УДК 519.168; 519.854.3

В.О. ВАСЯНІН
Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ, Україна, e-mail: *archukr@meta.ua.*

О.М. ТРОФИМЧУК
Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ, Україна, e-mail: *itgis@nas.gov.ua.*

Л.П. УШАКОВА
Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ, Україна, e-mail: *archukr@meta.ua*.

ЗАДАЧА МАРШРУТИЗАЦІЇ ЗБІРНИХ ВАНТАЖІВ У БАГАТОПРОДУКТОВІЙ ТРАНСПОРТНІЙ МЕРЕЖІ ІЗ ЗАДАНИМИ ТАРИФАМИ І ОБМЕЖЕННЯМИ НА ЧАС ДОСТАВКИ

Анотація. Розглянуто мережеве формулювання задачі оптимізації маршрутизації потоків збірних вантажів у транспортній мережі із заданими тарифами на транспортування й оброблення потоків та обмеженнями на пропускні спроможності дуг, вузлів і час доставки окремих вантажів одержувачу. Для розрахунку часу доставки запропоновано спосіб формування довідкової матриці об'єднання потоків окремих вантажів і ефективні алгоритми, що дають змогу визначати вузли об'єднання та об'єднані потоки для всіх пар, що кореспондуються в багатопродуктовій мережі. Доведено, що задачу з тарифами в мережевій постановці можна за поліноміальний час перетворити у задачу цілочислового лінійного програмування з блочною структурою та зв'язувальними обмеженнями. Наведено особливості розв'язання перетвореної задачі з використанням відомих методів цілочислового програмування та пакетів прикладних програм.

Ключові слова: математичні моделі розподілу та маршрутизації потоків у багатопродуктових мережах, задачі оптимізації з дискретними потоками та параметрами.

ВСТУП

Робота спрямована на підвищення ефективності функціонування магістральних транспортних мереж за рахунок зниження дефіцитних ресурсів на основі застосування методології моделювання і проєктування процесів оброблення та маршрутизації дискретних потоків збірних вантажів та комплексу заходів інформаційно-аналітичного забезпечення й автоматизації процедур прийняття рішень в управлінні транспортними потоками [1].

Ця проблематика має безліч важливих застосувань. До прикладу, нині перевезення дискретних потоків вантажів, окрім державного підприємства «Укрпошта», здійснюють численні спеціалізовані кур'єрські служби, як-от «Нова Пошта», «Делівері», «Нічний Експрес», «Ваша пошта» тощо. Широко поширена і міжнародна електронна торгівля вантажами через інтернет, що доставляються клієнтам по всьому світу автомобільним, авіаційним та іншими видами транспорту.

Водночас практичні дослідження показують, що протягом останніх років обсяги перевезень збірних вантажів у контейнерах та на піддонах у транспортних мережах України збільшуються недостатньо інтенсивно. Так, наприклад, обсяг перевезень до США на рік становить понад 15 млрд тонн дрібнопартійних вантажів на загальну суму понад 9 трлн доларів США, а доходи від транспортування цих вантажів становлять близько 11 % від обсягу валової національної продукції США [2, 3]. Основними причинами цього є організаційно-технічна непідготовленість державних і приватних транспортних підприємств до впровадження сучасних інформаційно-аналітичних систем, технологій та інструментальних засобів автоматизованого проєктування, управління та підтримки прийняття рішень, зокрема з використанням ситуаційних центрів оброблення та подання інформації. До того ж у більшості сучасних автоматизованих транспортних систем не реалізовано науково обґрунтовані методи математичного моделювання процесів перевезення збірних вантажів у контейнерах та на піддонах, а також відсутні інструментальні засоби для управління цими перевезеннями.

У відомих підходах до розв'язання багатопродуктових оптимізаційних задач проєктування мереж, розподілу та маршрутизації потоків зазвичай використовують лінійні математичні моделі, Лагранжеву та LP-релаксацію вихідної задачі, методи гілок та меж, відсікань та цін, генерації стовпців та інші й перевірені на практиці різновиди симплекс-методу та методу внутрішніх точок. Є й універсальні програмні засоби розв'язання задач математичного програмування зі змішаними та цілочисловими змінними.

Великий бібліографічний огляд математичних моделей, методів і алгоритмів розв'язання багатопродуктових задач (Multicommodity Network Flow Problems, MCNF) можна знайти в [4–8]. В одній з небагатьох робіт [9] розглянуто задачу маршрутизації збірних тарно-штучних вантажів у багатопродуктовій мережі, в якій здійснено інтеграцію процесів їхнього сортування та транспортування і враховано обмеження на час доставки вантажів. При цьому в один транспортний блок групують тільки ті вантажі, у яких збігаються пункти відправлення та призначення і часові вікна доставки, при цьому обмеження на пропускні спроможності вузлів та дуг мережі не враховують. У [10, 11] наведено багатопродуктові моделі маршрутизації з обмеженнями на пропускні спроможності дуг мережі та з жорсткими (Hard Transit Time-Constrained, HTC-MCNF) та м'якими (Soft Ttransit Ttime-Constrained, STC-MCNF) обмеженнями на час доставки вантажів, але вантажі з різними адресами призначення не об'єднують у спільні транспортні блоки.

На відміну від більшості наявних підходів до моделювання та аналізу функціонування багатопродуктових мереж, у цій роботі розглянуто дискретні моделі транспортних процесів з цілочисловими змінними та параметрами. У практичних задачах слід враховувати процеси сортування вантажів у сортувальних центрах, обмеження на час їхньої доставки споживачеві, коливання потоків і навантажень в окремих вузлах і лініях зв'язку транспортної мережі, вантажопідйомність транспортних засобів, нелінійність наведених витрат на оброблення та транспортування потоків, а також безліч інших реальних факторів та обмежень. Це зумовлює потребу в розробленні нових математичних моделей, методів, алгоритмів та інформаційної платформи для управління обробленням, розподілом і маршрутизацією потоків збірних вантажів, а також визначає важливість досліджуваної науково-прикладної проблеми для розвитку транспортної системи України.

ПОСТАНОВКА І МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ

Здебільшого наявні та проєктовані територіально-розподілені транспортні мережі є багаторівневими і складаються з децентралізованої розподіленої мережі (магістральної) та низових фрагментарних мереж (зональних та внутрішніх) на нижніх рівнях ієрархії. Оскільки фізична просторова структура багатьох транспортних мереж вже склалася, то найбільший інтерес становить розв'язання завдань тактичного (поточного) планування та оперативного управління, націлених переважно на оптимізацію їхнього функціонування за наявних ресурсів.

