УДК 519.85

Т.В. БЄЛИХ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *krainaz@ukr.net.*

В.І. ЗОРКАЛЬЦЕВ
Лімнологічний інститут СО РАН, Іркутськ, Росія,
e-mail: *zork@isem.irk.ru.*

АЛГОРИТМИ ВНУТРІШНІХ ТОЧОК: ІСТОРІЯ СТВОРЕННЯ, РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ, ЗАСТОСУНКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ[1]

Анотація. Розглянуто низку алгоритмів внутрішніх точок для розв'язання задач лінійного програмування. Наведено результати їхнього теоретичного обґрунтування. Виокремлено підмножини алгоритмів, що мають лінійну, асимтотично незалежну від параметрів розв'язуваної задачі швидкість збіжності, підмножину алгоритмів, що приводять до відносно внутрішніх точок множини оптимальних розв'язків. Викладено історію створення та розвитку алгоритмів. Наведено нові модифікації алгоритмів внутрішніх точок, що містять як окремий випадок розроблені раніше алгоритми.

Ключові слова: лінійне програмування, лінійні нерівності, алгоритми внутрішніх точок.

ВСТУП

У цій статті розглядаються алгоритми розв'язання задач лінійного програмування, що здійснюють введення в область допустимих рішень та оптимізацію шляхом ітеративного поліпшення у множині векторів, що задовольняють обмеження-нерівності у строгій формі. Наводяться отримані результати з теоретичного обґрунтування алгоритмів. Зокрема виокремлюються підмножини алгоритмів, які мають лінійну і надлінійну швидкість збіжності, що асимптотично не залежить від вихідних даних розв'язуваної задачі.

Основна мета статті полягає у викладі нового типу алгоритмів внутрішніх точок з неоднозначним заданням напрямку коригування розв'язку на кожній ітерації. Напрямки коригування визначаються як множина векторів, що залежать від параметра, і конкретизуються на етапі обчислення кроку коригування. Наводяться результати експериментальних досліджень нових варіантів алгоритмів на тестових прикладах. Результати обчислень показують, що запропоновані нові варіанти алгоритмів дають змогу отримувати оптимальні розв'язки значно швидше, ніж алгоритми внутрішніх точок, що використовувалися раніше.

КОРОТКА ІСТОРІЯ СТВОРЕННЯ І РОЗВИТКУ АЛГОРИТМІВ ВНУТРІШНІХ ТОЧОК

Вихідним імпульсом створення алгоритмів, що розглядаються, була ідея способу визначення двоїстих оцінок із неоптимального плану задачі лінійного програмування апроксимацією методом найменших квадратів умови доповнювальної нежорсткості (Л.В. Канторович, 1965 р.). На ґрунті цієї ідеї у 1967 р. було створено алгоритм І.І. Дікіна розв'язання задач лінійного та квадратичного програмування. Проведені І.І. Дікіним разом з С.М. Анцизом в Інституті математики СО АН СРСР експериментальні дослідження дали змогу виявити ефективний варіант алгоритмів та показали його хороші обчислювальні перспективи.

У 1972 р. І.І. Дікін у своїй кандидатській дисертації описав алгоритм, його геометричні інтерпретації, результати експериментальних досліджень та теоретичного обґрунтування. А саме було доведено, що під час оптимізації в області

[1]Стаття рекомендована до публікації програмним комітетом 7-ї Міжнародної наукової конференції «Математичне моделювання, оптимізація та інформаційні технології (ММОТІ-2021)».

допустимих розв'язків невироджених задач лінійного програмування алгоритм з лінійною швидкістю збіжності приводить до оптимального розв'язку з мінімальним набором активних обмежень, тобто до відносно внутрішньої точки множини оптимальних розв'язків. Це є важливою особливістю розглядуваних алгоритмів.

Науковим керівником був академік, лауреат Нобелівської премії з економіки Л.В. Канторович. Опонували відомі російський учений В.Л. Макаров та український вчений Н.З. Шор [1, 2].

