УДК 519.8

Т.В. ЖИГАЛЛО
Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна,
e-mail: *tetvas@ukr.net.*

Ю.І. ХАРКЕВИЧ
Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна,
e-mail: *kharkevich.juriy@gmail.com.*

ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ПІДСУМОВУВАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ АБЕЛЯ–ПУАССОНА

Анотація. Розглянуто актуальні проблеми теорії оптимальних рішень, а саме дослідження асимптотичних властивостей перетворення Фур'є підсумовувальної функції Абеля–Пуассона. Описано перетворення Фур'є, що побудовано на ґрунті розв'язку класичного рівняння Лапласа в полярних координатах (у середині одиничного круга) з відповідними крайовими умовами. Це перетворення Фур'є підсумовувальної функції Абеля–Пуассона означене на класах функцій з дробовими похідними. Отримано асимптотичні оцінки для цього перетворення Фур'є, що є важливим елементом розв'язання багатьох прикладних оптимізаційних задач.

Ключові слова: теорія оптимальних рішень, оптимізаційні задачі, перетворення Фур'є, асимптотичні властивості.

ВСТУП

Для забезпечення стрімкого (невпинного) розвитку світового народного господарства потрібно використовувати все нові й нові математичні методи прогнозування динаміки економічних, соціальних та багатьох інших процесів. За допомогою традиційних методів економічного моделювання не завжди вдається досягти бажаного результату. Вочевидь це пов'язано з тим, що в більшості випадків динаміку розвитку того чи іншого економічного процесу не можна описати за допомогою лінійної функціональної залежності. Тоді треба розробляти і використовувати нові математичні методи теорії оптимальних рішень для прогнозування перспектив розвитку світового народного господарства.

Одними з таких математичних методів є оптимізаційні методи гармонійного аналізу. Теоретичними основами гармонійного аналізу, як відомо, є ряди і перетворення Фур'є. Від початку свого виникнення і дотепер теорія перетворення Фур'є має питому вагу як у різноманітних задачах прикладної математики (цифрове оброблення звукових сигналів, поширення тепла в різноманітному середовищі тощо), так і в багатьох екстремальних задачах теорії наближення функцій. Мало того, всі оптимізаційні задачі теорії наближення функцій мають сенс лише тоді, коли встановлено факт сумовності на всій числовій осі перетворення Фур'є функцій з дробовими похідними [1–3] відповідного інтегрального представлення досліджуваної величини. Як інтегральне представлення в багатьох задачах прикладної математики зручно використовувати підсумовувальну функцію [4–6] Абеля–Пуассона. Унікальність цієї функції полягає в тому, що, по-перше, на відміну від багатьох інших підсумовувальних функцій такого типу [7, 8], вона за своєю суттю є гармонійною, а по-друге, побудована для класів з дробовими похідними. І відповідно, як не яка інша функція, може моделювати різноманітні прикладні оптимізаційні задачі [9–11].

Саме тому основною метою цієї роботи є вивчення асимптотичних властивостей гармонійної підсумовувальної функції Абеля–Пуассона для класів з дробовими похідними та з'ясування умов, за яких її перетворення Фур'є буде сумовним на всій числовій осі.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ДЕЯКІ ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ

Нехай $\Lambda = \{\lambda_\delta(k)\}$ — сукупність функцій, залежних як від дійсного параметра δ (див., наприклад, [12]), так і від $k = 0, 1, 2, \ldots$, причому покладемо, що $\lambda_\delta(0) = 1$. Зазначимо, що в частинному випадку, коли $\delta = n \in N$, числа $\lambda_\delta(k) \overset{def}{=} \lambda_{n,k}$ будуть елементами прямокутної числової матриці

$$\Lambda = \{\lambda_{n,k}\} (n, k = 0, 1, 2, \ldots; \lambda_{n,0} = 1 \text{для всіх } n).$$

Нехай $f(x)$ — 2π-періодична сумовна на періоді функція ($f \in L$) і

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) = S(f; x) \tag{1}$$

є її ряд Фур'є.