У цій роботі розглянуто транспортні магістральні багатопродуктові мережі, яким притаманна наявність множини джерел та стоків потоків кореспонденцій (продуктів чи вимог). Під кореспонденцією розуміють пару різних вузлів мережі, між якими є спрямований дискретний потік елементів заданої величини, наприклад, неподільних вантажів уніфікованого розміру. У багатопродуктовій мережі кожен вузол може обмінюватися кореспонденціями з іншими вузлами. Кореспонденції можуть бути задані, наприклад, матрицею дискретних потоків, в якій рядки відповідають вузлам-джерелам, стовпці — вузлам-стокам, а елементи матриці визначають величину кореспонденцій. У магістральній мережі транспортування всіх кореспонденцій має здійснюватись транспортними засобами у транспортних блоках (контейнерах, плівковій упаковці, на піддонах) заданого розміру. Розмір транспортного блоку вимірюють кількістю одиниць кореспонденцій, яка у нього вміщується. Перед транспортуванням вантажі в магістральних вузлах транспортної мережі розсортовують за адресами їхньої доставки в сортувальних центрах, а потім упаковують в транспортні блоки.

У [12] розглянуто узагальнену задачу пакування та розподілу потоків кореспонденцій в ієрархічній мережі, розв'язання якої здійснено у кілька етапів. На першому етапі розв'язують задачу вибору ієрархічної структури магістральної мережі та схеми сортування кореспонденцій у вузлах мережі, а також їхнього пакування у транспортні блоки [13–15]. На другому етапі постає задача розподілу та маршрутизації потоків транспортних блоків зі збірними вантажами, які були сформовані під час розв'язання першої задачі [16, 17]. Під збірними вантажами, як і раніше, розуміють об'єднані в один транспортний блок тарно-штучні вантажі з різними адресами призначення, які можуть не збігатися з адресою призначення транспортного блоку. Збірні вантажі створюють для максимального скорочення кількості транспортних блоків і транспортних засобів, необхідних для їхнього пакування та транспортування у магістральній мережі.

Зазвичай у математичних моделях, що описують процеси оброблення та транспортування багатопродуктових потоків, витрати пов'язують з величиною потоку по дугах мережі або шляхах передачі потоку. Для мереж передачі даних, де дуги асоціюються з каналами зв'язку, ці постановки виявляються досить прийнятними. У разі транспортних мереж дуже важко адекватно визначити функції транспортних витрат, а отже, отримати в результаті розв'язання задачі достовірну відповідь. У математичній моделі NP-складної задачі розподілу та маршрутизації потоків транспортних блоків, наведеній у [16], обсяги та шляхи розподілу потоків пов'язано з множиною шуканих «оптимальних» маршрутів транспортних засобів або каналів зв'язку. Ця постановка задачі є характерною для проєктування нової або реконструкції наявної мережі перевезень або передачі даних. У цьому випадку для кожного маршруту, визначеного в результаті її розв'язання, легко розрахувати необхідні витрати (наприклад, наведені середньорічні витрати) та отримати більш достовірну оцінку транспортних витрат для всієї мережі. Якщо транспортні послуги надають сторонні транспортні підприємства (компанії) або провайдери мережі передачі даних, то задача розподілу та маршрутизації потоків спрощується, оскільки як функції транспортних витрат можна використовувати тарифи на перевезення або передачу одного транспортного блоку від відправника до одержувача [18].

Метою роботи є побудова математичної моделі задачі маршрутизації транспортних блоків зі збірними вантажами у разі використання заданих тарифів на транспортування та оброблення потоків. Розглянуто мережеве формулювання задачі із заданими тарифами на дугах та у вузлах, а також її постановку у вигляді задачі цілочислового лінійного програмування (ЦЛП) з блочною структурою, зв'язувальними обмеженнями та додатковими обмеженнями на час доставки окремих вантажів одержувачу. Підкреслено особливості розв'язання задачі з використанням відомих методів ЦЛП і пакетів прикладних програм.

Розглянемо змістовну постановку задачі. Нехай задано неорієнтовану мережу $G(N, P)$ з множиною вузлів N, $n = |N|$ і множиною ребер P, $p = |P|$, де n і p — кількість вузлів і ребер мережі відповідно, а $|\cdot|$ — знак потужності множини. На мережі з n вузлами задано цілочислові матриці вихідних $A = \| a_{ij} \|_{n \times n}$ і перетворених $A' = \| a'_{ij} \|_{n \times n}$ (отриманих після розв'язання задачі пакування транспортних блоків [13]) потоків кореспонденцій (окремих та збірних вантажів) і транспортних блоків $\widetilde{A} = \| \widetilde{a}_{ij} \|_{n \times n}$, $\widetilde{a}_{ij} = \left\lceil \dfrac{a'_{ij}}{\omega} \right\rceil$, де ω — розмір транспортного блоку, $\lceil \cdot \rceil$ — знаки заокруглення числа до більшого цілого, а a_{ij}, a'_{ij} і $\widetilde{a}_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, — відповідно величина потоку з вузла джерела i у вузол стоку j в одиницях вимірювання кореспонденцій і транспортних блоків.

Транспортування потоків у магістральній мережі з вузлів джерел у вузли стоку здійснюється тільки у транспортних блоках, при цьому у транспортні блоки можуть бути упаковані кореспонденції, адреси призначення яких не збігаються з адресами призначення транспортних блоків. Задача оптимізації пакування полягає в об'єднанні кількох вихідних з кожного вузла потоків з різними адресами призначення у спільні транспортні блоки розміру $\omega >> a_{ij}$ [19]. Під час розв'язання задачі деякі потоки можуть кілька разів об'єднуватися в різних вузлах з іншими потоками, тому необхідно мати таку структуру даних, яка давала б змогу ефективно запам'ятовувати і визначати вузли об'єднання та об'єднані потоки для всіх пар, що кореспондуються. У процесі розв'язання задачі пакування над потоками a_{ij} ітеративно виконуються такі перетворення:

$$a'_{ik} \leftarrow a_{ik} + a_{ij}, \; a'_{kj} \leftarrow a_{kj} + a_{ij}, \; c_{ij} \leftarrow k, \; a_{ij} \leftarrow 0. \tag{1}$$

При цьому передбачається, що кожен потік може бути упакований у транспортний блок лише повністю. Де $\leftarrow$ знак операції привласнення; k — вузол, через який виконується перетворення; c_{ij} — елементи довідкової матриці об'єднання потоків $C = \| c_{ij} \|_{n \times n}$, які визначаються так:

$$c_{ij} = \begin{cases} k, & \text{якщо потік } a_{ij} \text{ об'єднується з потоком } a_{ik}, \\ i, & \text{якщо потік } a_{ij} \text{ безпосередньо направляється у вузол } j, \\ 0, & \text{якщо } i = j. \end{cases} \tag{2}$$