Доречно зазначити, що згідно з геометричною інтерпретацією алгоритму, запропонованою І.І. Дікіним, у процесі ітеративного переходу здійснюється заміна умов-нерівностей для змінних умовою належності наступного розв'язку ітеративно змінного еліпсоїда. У цьому є ідейний зв'язок з методом еліпсоїдів Шора, створеним та розвинутим, зокрема, П.І. Стецюком [3, 4] в Інституті кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. З 70-х років цей метод активно розвивався лише російськими математиками (Ю.Г. Євтушенко, В.І. Зоркальцев, В.Г. Жадан). Цей метод почали активно застосовувати під час реалізації низки моделей економіки та енергетики [5].

Підвищений інтерес до цих алгоритмів виник після розроблення в 1984 р. алгоритму Н. Кармаркара, який фактично є ускладненою версією алгоритму І.І. Дікіна. У 70-х роках під час реалізації моделей енергетики стали активно використовуватися так звані «комбіновані алгоритми» внутрішніх точок, що поєднують в єдиному обчислювальному процесі введення в область допустимих розв'язків і оптимізацію. Комбіновані алгоритми були розроблені одним із авторів цієї статті — В.І. Зоркальцевим. Ці алгоритми дали змогу отримувати перший допустимий за всіма умовами задачі розв'язок ближчий до оптимального, а також під час обчислювального процесу ефективно виправляти похибки обчислень попередніх ітерацій.

НОВИЙ ВАРІАНТ КОМБІНОВАНОГО АЛГОРИТМУ

Уперше результати розроблень та використання комбінованих алгоритмів внутрішніх точок під час реалізації математичних моделей в енергетиці було викладено в [5]. Наведемо новий варіант комбінованих алгоритмів для задачі лінійного програмування в стандартній формі і двоїстої до неї:

$$c^{\mathrm{T}} x \to \min,\ Ax = b,\ x \ge 0; \tag{1}$$

$$b^{\mathrm{T}} u \to \max,\ g(u) \equiv c - A^{\mathrm{T}} u \ge 0. \tag{2}$$

Задані матриця A розміру $m \times n$, вектори $b \in R^m$, $c \in R^n$. Змінні задачі (1), (2) складають вектори $x \in R^n$, $u \in R^m$.

Стартовою точкою може бути будь-який вектор x^0 із R^n зі всіма додатними компонентами. Наприклад, $x_j^0 = 1$, $j = 1, \ldots, n$.

Алгоритм генерує послідовність векторів x^k із R^n також з усіма додатними компонентами, $k = 0, 1, 2, \ldots$ — номер ітерації. На кожній ітерації здійснюється така послідовність дій.

1. Обчислюється вектор нев'язок обмежень-рівностей задачі (1):

$$r^k = b - Ax^k.$$

2. Обчислюється вектор додатних вагових коефіцієнтів d^k із R^n, компоненти якого повинні задовольняти нерівності $\overline{\sigma}(x_j^k) \ge d_j^k \ge \underline{\sigma}(x_j^k)$, $j = 1, \ldots, n$. Тут $\overline{\sigma}, \underline{\sigma}$ — деякі функції від позитивного дійсного аргументу такі, що за будь-якого $\alpha > 0$ маємо $\overline{\sigma}(\alpha) \ge \underline{\sigma}(\alpha) > 0$.

Потрібно також, щоб виконувалася умова

$$\frac{\overline{\sigma}(\alpha)}{\underline{\sigma}(\tau)} = O\left(\frac{\alpha}{\tau}\right).$$

Наприклад, можна скористатися правилом

$$d_j^k = (x_j^k)^p, \tag{3}$$

де $p \geq 1$ — заданий параметр. У цьому разі, якщо $\alpha \geq 0$, то $\overline{\sigma}(\alpha) = \underline{\sigma}(\alpha) = \alpha^p$.

3. Обчислюється векторна функція $s^k(\beta)$ зі значеннями з R^n, що залежить від речовинного параметра β, як розв'язок допоміжної задачі

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^k(\beta) s_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (s_j^2 / d_j^k) \to \min, \ As = r^k, \tag{4}$$

з вектором змінних $s \in R^n$. Тут $c^k(\beta) = c - \beta y^k$, якщо $y_j^k = 1/x_j^k$, $j = 1, \ldots, n$.

