} \subset F_{t_2}$ для $t_1 \le t_2$ випадкова функція $U(t, x, \omega)$, $(t, x) \in \Pi$, $\Pi = R^1 \times R^n$, $\omega \in \Omega$, вимірна стосовно σ-алгебри F_t і з імовірністю 1 є розв'язком рівняння з відхиленням аргументу

$$d_t U(t,x,\omega) = \left[\sum_{|k| \le 2b} A_k(t) D_x^k U(t,x,\omega) + f_1(x, U(t-h,x)) \right] dt + \\ + \left[\sum_{|k| \le b} B_k(t) D_x^k U(t,x,\omega) + f_2(x, U(t-h,x)) \right] dw(t,\omega), \qquad (1)$$

де h — запізнення, $h > 0$, $w(t, \omega)$ — стандартний скалярний Вінеровий процес.

Задача Коші полягає у знаходженні з імовірністю 1 неперервного розв'язку рівняння (1) за детермінованою початковою умовою

$$U(t, x, \omega) = \varphi(t, x), \ 0 \le t \le h, \ x \in R^n. \tag{2}$$

Тут f_1, f_2, φ — відомі функції власних аргументів. Задачу розв'язуватимемо методом кроків [1, с. 17].

Коректність задачі встановлює така теорема.

Теорема 1. Нехай коефіцієнти рівняння (1) визначені та неперервні на інтервалі $[0, T]$, для яких задовольняється посилена умова параболічності

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|=2b} A_k(t)(i\sigma)^k + \operatorname{Im}\left(\sum_{|k|=b} B_k(t)(i\sigma)^k\right)^2 \le -\delta_0 |\sigma|^{2b}, \tag{3}$$

$$\delta_0 > 0, \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \sigma \in R^n.$$

Функції $\varphi(t, x)$, $f_1(x, \varphi(t, x))$, $\sum_{|k|=b} B_k(t) D_x^k f_2(x, \varphi(t, x))$ є неперервними за аргументом t, диференційовні за просторовими аргументами і мають перетворення Фур'є $\widetilde{f}_1$ та $\widetilde{f}_2$. Тоді з імовірністю 1 існує функція Гріна $G(t, \tau, x, \omega)$ задачі (1), (2), за допомогою якої розв'язок на інтервалі $t \in (lh, (l+1)h)$, $l \in N$, визначається формулою

$$U(t, x, \omega) = \int_{R^n} G(t, lh, x-\xi, \omega)\varphi(lh, \xi) d\xi +$$

$$+\int_{lh}^{t} \int_{R^n} G(t, s, x-\xi, \omega)\left[f_1(\xi, \varphi(s-h, \xi)) - \sum_{|k| \le b} B_k(s) D_\xi^k f_2(\xi, \varphi(s-h, \xi))\right] d\xi ds +$$

$$+\int_{lh}^{t} \int_{R^n} G(t, s, x-\xi, \omega) f_2(\xi, \varphi(s-h, \xi)) d\xi dw(s, \omega), \tag{4}$$

$$\varphi(lh, x) = \lim_{t \to lh+0} U(t, x).$$

Для нього справджується нерівність

$$|E\{D_x^k U(t, x, \omega)\}| \le C\left(t^{-\frac{|k|}{2b}} |\varphi|_{C(\Pi)} + |f_1|_{C^1(\Pi)} + \sum_{|k| \le b} |B_k D^k f_2|_{C^{(1)}(\Pi)}\right), \tag{5}$$

де $|k| \le 2b$, $|f|_{C^m(\Pi)} = \sup_{\Pi} |D_x^m f(t, x)|$. Тут E — операція математичного сподівання.

Знаходитимемо розв'язок задачі (1), (2) методом інтегрального перетворення Фур'є від деякої функції $\upsilon(t, \sigma, \omega)$

$$U(t, x, \omega) = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} e^{i\sigma x} \upsilon(t, \sigma, \omega) d\sigma = F_{x \to \sigma}^{-1} \upsilon(t, \sigma, \omega), \ \sigma \in R^n. \tag{6}$$