Кожній функції $f \in L$ з урахуванням її ряду Фур'є (1) поставимо у відповідність ряд

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\delta(k)(a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx). \tag{2}$$

Нехай множина $\Lambda = \{\lambda_\delta(k)\}$ така, що ряд (2) для всіх дійсних значень δ є рядом Фур'є деякої неперервної функції, яку позначатимемо $U_\delta(f; x; \Lambda)$. У цьому випадку кажуть [13, с. 36], що множина $\Lambda = \{\lambda_\delta(k)\}$ визначає конкретний метод (Λ-метод) підсумовування рядів Фур'є. Аналогічно до [13, с. 39] можна показати, що якщо послідовність $\{\lambda_\delta(k)\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, для всіх дійсних значень параметра δ така, що ряд $\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_\delta(k) \cos kt$ є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то матиме місце рівність

$$U_\delta(f; x; \Lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\delta(k) \cos kt \right\} dt. \tag{3}$$

Якщо в рівності (3) покласти $\lambda_\delta(k) = e^{-\frac{k}{\delta}}$, $\delta > 0$, то оператор типу (3) прийнято позначати

$$A_\delta(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt \right\} dt, \quad \delta > 0, \tag{4}$$

і називати інтегралом Абеля–Пуассона (або Пуассона) [14–18]. У той же час (див., наприклад, [19–21]), якщо $\delta = -\dfrac{1}{\ln \rho}$, $0 \le \rho < 1$, то інтеграл Абеля–Пуассона (4) є розв'язком класичного рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (0 \le \rho < 1, \quad -\pi \le x \le \pi)$$

з відповідними крайовими умовами

$$U(\rho,x)|_{\rho=1}=f(x), \qquad \left.\frac{\partial U(\rho,x)}{\partial\rho}\right|_{\rho=1}=0, \qquad -\pi\le x\le\pi.$$

Якщо ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty}k^r\left(a_k\cos\left(kx+\frac{\alpha\pi}{2}\right)+b_k\sin\left(kx+\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right),$$
де $r>0$ і α — фіксоване дійсне число, є рядом Фур'є деякої сумовної функції $\varphi(x)$, то таку функцію $\varphi(x)$ згідно з [13, с. 130] прийнято називати (r,α)-похідною функції f (або дробовою похідною в розумінні Вейля–Надя) і відповідно позначати $f_\alpha^r(x)$. Множину сумовних функцій f, які задовольняють таку умову, прийнято позначати W_α^r [13, с. 130]. Тоді відповідно величину

$$p(z)=p_{\delta,r}(z)=\begin{cases}1-e^{-z}, & 0\le z\le\dfrac{1}{\delta},\\[2mm] \dfrac{1-e^{-z}}{(\delta z)^r}, & z\ge\dfrac{1}{\delta},\end{cases} \tag{5}$$

аналогічно до [22–25] називатимемо підсумовувальною функцією Абеля–Пуассона для класів функцій з дробовою похідною W_α^r.

Основною метою запропонованої роботи є довести, що перетворення Фур'є вигляду
$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty p(z)\cos\left(zt+\frac{a\pi}{2}\right)dz, \quad a\in R, \tag{6}$$
для підсумовувальної функції $p(z)$, заданої за допомогою співвідношення (5), є сумовним на всій числовій осі.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ПІДСУМОВУВАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ АБЕЛЯ–ПУАССОНА ТА ЙОГО ЗБІЖНІСТЬ

У прийнятих раніше позначеннях має місце теорема.

Теорема 1. Перетворення Фур'є вигляду (6) підсумовувальної функції Абеля–Пуассона (5) для класів функцій з дробовою похідною W_α^r є сумовним на всій числовій осі і має місце оцінка

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^\infty p(z)\cos\left(zt+\frac{a\pi}{2}\right)dz\right|dt=\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{a\pi}{2}\right|\begin{cases}O\left(\dfrac{1}{\delta^r}\right), & r<1,\\[2mm] \dfrac{\ln\delta}{\delta}+O\left(\dfrac{1}{\delta}\right), & r=1,\quad \delta\to\infty.\\[2mm] O\left(\dfrac{1}{\delta}\right), & r>1,\end{cases} \tag{7}$$

Доведення. Згідно з теоремою 1 [26] для збіжності інтеграла з правої частини (7) необхідно і достатньо, щоб збігалися інтеграли

$$\left|\sin\frac{a\pi}{2}\right|\int_0^\infty|p(z)|\frac{dz}{z}, \tag{8}$$

$$\int_0^1|p(1+z)-p(1-z)|\frac{dz}{z}, \tag{9}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} z\left|dp'(z)\right|, \tag{10}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} |z-1|\left|dp'(z)\right|. \tag{11}$$

Для отримання оцінки інтеграла (8) будемо використовувати метод, запропонований в [27]. Для цього розіб'ємо проміжок інтегрування $[0,\infty)$ на три частини: $\left[0,\frac{1}{\delta}\right], \left[\frac{1}{\delta},1\right]$, $[1,\infty)$.