Матрицю C використовують для відновлення послідовності вузлів мережі, в яких здійснюється транзитне сортування потоків a_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$. Особливістю задачі оптимізації пакування є обмеження $t_{ij} \leq T_{ij}$ на час доставки кореспонденцій кінцевим одержувачам та обмеження $\nu_{ij} \leq \nu_{\max}$ на максимально допустиму кількість об'єднань кореспонденцій з іншими кореспонденціями. Під час розв'язання задачі пакування розраховують лише попередні значення t_{ij}, оскільки до розв'язання задачі розподілу та маршрутизації потоків транспортних блоків невідомі фактичні шляхи проходження кореспонденцій від відправників до одержувачів. Отже, на вхід задачі розподілу і маршрутизації потоків транспортних блоків надходить матриця попередніх оцінок часу доставки кореспонденцій одержувачам $T = \| T_{ij} \|_{n \times n}$, елементи якої виступають як початкові обмеження на час доставки.

Для розрахунку часу доставки потоків окремих вантажів одержувачу потрібно визначити послідовність $\Omega_{ij} = \{(i, k_1), (k_1, k_2), \ldots, (k_m, j)\}$ з проміжними вузлами $\{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$, в яких виконується додаткове сортування кожного з потоків a_{ij}, та загальну кількість цих вузлів $\nu_{ij} = |\{k_1, k_2, \ldots, k_m\}|$. До того ж під час вибору чергового потоку a_{ij} для перетворення (1) може виникнути потреба у знаходженні множини інших потоків $\{a^*_{ij}\}$, які вже об'єдналися з потоком a_{ij} на попередніх ітераціях. Елементи матриці A' визначають так:

$$a'_{ij} =$$

$$= \begin{cases} a_{ij} + \text{сума потоків з } \{a^*_{ij}\}, & \text{якщо потоки } \{a^*_{ij}\} \text{ об'єднані з потоком } a_{ij}, \\ 0, & \text{якщо потік } a_{ij} \text{ об'єднаний з іншим потоком або } i = j. \end{cases}$$

Доведено такі твердження [20].

Теорема 1. Для будь-кого $a_{ij} \in \{a_{ij} \,|\, c_{ij} \neq i, c_{ij} \neq 0\}$ побудова матриці C відповідно до (2) дає змогу знайти послідовність Ω_{ij} і встановити кількість додаткових оброблень потоку a_{ij}.

Показано, що визначення Ω_{ij} зводиться до побудови бінарного дерева з коренем у вершині (i, j) та подальшого проходження у його глибину.

Лема 1. Листя бінарного дерева, побудованого проходженням у глибину з використанням елементів матриці C, породжує послідовність Ω_{ij} під час їхнього перегляду зліва направо.

На підставі теореми 1 і леми 1 розроблено алгоритм побудови та проходження бінарного дерева, в якому піддерева генеруються в порядку їхнього перегляду (Додаток 1, Алгоритм Д1).

У роботі з довідковою матрицею об'єднання потоків під час вибору чергового потоку a_{ij} для перетворення (1) може виникнути потреба у знаходженні множини інших потоків $\{a^*_{ij}\}$, які вже були об'єднані з потоком a_{ij} на попередніх ітераціях, оскільки перетворення потоку a_{ij} призводить до збільшення часу доставки потоку одержувачеві не лише для a_{ij}, але і для множини $\{a^*_{ij}\}$. Виявляється, що для визначення множини $\{a^*_{ij}\}$ для будь-якого a_{ij} достатньо скористатися довідковою матрицею C, сформованою згідно з (2).

Теорема 2. Для будь-якого потоку a_{ij}, над яким виконується перетворення (1), множина $\{a^*_{ij}\}$ може бути визначена з довідкової матриці C.

Показано, що задача визначення $\{a^*_{ij}\}$ є еквівалентною побудові деякого дерева пошуку та проходження його знизу вгору. На підставі доведених тверджень побудовано рекурсивний алгоритм, що здійснює побудову дерева вичерпного пошуку для визначення множини $\{a^*_{ij}\}$ (Додаток 1, Алгоритм Д2).

Повернемося до постановки задачі маршрутизації. Нехай $G(N, P)$ — мультимережа з $|N| = n$ вузлами і $|P| = l$, $l \leq Q(n^2 - n)$, орієнтованими дугами, де Q — кількість транспортних підприємств, що надають послуги транспортування транспортних блоків із вузлів i у вузли j, $i, j \in N$. Не втрачаючи загальності, можемо припустити, що всі транспортні підприємства можуть надавати послуги транспортування потоків між усіма парами вузлів у мережі. Для всіх Q підприємств, $k = 1, 2, \ldots, Q$, задано тарифи $C^{\alpha\beta}_{tr,k}$ на транспортування одиниці потоку та обмеження $W^k_{\alpha\beta}$ на провізні можливості з вузла α у вузол β, $\alpha, \beta = \overline{1, n}$, $\alpha \neq \beta$. Для вузлів мережі задано тарифи C^{α}_{load} на оброблення одиниці потоку та обмеження b_α на величину транзитного потоку у вузлі α, $\alpha = \overline{1, n}$. Транспортні тарифи $C^{\alpha\beta}_{tr,k}$ і тарифи на оброблення транспортних блоків у вузлах мережі C^{α}_{load} мають бути приведені до однієї цінової шкали для періодів тактичного планування процесу розв'язання задачі маршрутизації. До того ж задано обмеження $t_{ij} \le T_{ij}$ на час доставки одержувачу окремих вантажів з i в j, $ij \in S$, де S — множина індексів потоків ij, що кореспондуються.