Нехай $h \le t \le 2h$, тоді на цьому інтервалі маємо $U(t-h, x) = \varphi(t-h, x)$. Тому після дії перетворення Фур'є отримаємо задачу Коші без запізнення [1, с. 18]:

$$d_t \upsilon(t, \sigma, \omega) = \left[\sum_{|k| \le 2b} A_k(t)(i\sigma)^k \upsilon(t, \sigma, \omega) + \widetilde{f}_1(\sigma, \widetilde{\varphi}(t-h, \sigma))\right] dt +$$

$$+\left[\sum_{|k| \le b} B_k(t)(i\sigma)^k \upsilon(t, \sigma, \omega) + \widetilde{f}_2(\sigma, \widetilde{\varphi}(t-h, \sigma))\right] dw(t, \omega), \tag{7}$$

$$\upsilon(h, \sigma, \omega) = \widetilde{\varphi}(h, \sigma). \tag{8}$$

Рівняння (7) є звичайним стохастичним неоднорідним рівнянням. Його незбурена Вінеровим процесом частина — група старших членів рівняння є аналогом рівняння (4) [5, с. 45] за змінними t та σ. Воно одержане внаслідок перетворення Фур'є параболічного рівняння вищого порядку із залежними від t коефіцієнтами [5, с. 44]. Скористаємось відомим результатом, який дасть змогу проводити подальші оцінки.

Лема 1. Для нормальної фундаментальної матриці $Q(t, \tau, \sigma)$ [5, с. 45] системи

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{|k| \le 2b} A_k(t) \sigma^k v,$$

тобто матриці, кожен стовпець якої є розв'язком системи і $Q(\tau, \tau, \sigma) = I$, правильна оцінка має вигляд

$$|Q(t, \tau, \sigma)| \le C \exp\{-\delta_1 |\sigma|^{2b} (t - \tau)\}, \ \delta_1 > 0,$$

I — одинична матриця.

У формулах (7), (8) функції $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2, \widetilde{\varphi}$ — результат дії перетворення Фур'є на функції f_1, f_2, φ відповідно.

Для розв'язання задачі Коші (7), (8) використаємо формулу з роботи [6, с. 38]. У результаті маємо

$$v(t, \sigma, \omega) =$$

$$= \exp\left\{ \int_h^t \left[A_k(s)(i\sigma)^k - \frac{1}{2} \left(\sum_{k \le b} B_k(s)(i\sigma)^k \right)^2 \right] ds + \int_h^t \sum_{|k| \le 2b} B_k(s)(i\sigma)^k dw(s, \omega) \right\} \times$$

$$\times \left[\widetilde{\varphi}(h, \sigma) + \int_h^t \exp\left\{ -\int_h^s \left[\sum_{k \le 2b} A_k(z) - \frac{1}{2} \left(\sum B_k(z)(i\sigma)^k \right)^2 \right] dz - \right. \right.$$

$$\left. - \int_h^s \sum_{|k| \le b} B_k(z)(i\sigma)^k dw(z, \omega) \right\} \times$$

$$\times \left[\widetilde{f}_1(\sigma, \varphi(s-h, \sigma)) + \widetilde{f}_2(\sigma, \varphi(s-h, \sigma)) \sum_{|k| \le b} B_k(s) \right] ds +$$

$$+ \int_h^t \exp\left\{ -\int_h^s \left[\sum_{|k| \le 2b} A_k(z)(i\sigma)^k - \frac{1}{2} \left(\sum_{|k| \le b} B_k(z)(i\sigma)^k \right)^2 \right] dz - \right.$$

$$\left. \left. - \int_h^s \sum B_k(z)(i\sigma)^k dw(z, \omega) \right\} \widetilde{f}_2(\sigma, \varphi(s-h) dw(s, \omega)) \right], \ \sigma \in R^n, \ h \le t \le 2h. \quad (9)$$

Формула (9) визначає розв'язок задачі (7), (8) в околі точки $(h, \widetilde{\varphi}(h, \sigma))$. Для спрощення запису введемо позначення у формулі (9):

$$Q(t, h, \sigma, \omega) \equiv$$

$$\equiv \exp\left\{ \int_h^t \left[A_k(s)(i\sigma)^k - \frac{1}{2} \left(\sum_{k \le b} B_k(s)(i\sigma)^k \right)^2 \right] ds + \int_h^t \sum_{|k| \le 2b} B_k(s)(i\sigma)^k dw(s, \omega) \right\}. \quad (10)$$

Якщо для розкриття дужок у формулі (9) другого доданку скористаємось очевидною властивістю

$$Q(t, h, \sigma, \omega)\cdot Q^{-1}(s, h, \sigma, \omega) = Q(t, h, \sigma, \omega)\cdot Q(h, s, \sigma, \omega) = Q(t, s, \sigma, \omega),$$