Використовуючи очевидну нерівність

$$1-e^{z} < z, \;\; z > 0, \tag{12}$$

і співвідношення (5), отримуємо рівність

$$\int_0^{\frac{1}{\delta}} p(z)\frac{dz}{z} = \int_0^{\frac{1}{\delta}} (1-e^{z})\frac{dz}{z} = O\left(\frac{1}{\delta}\right), \quad \delta\to\infty. \tag{13}$$

Як випливає із (5) і елементарних перетворень,

$$\left|\int_{\frac{1}{\delta}}^{1} p(z)\frac{dz}{z} - \int_{\frac{1}{\delta}}^{1}\frac{dz}{(\delta z)^{r}}\right| \le \frac{1}{\delta^{r}}\int_{\frac{1}{\delta}}^{1}\left|1-e^{-z}-z\right|\frac{dz}{z^{1+r}} \le C_1. \tag{14}$$

Тут і далі C_i, $i=1,2,\dots$, позначатимемо сталі. Тому із (14) матимемо, що

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^{1} p(z)\frac{dz}{z} = \begin{cases} O\left(\frac{1}{\delta^{r}}\right), & r<1, \\ \frac{\ln\delta}{\delta} + O\left(\frac{1}{\delta^{r}}\right), & r=1, \\ O\left(\frac{1}{\delta}\right), & r>1, \end{cases} \qquad \delta\to\infty. \tag{15}$$

Для функції $p(z)$ у випадку, коли $z\ge 1$, можемо записати

$$\left|\int_1^{\infty} p(z)\frac{dz}{z} - \int_{\delta}^{\infty}\frac{dz}{z^{1+r}}\right| \le C_2. \tag{16}$$

Об'єднавши (13), (15) і (16), отримаємо оцінку для інтеграла (8), а саме

$$\left|\sin\frac{a\pi}{2}\right|\int_0^{\infty}|p(z)|\frac{dz}{z} = \left|\sin\frac{a\pi}{2}\right| \begin{cases} O\left(\frac{1}{\delta^{r}}\right), & r<1, \\ \frac{\ln\delta}{\delta} + O\left(\frac{1}{\delta}\right), & r=1, \\ O\left(\frac{1}{\delta}\right), & r>1. \end{cases} \tag{17}$$

Оскільки функція $p(z)$ задана за допомогою співвідношення (5), для отримання оцінки інтеграла (9) запишемо його у вигляді

$$\int_0^1 |p(1+z)-p(1-z)|\frac{dz}{z} = \int_0^{\frac{1}{\delta}} \left| e^{-(1-z)} - e^{-(1+z)} \right| \frac{dz}{z} +$$

$$+\frac{1}{\delta^r}\int_{\frac{1}{\delta}}^1 \left| e^{-(1-z)} - e^{-(1+z)} \right| \frac{dz}{z^{r+1}}. \qquad (18)$$

Легко показати, що

$$\int_0^{\frac{1}{\delta}} \left| e^{-(1-z)} - e^{-(1+z)} \right| \frac{dz}{z} = O\left(\frac{1}{\delta}\right), \quad \delta \to 0, \qquad (19)$$

та

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^1 \left| e^{-(1-z)} - e^{-(1+z)} \right| \frac{dz}{z^{r+1}} = \begin{cases} O(1), & r<1, \\ \ln\delta + O(1), & r=1, \\ O(\delta^{r-1}), & r>1. \end{cases} \qquad (20)$$

Підставивши (19) та (20) у праву частину (18), матимемо

$$\int_0^1 |p(1+z)-p(1-z)|\frac{dz}{z} = \begin{cases} O\left(\frac{1}{\delta^r}\right), & r<1, \\ \frac{\ln\delta}{\delta} + O\left(\frac{1}{\delta}\right), & r=1, \\ O\left(\frac{1}{\delta}\right), & r>1. \end{cases} \qquad (21)$$

Для отримання оцінки інтеграла (10) розіб'ємо проміжок його інтегрування $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ на дві частини: $\left[0;\frac{1}{\delta}\right]$ і $\left[\frac{1}{\delta};\frac{1}{2}\right]$.