Нехай $u^{\alpha\beta}_{ij,k}$ — невідомий потік транспортних блоків з i в j, що проходить по дузі $\alpha\beta \in \{q_k\}$, де $\{q_k\}$ — множина дуг k-го підприємства, $|\{q_k\}| \le n^2 - n$. Потрібно мінімізувати витрати на транспортування та оброблення транспортних блоків за всіх заданих обмежень, тобто, знайти мінімум функції

$$\sum_{k=1}^{Q} \sum_{\alpha\beta \in \{q_k\}} C^{\alpha\beta}_{tr,k} \cdot \left(\sum_{ij \in S} u^{\alpha\beta}_{ij,k} \right) + \sum_{\alpha=1}^{n} C^{\alpha}_{load} \cdot \left(\sum_{k=1}^{Q} \sum_{\substack{\beta=1,\\ \beta\ne\alpha}}^{n} \sum_{ij \in S} (u^{\alpha\beta}_{ij,k} + u^{\beta\alpha}_{ij,k}) \right) \tag{3}$$

за обмежень

$$\sum_{k=1}^{Q} \sum_{\substack{\beta=1,\\ \beta\ne\alpha}}^{n} u^{\alpha\beta}_{ij,k} - \sum_{k=1}^{Q} \sum_{\substack{\beta=1,\\ \beta\ne\alpha}}^{n} u^{\beta\alpha}_{ij,k} = \begin{cases} \tilde{a}_{ij} & \text{для } i = \alpha; \\ 0 & \text{для } i \ne \alpha,\ j \ne \alpha;\ \alpha = \overline{1, n},\ ij \in S, \\ -\tilde{a}_{ij} & \text{для } j = \alpha, \end{cases} \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{Q} \sum_{\substack{\beta=1,\\ \beta\ne\alpha}}^{n} \sum_{ij \in S} (u^{\alpha\beta}_{ij,k} + u^{\beta\alpha}_{ij,k}) - \sum_{\substack{j=1,\\ j\ne\alpha}}^{n} (\tilde{a}_{\alpha j} + \tilde{a}_{j\alpha}) \le 2b_{\alpha},\ \alpha = \overline{1, n}, \tag{5}$$

$$\sum_{ij \in S} u^{\alpha\beta}_{ij,k} \le W^{k}_{\alpha\beta} \quad \forall \alpha\beta \in \{q_k\},\ k = \overline{1, Q}, \tag{6}$$

$$u^{\alpha\beta}_{ij,k} \ge 0 \text{ — цілі числа}, \tag{7}$$

за обмежень

$$t_{ij} \le T_{ij},\ ij \in S, \tag{8}$$

на час доставки окремих вантажів a_{ij} одержувачу.

У конкретних випадках до зазначених обмежень можуть бути додані обмеження на заборону розгалуження потоків:

$$u^{\alpha\beta}_{ij,k} = \begin{cases} \tilde{a}_{ij}, & \text{якщо потік проходить по дузі } \alpha\beta \in \{q_k\}, \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Задача (3)–(7) максимально містить до $n(n^2 - n) + n + Q(n^2 - n) + Q(n^2 - n)^2 = Q(n^2 - n)[(n^2 - n) + 1] + n(n^2 - n) + n$ обмежень ((4)+(5)+(6)+(7)) і до $Q(n^2 - n)^2$ змінних. Легко бачити, що обмеження (4) можна записати у вигляді

$$\sum_{k=1}^{Q} \sum_{\substack{\beta=1,\\ \beta\ne\alpha}}^{n} \sum_{ij \in S} u^{\alpha\beta}_{ij,k} - \sum_{\substack{m=1,\\ m\ne\alpha}}^{n} \tilde{a}_{\alpha m} = \sum_{k=1}^{Q} \sum_{\substack{\beta=1,\\ \beta\ne\alpha}}^{n} \sum_{ij \in S} u^{\beta\alpha}_{ij,k} - \sum_{\substack{m=1,\\ m\ne\alpha}}^{n} \tilde{a}_{m\alpha},\ \alpha = \overline{1, n},$$

а для обмежень (5) спростити запис:

$$\sum_{k=1}^{Q} \sum_{\substack{\beta=1,\\ \beta\ne\alpha}}^{n} \sum_{ij \in S} u^{\alpha\beta}_{ij,k} - \sum_{\substack{m=1,\\ m\ne\alpha}}^{n} \tilde{a}_{\alpha m} \le b_{\alpha},\ \alpha = \overline{1, n}.$$

Тоді максимальна кількість обмежень задачі скоротиться до $Q(n^2 - n) \times [(n^2 - n) + 1] + 2n$.

ПОЛІНОМІАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЗАДАЧІ З ТАРИФАМИ ДО ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Перетворимо (за Карпом [21]) задачу з тарифами (3)–(7) у цілочислову задачу лінійного програмування з блочною структурою і зв'язувальними обмеженнями, коли матрицею коефіцієнтів обмежень виступає матриця інцидентності «вузли–дуги» орієнтованого графу. Для цього розглянемо розширену мережу $\widetilde{G}(\widetilde{N},\widetilde{P})$, в якій кожен вузол мережі G замінений двома — лівим і правим, причому кожна пара вузлів «лівий–правий» у мережі $\widetilde{G}$ мають номери i та $i+n$, де i — номер вузла в мережі G (рис. 1). Усі дуги, що входять у вузол мережі G, замінюють на дуги, що входять у лівий вузол мережі $\widetilde{G}$; дуги, що виходять з вузла мережі G, замінюють на дуги, що виходять із правого вузла мережі $\widetilde{G}$.

Кожен лівий і правий вузли мережі $\widetilde{G}$ з'єднуються фіктивною дугою, вартість транспортування одиниці потоку по якій є вартістю оброблення одиниці потоку в розщепленому вузлі. На мережі $\widetilde{G}$ джерелами потоків виступають ліві вузли, а стоками — праві. Нехай $\widetilde{n}=n+n$ — кількість вузлів розширеної мережі, $\widetilde{l}\le Q(n^2-n)+n$ — кількість її дуг.

Для формулювання задачі визначимо такі матриці і вектори. Складемо матрицю інцидентності $E=\|e_{ij}\|_{\widetilde{n}\times\widetilde{l}}$ «вузли–дуги» для розширеної мережі так, щоб перші n її рядків відповідали номерам вузлів джерел (лівим вузлам), а перші n стовпців — фіктивним дугам. Інші n рядків матриці E відповідають вузлам-стокам (правим вузлам), а $\widetilde{l}-n$ стовпців — заданим дугам. Матриця E має вигляд, наведений на рис. 2.