то розв'язок задачі (7), (8) набуватиме вигляду

$$v(t, \sigma, \omega) = Q(t, h, \sigma, \omega)\widetilde{\varphi}(h, \sigma) +$$
$$+\int_h^t Q(t, s, \sigma, \omega)\left[\widetilde{f}_1(\sigma, \widetilde{\varphi}(s, \sigma)) - \sum_{|k|\le b} B_k(s)(i\sigma)^k \widetilde{f}_2(\sigma, \widetilde{\varphi}(s-h, \sigma))\right] ds +$$
$$+\int_h^t Q(t, h, \sigma, \omega)\widetilde{f}_2(\sigma, \widetilde{\varphi}(s-h, \sigma))dw(s, \omega). \tag{11}$$

Позначимо функцію Гріна $G(t, \tau, x, \omega) = F_\sigma^{-1} Q(t, \tau, \sigma, \omega)$ і запишемо її:

$$G(t, \tau, x, \omega) =$$
$$= (2\pi)^{-n} \int_{R_n} e^{i\sigma x} Q(t, \tau, \sigma) \exp\left\{ -\frac{1}{2}\int_\tau^t \left(\sum_{|k|\le b} B_k(s)(i\sigma)^k \right)^2 ds + \int_\tau^t \sum_{|k|\le b} B_k(s)(i\sigma)^k dw(s) \right\} d\sigma.$$

Якщо в формулу (6) підставити $v(t, \sigma, \omega)$ із (11) і скористатись теоремою про перетворення Фур'є згортки двох функцій, то отримаємо формулу для розв'язку

$$U(t, x, \omega) = \int_{R_n} G(t, h, x-\xi, \omega)\varphi(h, \xi)d\xi +$$
$$+\int_h^t \int_{R_n} G(t, s, x-\xi, \omega)[f_1(\xi, \varphi(s-h, \xi)) - \sum_{|k|\le b} B_k(s) D_\xi^k f_1(\xi, \varphi(s-h, \xi))]\, d\xi ds +$$
$$+\int_h^t \int_{R_n} G(t, s, x-\xi, \omega) f_2(\xi, \varphi(s-h, \xi))\, d\xi dw(s, \omega). \tag{12}$$

Узагальнюючи отриманий результат для $lh \le t \le (l+1)h,\ l > 1$, дістанемо формулу (4).

Обгрунтування процесу знаходження розв'язку. Проведемо оцінювання функції Гріна та її похідних. Розпишемо коефіцієнти рівняння

$$\sum_{|k|\le b} B_k(t)(i\sigma)^k =$$
$$= \mathrm{Re}\left(\sum_{|k|\le b} B_k(s)(i\sigma)^k \right) + \mathrm{Im}\left(\sum_{|k|\le b} B_k(s)(i\sigma)^k \right) \equiv B^*(s, \sigma) + B^{**}(s, \sigma).$$

У цих позначеннях формула (10) набуває вигляду

$$Q(t, \tau, \sigma, \omega) =$$
$$= \exp\left\{ \int_\tau^t \left[\sum_{|k|\le 2b} A_k(s)(i\sigma)^k - \frac{1}{2}(B^*(s, \sigma))^2 + \frac{1}{2}(B^{**}(s, \sigma))^2 \right] ds - \right.$$
$$\left. -i\int_\tau^t B^*(s, \sigma)\cdot B^{**}(s, \sigma)ds + i\int_\tau^t B^{**}(s, \sigma)dw(s, \omega) + \int_\tau^t B^*(s, \sigma)dw \right\}.$$

З урахуванням того, що $|\exp\{i\sigma\}|=1$, $i^2=-1$, знайдемо

$$|Q(t,\tau,\sigma,\omega)|=\exp\left\{\int_\tau^t \mathrm{Re}\sum_{|k|\le 2b} A_k(s)(i\sigma)^k-\frac{1}{2}\int_\tau^t[(B^*(s,\sigma))^2-(B^{**}(s,\sigma))^2]\,ds+\right.$$
$$\left.+\int_\tau^t B^*(s,\sigma)dw(s,\omega)\right\}. \quad (13)$$

До рівності (13) застосуємо операцію математичного сподівання і, скориставшись лемою 1 з роботи [6, с. 81], отримаємо співвідношення

$$E\{|Q(t,\tau,\sigma,\omega)|\}=\exp\left\{\int_\tau^t\left[\mathrm{Re}\left(\sum_{|k|\le 2b}A_k(s)(i\sigma)^k\right)+\frac{1}{2}(B^{**}(s,\sigma))^2\right]ds\right\}.$$

За посиленої умови параболічності (3) теореми 1 виконується нерівність

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{|k|\le 2b}A_k(s)(i\sigma)^k\right)+\frac{1}{2}(B^{**}(\sigma))^2\le-\delta_1|\sigma|^{2b}+C_1,$$

де $0<\delta_1<\delta_0$, $C_1>C_0$.