Згідно з (5) будемо мати $p''(z) = -e^{-z}$ для всіх $z \in \left[0;\frac{1}{\delta}\right]$. Тож, використавши нерівність (12), отримаємо оцінку

$$\int_0^{\frac{1}{\delta}} z|dp(z)| = O\left(\frac{1}{\delta^2}\right), \quad \delta \to \infty. \qquad (22)$$

Далі у випадку $z \in \left[\frac{1}{\delta};\frac{1}{2}\right]$ покладемо

$$p(z) = p_1(z) + p_2(z),$$

де

$$p_1(z) := (1 - e^{-z} - z)(\delta z)^{-r}, \qquad (23)$$

$$p_2(z) := \frac{z^{-r+1}}{\delta^r}. \qquad (24)$$

Тоді очевидно, що

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} z\left|dp'(z)\right| \le \int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} z\left|dp_1'(z)\right| + \int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} z\left|dp_2'(z)\right|. \qquad (25)$$

Знайдемо оцінку першого інтеграла з правої частини (25). Для цього дослідимо функцію

$$\mu(z) = 1 - e^{-z} - z. \qquad (26)$$

Матимемо

$$\mu'(z) = -1 + e^{-z}, \ \mu''(z) = -e^{-z}, \ \mu(0) = 0, \ \mu'(0) = 0,$$

а також для всіх $z \ge 0$

$$\mu(z) \le 0, \quad \mu'(z) \le 0, \quad \mu''(z) < 0. \qquad (27)$$

Враховуючи (27) і нерівність $e^{-z} \le \frac{1}{2} z^2 - z + 1$, за умови $z \in [0, \infty)$ можна показати виконання таких співвідношень:

$$\left|\mu'(z)\right| = 1 - e^{-z} \le z, \quad \left|\mu''(z)\right| = e^{-z} \le 1. \qquad (28)$$

Далі для всіх $z \ge \frac{1}{\delta}$ із врахуванням (23) і (26) отримаємо

$$\left|dp_1'(z)\right| \le \frac{1}{\delta^r} \left(r(r+1)\left|\mu(z)\right| z^{-2-r} + 2r\left|\mu'(z)\right| z^{-1-r} + \left|\mu''(z)\right| z^{-r}\right) dz. \qquad (29)$$

Із (29) і (28) випливає, що

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} z\left|dp_1'(z)\right| \le \frac{r(r+1)}{2\delta^r} \int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} z^{1-r} dz \, \frac{2r+1}{\delta^r} \int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} z^{1-r} dz \le \frac{C_3}{\delta^r}. \qquad (30)$$

Оцінимо другий інтеграл у правій частині нерівності (25). Згідно з (24)

$$dp_2'(z) = \frac{-r(1-r)}{\delta^r} z^{1-r} dz, \ z \ge 0.$$

А отже, можемо записати

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} z\left|dp_2'(z)\right| = -\int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} z \, dp_2'(z) = O\left(\frac{1}{\delta^r}\right), \quad \delta \to \infty. \qquad (31)$$

Приймаючи до уваги співвідношення (22) і об'єднуючи (25), (30) та (31), отримуємо оцінку

$$\int_0^{\frac{1}{2}} z\left|dp'(z)\right| = O\left(\frac{1}{\delta^r}\right), \quad \delta \to \infty. \qquad (32)$$

І насамкінець отримаємо оцінку інтеграла (11). За умови $z \in \left[\frac{1}{\delta}, \infty\right)$ із (5) випливає, що

$$dp'(z) = \frac{1}{\delta^r} \{r(r+1)(1-e^{-z}) z^{-2-r} - 2re^{-z} z^{-1-r} - e^{-z} z^{-r}\} dz. \qquad (33)$$