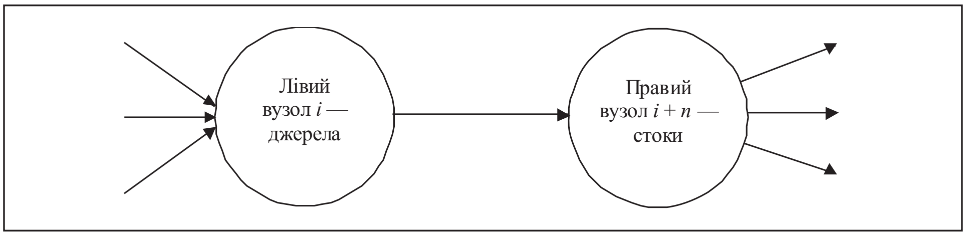

Рис. 1. Фрагмент розширеної мережі $\widetilde{G}$

		Дуги						
		1	…	…	n	$n+1$	…	$\widetilde{l}$
Вузли джерела	1	-1	0	…	0	{1, 0}	…	{1, 0}
	…	0	-1	…	0	{1, 0}	…	{1, 0}
	…	0	…	-1	0	{1, 0}	…	{1, 0}
	n	0	…	0	-1	{1, 0}	…	{1, 0}
Вузли-стоки	$n+1$	1	0	…	0	{–1, 0}	…	{–1, 0}
	…	0	1	…	0	{–1, 0}	…	{–1, 0}
	…	0	…	1	0	{–1, 0}	…	{–1, 0}
	$2n$	0	…	0	1	{–1, 0}	…	{–1, 0}

Рис. 2. Структура матриці інцидентності

У кожному стовпці матриці є тільки два ненульові елементи з протилежними знаками, а фігурні дужки означають, що елемент матриці може набувати тільки одне з двох значень. Цю матрицю використовуватимемо для запису умов збереження потоків у вузлах мережі. Елементи матриці є такими:

$$e_{ij}=\begin{cases}1, & \text{якщо дуга } j \text{ направлена до вузла } i,\\ -1, & \text{якщо дуга } j \text{ направлена від вузла } i,\\ 0 & \text{в іншому випадку.}\end{cases}$$

Нехай $V^i=||v^i_\xi||^{\mathrm{T}}_{\tilde{n}}$ — вектори-стовпці $v^i_1, v^i_2, \ldots, v^i_{\tilde{n}}$ потреб вузлів у потоках $\tilde{a}_{ij}$, $j=\overline{1,n}$, $i\neq j$, що виходять з вузлів $i=\overline{1,n}$, де знак Т означає транспонування, а

$$v^i_\xi=\begin{cases}-\sum\limits_{m=1}^{n}\tilde{a}_{im}, & \text{якщо } \xi=i,\\ \tilde{a}_{ij}, & \text{якщо } \xi=j+n,\\ 0 & \text{в іншому випадку,}\\ \quad i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n},\ \xi=\overline{1,\tilde{n}}.\end{cases}$$

Уведемо змінні $X^i=||x^i_\mu||^{\mathrm{T}}_{\tilde{l}}$ — вектори-стовпці невідомих потоків $x^i_1, x^i_2, \ldots$ $\ldots, x^i_{\tilde{l}}$ по дугах мережі $\mu=\overline{1,\tilde{l}}$, від вихідних потоків з вузлів i, $i=\overline{1,n}$. Тоді умови збереження потоків для усіх потоків, що виходять з вузла i, можна записати у вигляді

$$E[\tilde{n},\tilde{l}\,]X^i[\tilde{l}\,]=V^i[\tilde{n}],\ i=\overline{1,n}.$$

Для запису обмежень на пропускні спроможності вузлів і дуг мережі визначимо вектори-стовпці $B=||b_i||^{\mathrm{T}}_{\tilde{l}}$ і $F=||f_i||^{\mathrm{T}}_{\tilde{l}}$, де b_i і f_i, $i=\overline{1,\tilde{l}}$, — суть цілі ненегативні числа. У векторі B перші n елементів зберігають значення обмежень на оброблення транзитних потоків у вузлах мережі, а в інших $\tilde{l}-n$ елементах записані значення обмежень на провізні можливості транспортних підприємств. Вектор F формують у такий спосіб: $F=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}(\tilde{a}_{1j}+\tilde{a}_{j1}),\ldots,\sum\limits_{j=1}^{n}(\tilde{a}_{nj}+\tilde{a}_{jn}),0,\ldots,0\right)^{\mathrm{T}}$ і містить n перших ненульових значень і $\tilde{l}-n$ нулів з позиції $n+1$.

Нехай $C^i=||c^i_j||_{\tilde{l}}$, $i=\overline{1,n}$, — вектори-рядки, в яких перші n елементів $c^i_1,\ldots,c^i_n$ визначають тарифи на оброблення одиниці потоку у вузлах мережі з номерами $1,\ldots,n$, а інші елементи $c^i_{n+1},\ldots,c^i_{\tilde{l}}$ визначають тарифи на транспортування одиниці потоку по дугах з номерами від $n+1$ до $\tilde{l}$. Не втрачаючи загальності, припустимо, що тарифи на транспортування одного транспортного блоку не залежать від джерела потоку (усі потоки є однорідними, тобто усі транспортні блоки мають однаковий розмір) і для транспортного підприємства k, $k=\overline{1,Q}$, визначаються тільки вузлом відправлення i та вузлом призначення j. Покладемо $C^i=C$, $i=\overline{1,n}$, і формуватимемо тільки один вектор-рядок тарифів. Тарифи на оброблення одного транспортного блоку не пов'язані з транспортними підприємствами та можуть відрізнятися для різних типів вузлів мережі.

Остаточно сформульована задача набуде такого вигляду: знайти

$$\min C[\tilde{l}\,]\cdot\sum_{i=1}^{n}X^i[\tilde{l}\,], \tag{9}$$

за обмежень
$$\sum_{i=1}^{n} X^i[\widetilde{l}\,] - F[\widetilde{l}\,] \le B[\widetilde{l}\,], \tag{10}$$

$$E[\widetilde{n}, \widetilde{l}\,] X^i[\widetilde{l}\,] = V^i[\widetilde{n}], \; i = \overline{1, n}, \tag{11}$$

$$X^i[\widetilde{l}\,] \ge 0, \; i = \overline{1, n}, \text{ і цілі}, \tag{12}$$

та додаткових обмежень на час доставки кореспонденцій одержувачеві (8).

Обмеження на заборону розгалуження потоків запишемо у вигляді
$$x_\mu^i = \sum_{j=\overline{1,n}} \widetilde{a}_{ij}, \text{ якщо } \widetilde{a}_{ij} \text{ проходить по дузі } \mu, \; i = \overline{1, n}, \; \mu = \overline{1, \widetilde{l}}.$$

Задача (9)–(12) містить $2n+1$ векторних обмежень і до $(Q(n^2-n)+n)\cdot n$ змінних. Порівняно із задачею (3)–(7) вона максимально містить до $n + Q(n^2-n) + $ $+ n(n + Q(n^2-n)) + n(n + Q(n^2-n)) = Q(n^2-n)(2n+1) + 2n^2 + n << Q(n^2-n) \times$ $\times [(n^2-n)+1] + 2n$ невекторних обмежень (10)–(12). Так, наприклад, для $Q=10$ і $n=100$ у задачі (3)–(7) може бути до 9801000000 ($\sim 10\cdot 10^9$) змінних і до 980199200 ($\sim 1\cdot 10^9$) обмежень, а в задачі (9)–(12) — до 9910000 ($\sim 10\cdot 10^6$) змінних і до 19919100 ($\sim 20\cdot 10^6$) обмежень.