Згідно з цією умовою матимемо оцінку

$$E\{|Q(t,\tau,\sigma,\omega)|\}\le C\cdot\exp\{-\delta_1|\sigma|^{2b}(t-\tau)\},\, C>0. \quad (14)$$

Лема 2. Сформулюємо результат щодо перетворення Фур'є цілих функцій — лема 1.1 з праці [5, с. 36]. Нехай $f(s)$ — ціла функція n комплексних змінних $s_1, s_2, \ldots, s_n$, $s_k=\sigma_k+i\gamma_k$, яка задовольняє нерівність

$$|f(s)|\le C\exp\left\{-\sum_{k=1}^n a_k|\sigma_k|^{p_k}+\sum_{k=1}^n b_k|\gamma_k|^{q_k}\right\},$$

$p_k>1$, $a_k>0$, тоді її перетворення Фур'є $\Psi(z)$ є цілою функцією змінних $z_1, z_2, \ldots, z_n$, $z_k=x_k+iy_k$ і для неї справедлива оцінка

$$|\Psi(z)|=|F(f(\tau))|\le B\exp\left\{-\sum_{k=1}^n\alpha_k|x_k|^{q'_k}+\sum_{k=1}^n\beta_k|y_k|^{p'_k}\right\},$$

$$\alpha_k>0,\ \frac{1}{p_k}+\frac{1}{p'_k}=1;\ \ \frac{1}{q_k}+\frac{1}{q'_k}=1.$$

Функція $Q(t,\tau,\sigma,\omega)$ є цілою функцією аргументу $\sigma\in R^n$ і під час виходу в комплексний простір $\sigma\to\sigma+i\gamma$ задовольняє за аргументом γ нерівність (14) зі зростаючою експонентою: $\exp\{c_2|\gamma|^{2b}(t-\tau)\}$.

Отже, функція Гріна $G(t,\tau,x,\omega)$ є цілою функцією і для неї правильна оцінка має вигляд

$$|D_x^k EG(t,\tau,x,\omega)|\le C_k(t-\tau)^{\frac{-n+|k|}{2b}}\exp\left\{-c\left(|x|(t-\tau)^{-\frac{1}{2b}}\right)^q\right\},$$

де $C_k, c>0$, $q=\dfrac{2b}{2b-1}$. А для похідних до порядку $2b$ розв'язку $U(t,x,\omega)$ виконується нерівність (21) з праці [7, с. 1425].

Зауваження 1. Методом кроків можна побудувати розв'язок задачі Коші і у випадку векторнозначного Вінерового процесу.

Отже, за допомогою функції Гріна виконано побудову розв'язку задачі Коші для стохастичного параболічного рівняння зі сталим запізненням та оцінено його похідні до порядку $2b$ включно.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Эльсгольц Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Москва: Наука, 1971. 296 с.
2. Дрінь Я.М., Дрінь М.М. Дослідження задачі Коші для квазілінійних В-параболічних рівнянь з відхиленням аргумента. Науковий вісник Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Сер. математика. 2012. Т. 2, № 1. С. 32–34.
3. Матійчук М.І. Параболічні та еліптичні задачі в просторах Діні. Чернівці: Чернів. нац. ун-т, 2010. 248 с.
4. Самойленко А.М., Перестюк М.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Київ: Вища шк., 1987. 258 с.
5. Эйдельман С.Д. Параболические системы. Москва: Наука, 1964. 445 с.
6. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Київ: Наук. думка, 1968. 354 с.
7. Перун Г.М. Задача з імпульсною дією для лінійного стохастичного параболічного рівняння вищого порядку. Український математичний журнал. 2008. Т. 60, № 10. С. 1422–1426.

G. Perun, V. Yasynskyy

THE CAUCHY PROBLEM FOR A STOCHASTIC PARABOLIC EQUATION WITH A DEVIATION OF THE ARGUMENT

Abstract. The Cauchy problem for a stochastic nonlinear equation of parabolic type with delay is considered. Using Green's function, a formula is derived for finding the solution of the problem by the method of steps. The existence of a solution is established with probability 1 and the solution is estimated according to a specially introduced norm.

Keywords: Cauchy problem, stochastic parabolic equation, method of steps, Fourier transform, Green's function.

Надійшла до редакції 21.06.2022