Тоді унаслідок (33)

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} |z-1|\,|dp'(z)| \le \frac{r(r+1)}{\delta^r}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}(1-e^{-z})\frac{dz}{z^{1+r}} + \frac{2r}{\delta^r}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-z}\frac{dz}{z^r} + \frac{1}{\delta^r}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-z}\frac{dz}{z^{r-1}}.$$

Застосувавши до правої частини останнього співвідношення нерівності $1-e^{-z}\le 1$ за умов $z\in[0,\infty)$ і $ze^{-z}\le C$, $z^{-r}\le 2^r$, для всіх $z\ge\frac{1}{2}$ матимемо

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} |z-1|\,|dp'(z)| = O\left(\frac{1}{\delta^r}\right), \quad \delta\to\infty. \tag{34}$$

Для завершення доведення теореми скористаємося нерівностями (2.14) і (2.15) із [26], згідно з якими

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^{\infty} p(z)\cos\left(zt+\frac{\alpha\pi}{2}\right)dz\right|dt - \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\alpha\pi}{2}\right|\left|\int_0^{\infty}|p(z)|\frac{dz}{z}\right|\right| \le$$

$$\le C_4\left(\int_0^1 |p(1+z)-p(1-z)|\frac{dz}{z} + \int_0^{\frac{1}{2}} z\,|dp'(z)| + \int_{\frac{1}{2}}^{\infty}|z-1|\,|dp'(z)| + |p(0)| + |p(1)|\right) \tag{35}$$

та

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^{\infty} p(z)\cos\left(zt+\frac{\alpha\pi}{2}\right)dz\right|dt - \int_0^1 |p(1+z)-p(1-z)|\frac{dz}{z}\right| \le$$

$$\le C_5\left(\int_0^{\infty}\left|\sin\frac{a\pi}{2}\right| |p(z)|\frac{dz}{z} + \int_0^{\frac{1}{2}} z\,|dp'(z)| + \int_{\frac{1}{2}}^{\infty}|z-1|\,|dp'(z)| + |p(0)| + |p(1)|\right). \tag{36}$$

Отже, об'єднуючи співвідношення (17), (21), (32), (34)–(36) та позначення підсумовувальної функції Абеля–Пуассона (5), отримуємо оцінку (7).

Теорему доведено.