Відомо, що обидві задачі (3)–(7) і (9)–(12) є NP-складними, оскільки їхні відповідні задачі розпізнавання є NP-повними [21, 22]. Покажемо, що будь-яку індивідуальну задачу розпізнавання (3)–(7) (тобто задачу з відповіддю «так» чи «ні») можна перетворити в індивідуальну задачу розпізнавання (9)–(12) за поліноміальний час. Для цього наведемо один з можливих способів формування за вхідними даними задачі (3)–(7) матриці інцидентності $E[\widetilde{n}, \widetilde{l}\,]$, векторів збереження потоків $V^i[\widetilde{n}]$, $i = \overline{1, n}$, вектора тарифів C і векторів $F[\widetilde{l}\,]$ і $B[\widetilde{l}\,]$ для задачі (9)–(12).

Нехай $A = \| a_{ij} \|_{n\times n}$ і тривимірна $D = \| d_{ijk} \|_{n\times n\times Q}$ — цілочислові матриці потоків і тарифів Q підприємств. Підматриця $D = \| d_{ijk} \|_{n\times n\times 1}$ на головній діагоналі містить тарифи на оброблення одиниці потоку у відповідному вузлі, головні діагоналі підматриць для $k = 2, 3, \ldots, Q$ містять нулі. Всі інші елементи d_{ijk} матриці D містять тарифи на транспортування одиниці потоку з i у j підприємства k, $i, j = \overline{1, n}$, $i \ne j$, $k = \overline{1, Q}$. Якщо підприємство k не надає послуги транспортування з i у j, то $d_{ijk} = 0$, а відповідна дуга з i у j для підприємства k відсутня. Задано також тривимірну цілочислову матрицю $W = \| w_{ijk} \|_{n\times n\times Q}$ провізних можливостей Q підприємств у тих самих одиницях вимірювання потоку — транспортних блоках. Підматриця $W = \| w_{ijk} \|_{n\times n\times 1}$ на головній діагоналі містить задані значення обмежень на пропускні спроможності вузлів з оброблення транзитних потоків, головні діагоналі підматриць для $k = 2, 3, \ldots, Q$ містять нулі. Інші елементи w_{ijk} матриці W містять задані значення обмежень на провізні можливості підприємств з i у j, $i, j = \overline{1, n}$, $i \ne j$, $k = \overline{1, Q}$. Усі ненульові і нульові елементи матриці W строго відповідають ненульовим і нульовим елементам матриці D і навпаки.

Наведемо алгоритм формування вхідних даних для індивідуальної задачі (9)–(12).

Алгоритм 1. Перетворення задачі та формування $E[\widetilde{n}, \widetilde{l}\,]$, $V^i[\widetilde{n}]$, $i = \overline{1, n}$, C, $F[\widetilde{l}\,]$, $B[\widetilde{l}\,]$

1. $E \leftarrow 0$; $V \leftarrow 0$; $F \leftarrow 0$; $l \leftarrow 0$.
2. Для $\{i \mid i = \overline{1, n}\}$ виконати пп. 3–17.

3. $s \leftarrow 0$.
4. Для $\{j \mid j = \overline{1, n}\}$ виконати пп. 5–16.
5. $f_i \leftarrow f_i + a_{ij} + a_{ji}$.
6. Якщо $i \neq j$, то перейти до п. 7, в іншому разі перейти до п. 12.
7. $v_{j+n,i} \leftarrow a_{ij}$.
8. Для $\{k \mid k = \overline{1, Q}\}$ виконати пп. 9–11.
9. Якщо $d_{jik} \neq 0$, то перейти до п. 10, в іншому разі перейти до п. 11.
10. $l \leftarrow l+1$; $e_{i,n+l} \leftarrow 1$; $e_{j+n,n+l} \leftarrow -1$; $c_{n+l} \leftarrow d_{jik}$; $b_{n+l} \leftarrow w_{jik}$.
11. Перейти до п. 8. Кінець циклу за k
12. Для $\{m \mid m = \overline{1, n}\}$ виконати пп. 13, 14.
13. $s \leftarrow s + a_{im}$.
14. Перейти до п. 12. Кінець циклу за m
15. $v_{i,i} \leftarrow -s$; $e_{i,j} \leftarrow -1$; $e_{i+n,j} \leftarrow 1$; $c_i \leftarrow d_{ij1}$; $b_i \leftarrow w_{ij1}$.
16. Перейти до п. 4. Кінець циклу за j
17. Перейти до п. 2. Кінець циклу за i
18. Кінець алгоритму.

У записі алгоритму вектори $V^i[\tilde{n}]$, $i = \overline{1, n}$, представлені матрицею $V = \| v_{ij} \|_{\tilde{n} \times n}$.

З алгоритму видно, що часова складність перетворення будь-якої індивідуальної задачі (3)–(7) в індивідуальну задачу (9)–(12) становить у гіршому випадку $O[n((n-1)Q + n)] = O[(Q+1)n^2 - Qn]$.

Сформулюємо основний результат у вигляді такої теореми.

Теорема 3. Будь-яка індивідуальна задача (3)–(7) може бути перетворена в індивідуальну задачу цілочислового лінійного програмування (9)–(12) за поліноміальний час $O[(Q+1)n^2 - Qn]$.

Доведення. Аналіз кроків 2–17 алгоритму 1 робить прозорим доведення теореми, оскільки він коректно перетворює вхідні дані будь якого екземпляра задачі (3)–(7) у вхідні данні задачі (9)–(12), а саме коректно формує $E[\tilde{n}, \tilde{l}\,]$, $V^i[\tilde{n}]$, $i = \overline{1, n}$, C, $F[\tilde{l}\,]$, $B[\tilde{l}\,]$ з матриць A, D і W, які повністю визначають мережеві потоки та структуру орієнтованої мультимережі $G(N, P)$ з $|N| = n$ вузлами і $|P| = l \leq Q(n^2 - n)$ дугами.

Наслідок 1. Якщо існує допустимий (не обов'язково оптимальний) розв'язок початкової задачі (3)–(7), то він збігається з розв'язком перетвореної задачі (9)–(12).

ВИСНОВКИ

У статті розглянуто задачу маршрутизації потоків збірних вантажів у багатопродуктовій транспортній мережі із заданими тарифами й обмеженнями на пропускну спроможність дуг, вузлів та час доставки окремих вантажів. Доведено теорему про те, що будь-яку індивідуальну задачу в мережевій постановці можна за поліноміальний час перетворити в індивідуальну задачу цілочислового лінійного програмування з блочною структурою та зв'язувальними обмеженнями, коли матрицею коефіцієнтів є матриця інцидентності «вузли–дуги» орієнтованого графу. Векторно-матричний запис задачі дає змогу використовувати програмно-апаратну архітектуру CUDA (Compute Unified Device Architecture) паралельних обчислень на графічних процесорах GPU (Graphics Processing Unit) та значно (у перспективі у десятки та сотні разів) скоротити час її розв'язання [23, 24]. Для розв'язання перетвореної задачі без урахування обмежень на час доставки окремих вантажів одержувачу можна застосувати відомі методи та пакети програм, проте для встановлення меж їхньої ефективності та аналізу одержуваних розв'язків необхідно провести обчислювальний експеримент на загальнодоступних серверах, як-от: NEOS з мовами алгебраїчного моделювання AIMMS, AMPL, GAMS та розв'язувачами Gurobi, Linear Program Solver, Simplex OPTIMA, CPLEX, MINTO тощо.

Під час розв'язання задачі з урахуванням обмежень на час доставки окремих вантажів одержувачу наявні методи та пакети програм не можна застосувати безпосередньо. Потрібно провести додаткові дослідження щодо їхньої можливої модифікації та доопрацювання на основі запропонованого способу побудови довідкової матриці об'єднання потоків та ефективних алгоритмів, що дають змогу визначати вузли об'єднання й об'єднані потоки для всіх пар вузлів, що кореспондуються у багатопродуктовій мережі.

ДОДАТОК 1. АЛГОРИТМИ Д1 ТА Д2 ДЛЯ РОБОТИ З ДОВІДКОВОЮ МАТРИЦЕЮ

Підходи, використані під час доведення теореми 1 та леми 1, дають змогу розробити ефективний алгоритм побудови і проходження бінарного дерева, в якому піддерева генеруються в порядку їхнього перегляду. Нехай $St(\xi)$ — стек, обслуговуваний за правилом «останній прийшов — перший вийшов», де ξ — покажчик поточного розміщення стека; $F(m)$ — вектор, в якому формується послідовність вузлів $\{i, k_1, k_2, \ldots, k_m, j\}$; $\wedge$ — знак кон'юнкції (логічного «і»); $\vee$ — знак диз'юнкції (логічного «або»).

Алгоритм Д1. Побудова та проходження бінарного дерева

1. $m \leftarrow 1$; $F(m) \leftarrow i$.
2. $\xi \leftarrow 1$; $St(\xi) \leftarrow j$.
3. $k \leftarrow i$; $l \leftarrow j$.
4. Якщо $c_{kl} \neq k \wedge ((a_{kl} \neq 0 \wedge \xi = 1) \vee a_{kl} = 0)$, то виконати пп. 5–7, в іншому разі перейти до п. 8.
5. $\xi \leftarrow \xi + 1$.
6. $St(\xi) \leftarrow c_{kl}$.
7. $l \leftarrow c_{kl}$; перейти до п. 4.
8. $m \leftarrow m + 1$.
9. $F(m) \leftarrow l$.
10. Якщо $\xi > 1$, то перейти до п. 11, в іншому разі — до п. 14.
11. $k \leftarrow St(\xi)$.
12. $l \leftarrow St(\xi - 1)$.
13. $\xi \leftarrow \xi - 1$; перейти до п. 4.
14. $\nu_{ij} \leftarrow m - 2$.
15. Стоп.

У п. 4 алгоритму Д1 додаткову умову $((a_{kl} \neq 0 \wedge \xi = 1) \vee a_{kl} = 0)$ уведено для того, щоб обмежити зростання бінарного дерева у разі, якщо для знову знайденого підкореня (k, l) $a_{kl} \neq 0$. Після роботи алгоритму значення ν_{ij} дорівнює кількості транзитних вузлів від i до j, у яких виконується додаткове оброблення потоку a_{ij}.

Наведемо рекурсивну процедуру, що здійснює побудову дерева вичерпного пошуку для визначення множини $\{a_{ij}^*\}$.

Алгоритм Д2. Побудова дерева вичерпного пошуку

1. ВХІД (i, j) рекурсивний.
2. $k \leftarrow i$; $l \leftarrow j$.
3. Для $\{\xi \mid \xi = \overline{1, n}\}$ виконати пп. 4–14.
4. Якщо $c_{\xi l} = k \wedge a_{\xi l} = 0$, то перейти до п. 5, в іншому разі — до п. 9.
5. $\{a_{ij}^*\} \leftarrow \{a_{ij}^*\} \cup a_{\xi l}$. Використовуючи алгоритм 1, визначити $\Omega_{\xi l}$ і $\nu_{\xi l}$.

6. Розрахувати $t_{\xi l}$.
7. Якщо $(t_{\xi l} > T_{\xi l} \vee \nu_{\xi l} > \nu_{\max})$, то $\eta \leftarrow \eta + 1$.
8. Викликати ВХІД (ξ, l).
9. Якщо $c_{k\xi} = l \wedge a_{k\xi} = 0$, то перейти до п. 10, в іншому разі — до п. 14.
10. $\{a_{ij}^*\} \leftarrow \{a_{ij}^*\} \cup a_{k\xi}$. Використовуючи алгоритм 1, визначити $\Omega_{k\xi}$ і $\nu_{k\xi}$.
11. Розрахувати $t_{k\xi}$.
12. Якщо $(t_{k\xi} > T_{k\xi} \vee \nu_{k\xi} > \nu_{\max})$, то $\eta \leftarrow \eta + 1$.
13. Викликати ВХІД (k, ξ).
14. Перейти до п. 3.
15. ВИХІД.