ВИСНОВКИ

У результаті проведених досліджень були вивчені асимптотичні властивості підсумовувальної функції Абеля–Пуассона (5). Ця функція, як і всі функції такого типу, характеризує відповідні гармонійні оператори [28, 29], які є розв'язками відповідних інтегро-диференціальних рівнянь. А тому досліджені в роботі асимптотичні властивості підсумовувальної функції Абеля–Пуассона на класах функцій з дробовою похідною є важливим елементом для розв'язання деяких прикладних задач [30–32]. Справа в тому, що ці задачі будуть коректними лише за умови, коли інтегральне представлення досліджуваної величини є сумовним на всій числовій осі. У процесі доведення теореми було показано, що перетворення Фур'є (6) підсумовувальної функції (5) є збіжним. Отримані в роботі асимптотичні оцінки (7) аналітично підтверджують експериментальні дослідження в [33–37].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Chikrii A., Matychyn I. Riemann-Liouville, Caputo, and sequential fractional derivatives in differential games. In: Breton M., Szajowski K. (Eds.). *Advances in Dynamic Games.* 2011. Vol. 11. P. 61–81. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8089-3_4.
2. Chikrii A.A., Matichin I.I. Game problems for fractional-order linear systems. *Proc. of the Steklov Institute of Mathematics.* 2010. Vol. 268. P. 54–70. https://doi.org/10.1134/S0081543810050056.
3. Chikrii A.A., Eidelman S.D. Control game problems for quasilinear systems with Riemann-Liouville fractional derivatives. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2001. Vol. 37, N 6. P. 836–864. https://doi.org/10.1023/A:1014529914874.
4. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions defined on the real axis by Abel–Poisson operators. *Ukrainian Math. J.* 2005. Vol. 57, N 8. P. 1297–1315. https://doi.org/10.1007/s11253-005-0262-z.
5. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. On approximation of functions from the class $L^{\psi}_{\beta,1}$ by the Abel–Poisson integrals in the integral metric. *Carpathian Math. Publ.* 2022. Vol. 14, N 1. P. 223–229. https://doi.org/10.15330/cmp.14.1.223-229.
6. Kal'chuk I.V., Kharkevych Y.I. Approximation of the classes $W^{r}_{\beta,\infty}$ by generalized Abel–Poisson integrals. *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal.* 2022. Vol. 74, N 4. P. 507–515. https://doi.org/10.37863/umzh.v74i4.7164.
7. Serdyuk A., Hrabova U. Order estimates of the uniform approximations by Zygmund sums on the classes of convolutions of periodic functions. *Carpathian Math. Publ.* 2021. Vol. 13, N 1. P. 68–80. https://doi.org/10.15330/cmp.13.1.68-80.
8. Bushev D.M., Kharkevych Y.I. Conditions of convergence almost everywhere for the convolution of a function with delta-shaped kernel to this function. *Ukrainian Math. J.* 2016. Vol. 67, N 11. P. 1643–1661. https://doi.org/10.1007/s11253-016-1180-y.
9. Pilipenko Yu.B., Chikrii A.A. Oscillatory conflict-control processes. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 1993. Vol. 57, N 3. P. 407–417. https://doi.org/10.1016/0021-8928(93)90119-7.
10. Albus J., Meystel A., Chikrii A.A., Belousov A.A., Kozlov A.I. Analytical method for solution of the game problem of soft landing for moving objects. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2001. Vol. 37, N 1. P. 75–91. https://doi.org/10.1023/A:1016620201241.
11. Chikrii A.A., Chikrii V.K. Image structure of multivalued mappings in game problems of motion control. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2016. Vol. 48, N 3. P. 20–35. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i3.30.
12. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2012. Vol. 63, N 12. P. 1820–1844. https://doi.org/10.1007/s11253-012-0616-2.
13. Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. Киев: Наук. думка, 1981. 340 с.
14. Kharkevych Yu.I. Approximative properties of the generalized Poisson integrals on the classes of functions determined by a modulus of continuity. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2019. Vol. 51, N 4. P. 43–54. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i4.40.
15. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of functions by conjugate Poisson integrals. *Carpathian Math. Publ.* 2020. Vol. 12, N 1. P. 138–147. https://doi.org/10.15330/cmp.12.1.138-147.

16. Kharkevych Yu.I. On Approximation of the quasi-smooth functions by their Poisson type integrals. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2017. Vol. 49, N 10. P. 74–81. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v49.i10.80.

17. Kharkevych Yu. I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of conjugate functions by Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 2018. Vol. 22, N 2. P. 235–243. https://doi.org/10.12697/ACUTM.2018.22.19.

18. Kharkevych Yu.I. Asymptotic expansions of upper bounds of deviations of functions of class W^r from their generalized Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. Vol. 50, N 8. P. 38–49. https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v50.i8.40.

19. Kal'chuk I.V., Hrabova U.Z., Filozof L.I. Approximation of the classes $W_\beta^r H^\alpha$ by three-harmonic Poisson integrals. *J. Math. Sci. (N.Y.).* 2021. Vol. 254, N 3. P. 397–405. https://doi.org/10.1007/s10958-021-05311-8.

20. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the classes $C_{\beta,\infty}^\psi$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2011. Vol. 63, N 7. P. 1083 – 1107. http://doi.org/10.1007/s11253-011-0565-81.

21. Abdullayev F.G., Kharkevych Yu.I. Approximation of the classes $C_\beta^\psi H^\alpha$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2020. Vol. 72, N 1. P. 21–38. https://doi.org/10.1007/s11253-020-01761-6.

22. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V. Approximation of the classes $W_{\beta,\infty}^r$ by three-harmonic Poisson integrals. *Carpathian Math. Publ.* 2019. Vol. 11, N 2. P. 10–23. https://doi.org/10.15330/cmp.11.2.321-334.

23. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions by Weierstrass integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. Vol. 59, N 7. P. 1059–1087. https://doi.org/10.1007/s11253-007-0069-1.

24. Kal'chuk I.V., Kravets V.I., Hrabova U.Z. Approximation of the classes $W_\beta^r H^\alpha$ by three-harmonic Poisson integrals. *J. Math. Sci. (N. Y.).* 2020. Vol. 246, N 2. P. 39–50. https://doi.org/10.1007/s10958-020-04721-4.