У пп. 4 і 9 уведено додаткові умови $a_{\xi l} = 0$ і $a_{k\xi} = 0$ для випадку, коли в матриці C є елементи $c_{ij} = k$, $k \neq j$, а потоки, що їм відповідають, $a_{ij} \neq 0$, що може призвести до зациклення алгоритму. У наведеному алгоритмі k, l, ξ — рекурсивні змінні, для яких організовуються покоління даних у разі кожного нового входження у процедуру; $\cup$ — знак об'єднання множин; t_{ij} — розрахунковий час доставки потоків адресатові; ν_{ij} — кількість проміжних вузлів, в яких виконується додаткове оброблення відповідного потоку; $\nu_{\max}$ — допустима кількість додаткових оброблень; η — ознака порушення обмежень на заданий час доставки T_{ij} чи на кількість додаткових оброблень потоку $\nu_{\max}$. Значення η — це кількість цих порушень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Васянин В.А. Методология проектирования многопродуктовых коммуникационных сетей с дискретными потоками: дис. ... докт. техн. наук. 01.05.02. Киев, 2017. 497 с. URL: https://itgip.org/wp-content/uploads/2017/03/dis_Vas.pdf.
2. The freight story: A national perspective on enhancing freight transportation. Federal Highway Administration. 2005. Freight Management and Operations. URL: http://ops.fhwa.dot.gov/freight/freight_analysis/freight_story/.
3. US international trade and freight transportation trends. United States Department of Transportation: Bureau of Transportation Statistics. 2003. URL: http://www.bts.gov.
4. Barnhart C., Hane C.A., Vance P.H. Integer multicommodity flow problems. In: Network Optimization. Pardalos P.M., Hearn D.W., Hager W.W. (Eds.). *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. 1997. Vol. 450. P. 17–31. https://doi.org/10.1007/978-3-642-59179-2_2.
5. Barnhart C., Hane C.A., Vance P.H. Using branch-and-price-and-cut to solve origin-destination integer multicommodity flow problems. *Operations Research*. 2000. Vol. 48, N 2. P. 318–326. https://doi.org/10.1287/opre.48.2.318.12378.
6. Encyclopedia of optimization. Second Ed. Floudas C.A., Pardalos P.M. (Eds.). New York: Springer, 2009. 4626 p.
7. Wang I-L. Multicommodity network flows: a survey, part I: applications and formulations. International *Journal of Operations Research*. 2018. Vol. 15, N 4. P. 145–153. https://doi.org/10.6886/IJOR.201812_15(4).0001.
8. Wang I-L. Multicommodity network flows: a survey, part II: solution methods. International *Journal of Operations Research*. 2018. Vol. 15, N 4. P. 155–173. https://doi.org/10.6886/IJOR.201812_15(4).0002.
9. Cohn A., Root S., Wang A., Mohr D. Integration of the load matching and routing problem with equipment balancing for small package carriers. *Transportation Science*. 2007. Vol. 41, Iss. 2. P. 238–252. https://doi.org/10.1287/trsc.1060.0174.
10. Hellsten E., Koza D.F., Contreras I., Cordeau J.F., Pisinger D. The transit time constrained fixed charge multi-commodity network design problem. *Computers & Operations Research*. 2021. Vol. 136. 105511. https://doi.org/10.1016/j.cor.2021.105511.

11. Trivella A., Corman F., Koza D.F., Pisinger D. The multi-commodity network flow problem with soft transit time constraints: Application to liner shipping. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review.* 2021. Vol. 150. 102342. https://doi.org/10.1016/j.tre.2021.102342.
12. Trofymchuk O.M., Vasyanin V.A. Simulation of packing, distribution and routing of small-size discrete flows in a multicommodity network. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. Vol. 47, Iss. 7. P. 15–30. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i7.30.
13. Trofymchuk O.M., Vasyanin V.A., Kuzmenko V.N. Optimization algorithms for packing of small-lot correspondence in communication networks. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2016. Vol. 52, N 2. P. 258–268. https://doi.org/10.1007/s10559-016-9822-5.
14. Трофимчук А.Н., Васянин В.А. Компьютерное моделирование иерархической структуры коммуникационной сети с дискретными многопродуктовыми потоками. *УСиМ*. 2016. № 2. С. 48–57. https://doi.org/10.15407/usim.2016.02.048.
15. Трофимчук А.Н., Васянин В.А., Ушакова Л.П. Исследование задачи оптимизации иерархической структуры разреженной и плотной коммуникационной сети. *Проблемы управления и информатики.* 2021. № 1. С. 5–21.
16. Vasyanin V.A. Problem of distribution and routing of transport blocks with mixed attachments and its decomposition. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. Vol. 47, Iss. 2. P. 56–69. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i2.60.
17. Васянин В.А. Компьютерное моделирование распределения и маршрутизации дискретных многопродуктовых потоков в коммуникационной сети. *УСиМ*. 2016. № 3. С. 43–53. https://doi.org/10.15407/usim.2016.03.043.
18. Васянин В.А., Трофимчук А.Н., Ушакова Л.П. Экономико-математические модели задачи распределения потоков в многопродуктовой коммуникационной сети. *Математичне моделювання в економіці.* 2016. № 2. С. 5–21. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/131848.
19. Trofymchuk O.M., Vasyanin V.A., Kuzmenko V.N. Complexity of one packing optimization problem. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2016. Vol. 52, N 1. P. 76–84. https://doi.org/10.1007/s10559-016-9802-9.
20. Васянин В.А. Справочная матрица слияния потоков в задачах оптимизации упаковок на многопродуктовых сетях. *Системні дослідження та інформаційні технології.* 2014. № 3. С. 42–49. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/bitstream/handle/123456789/85552/05-Vasyanin.pdf?sequence=1.
21. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. Москва: Мир, 1982. 416 с.
22. Even S., Itai A., Shamir A. On the complexity of timetable and multicommodity flow problems. *SIAM J. Comput*. 1976. Vol. 5, Iss. 4. P. 691–703. https://doi.org/10.1137/0205048.
23. NVIDIA Developer. URL: https://developer.nvidia.com/cuda-zone.
24. Best Practices Guide (PDF) — v11.6.2 (older) — Last updated March 24, 2022. URL: https://docs.nvidia.com/cuda/pdf/CUDA_C_Best_Practices_Guide.pdf.

V.A. Vasyanin, O.M. Trofymchuk, L.P. Ushakova

THE PROBLEM OF GROUPAGE CARGO ROUTING IN A MULTICOMMODITY TRANSPORT NETWORK WITH GIVEN TARIFFS AND DELIVERY TIME CONSTRAINTS

Abstract. The paper considers a network formulation of the problem of optimizing the routing of groupage cargo flows in a transport network with given tariffs for the transportation and processing of flows and restrictions on the throughput of arcs, nodes and the time of delivery of individual goods to the recipient. To calculate the delivery time, a method is proposed for generating a reference matrix for combining the flows of individual cargoes and efficient algorithms that allow one to determine the nodes of the union and the combined flows for all corresponding pairs in a multi-commodity network. It is proved that the problem with tariffs in a network setting can be transformed in polynomial time to an integer linear programming problem with a block structure and binding constraints. Peculiarities of solving the transformed problem with the use of well-known methods of integer programming and application software packages are presented.

Keywords: mathematical models of flow distribution and routing in multicommodity networks, optimization problems with discrete flows and parameters.

Надійшла до редакції 02.05.2022