25. Hrabova U.Z. Uniform approximations by the Poisson threeharmonic integrals on the Sobolev classes. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2019. Vol. 51, N 12. P. 46–55. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i12.50.

26. Баусов Л.И. Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами. I. *Изв. вузов. Математика.* 1965. Т. 46, № 3. С. 15–31.

27. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions from the class $\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi$ by Poisson biharmonic operators in the uniform metric. *Ukrainian Math.* J. 2008. Vol. 60, N 5. P. 769–798. https://doi.org/10.1007/s11253-008-0093-9.

28. Kal'chuk I, Kharkevych Y. Approximation properties of the generalized Abel–Poisson Integrals on the Weyl–Nagy classes. *Axioms.* 2022. Vol. 11, N 4. P. 161. https://doi.org/10.3390/axioms11040161.

29. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by triharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2001. Vol. 53, N 6. P. 1012–1018. https://doi.org/10.1023/A:1013364321249.

30. Chikrii A.A., Chikrii G.Ts. Matrix resolving functions in game problems of dynamics. *Proc. of the Steklov Institute of Mathematics.* 2015. Vol. 291. P. 56–65. https://doi.org/10.1134/S0081543815090047.

31. Chikrii A.A., Eidel'man S.D. Generalized Mittag-Leffler matrix functions in game problems for evolutionary equations of fractional order. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2000. Vol. 36, N 3. P 315–338. https://doi.org/10.1007/BF02732983.

32. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in an abstract parabolic system. *Proc. of the Steklov Institute of Mathematics.* 2016. Vol. 293. P. 254–269. https://doi.org/10.1134/S0081543816050229.

33. Sobchuk V., Kal'chuk I., Kharkevych Y., Kharkevych G. Estimations of the convergence rate of the Fourier transformation for data processing efficiency improvement. *IEEE 3rd International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT).* 2021. P. 76–79. https://doi.org/10.1109/ATIT54053.2021.9678825.

34. Kharkevych G., Kharkevych Y., Kal'chuk I., Sobchuk V. Usage of Fourier transformation theory in machine translation. *IEEE 2nd International Conference on Advanced Trends in Information Theory (IEEE ATIT 2020),* Kyiv, Ukraine. 2020. P. 196–199. https://doi.org/10.1109/ATIT50783.2020.9349329.

35. Kharkevych Yu.I. On some asymptotic properties of solutions to biharmonic equations. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2022. Vol. 58, N 2. P. 251–258. https://doi.org/10.1007/s10559-022-00457-y

36. Makarchuk A., Kal'chuk I., Kharkevych Y., Yakovleva A. The usage of interpolation polynomials in the studying of data transmission in networks. *IEEE 2nd International Conference on System Analysis & Intelligent Computing (SAIC)*, Kyiv, Ukraine. 2020. P. 1–4. https://doi.org/10.1109/SAIC51296.2020.9239180.

37. Sobchuk V., Kal'chuk I., Kharkevych G., Laptiev O., Kharkevych Y., Makarchuk A. Solving the problem of convergence of the results of analog signals conversion in the process of aircraft control. *IEEE 6th International Conference on Actual Problems of Unmanned Aerial Vehicles Development, APUAVD*. 2021. P. 29–32. https://doi.org/10.1109/APUAVD53804.2021.9615437.

T.V. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych

FOURIER TRANSFORM OF THE SUMMING ABEL–POISSON FUNCTION

Abstract. The work is devoted to the current issues of the theory of optimal solutions, namely the analysis of the asymptotic properties of the Fourier transformation of the summing Abel–Poisson function. The Fourier transform considered in the paper is based on the solution of the classical Laplace's equation in polar coordinates (in the middle of the single circle) with the corresponding boundary conditions. Moreover, this Fourier transform of the summing Abel–Poisson function is denoted by classes of functions with fractional derivatives. Therefore, the asymptotic estimates obtained in the paper for this Fourier transform are an important element in solving many applied optimization problems.

Keywords: theory of optimal solutions, optimization problems, Fourier transform, asymptotic properties.

Надійшла до редакції 04.04.2022