Для задання вектор-функції $s^k(\beta)$ достатньо обчислити її значення у двох точках, оскільки за будь-якого β маємо $s^k(\beta) = s^k(0) - \beta s^k(1)$.

Обчислення вектора $s^k(\beta)$ за двох значень β зводиться до задачі розв'язання двох систем лінійних рівнянь з тією ж симетричною невід'ємно визначеною матрицею та двома векторами у правій частині системи. Обчислення у такій задачі рівносильне пошуку розв'язку такої самої системи з одним вектором у правій частині.

Дійсно, за будь-якого заданого значення β

$$s^k(\beta) = d_j^k g_j^k(u^k(\beta), \beta), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

де вектор $u^k(\beta)$ є розв'язком задачі безумовної мінімізації квадратичної опуклої функції відносно вектора змінних $u \in R^m$:

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} d_j^k (g_j^k(u, \beta))^2 - \sum_{i=1}^{n} r_i^k u_i \to \min. \tag{6}$$

У формулах (5), (6) $g^k(u, \beta) = c^k(\beta) - A^{\mathrm{T}} u$.

Прирівнявши градієнт цільової функції допоміжної задачі (6) нульовому вектору, отримаємо систему лінійних рівнянь, у якої від параметра β залежить лише вектор правої частини. Причому ця залежність лінійна.

Зазначимо, що допоміжна задача (6) є рівноцінною симетрично двоїстій до вихідної допоміжної задачі (4).

4. Обчислюється крок коригування рішення. Нехай γ — заданий параметр із відкритого інтервалу (0, 1). Наприклад, $\gamma = 0.9$. Задано також верхнє значення $\overline{\beta}$ для значення β, що обчислюється за наведеними далі правилами.

Позначимо λ_k, β_k розв'язки однієї з наведених далі задач щодо змінних λ та β.

Якщо $r^k \neq 0$, то розв'язується задача

$$\lambda \to \max, \ \lambda s^k(\beta) + \gamma x^k \geq 0, \quad 1 \geq \lambda, \quad \overline{\beta} \geq \beta \geq 0. \tag{7}$$

Якщо $r^k = 0$, то розв'язується задача

$$\lambda \sum_{j=1}^{n} c_j s_j^k(\beta) \to \min, \ \lambda s^k(\beta) + \gamma x^k \geq 0, \quad \overline{\beta} \geq \beta \geq 0. \tag{8}$$

У наведених далі результатах обчислення для розв'язання задач (7), (8) використовувався метод золотого перерізу. Зазначимо, що максимальне значення цільової функції задачі (7), що розглядається як неявна функція від змінної β, є увігнутою функцією. Цільова функція задачі (8) для змінної β, з якими вона досягає непозитивних значень, є опуклою неявною функцією від β (причому такі значення β становлять інтервал з нижньою границею, що дорівнює нулю). Ці два факти обґрунтовують правомірність використання методу золотого перерізу для розв'язання задач (7), (8).

5. Здійснюється ітеративний перехід

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k s^k(\beta_k). \tag{9}$$

Перехід до п. 1.

ЗАУВАЖЕННЯ ДО АЛГОРИТМУ

Зауваження 1. З обмежень задач (7), (8) та ітеративного переходу (9) випливає, що $x^{k+1} \geq (1-\gamma)x^k$.

Оскільки всі компоненти вектора x^k додатні і $\gamma < 1$, то додатними будуть і всі компоненти вектора x^{k+1}.

Зауваження 2. З умови допоміжної задачі (4) та ітеративного переходу (9) випливає, що

$$r^{k+1} = (1-\lambda_k)r^k. \tag{10}$$

Цим пояснюється, чому в (7) величина кроку λ_k обмежена зверху одиницею. Поки $r^k \neq 0$ наведений алгоритм здійснює введення в область допустимих розв'язків. Абсолютні значення кожної компоненти вектора нев'язок балансових обмежень скорочуються у $(1-\lambda_k)$ разів, якщо $\lambda_k \in (0,1]$. Урахування цільової функції дає змогу отримувати перший допустимий розв'язок наближеним до оптимального.

У разі $r^k = 0$ згідно з (10) після ітеративного переходу нев'язки балансових обмежень повинні залишатися нульовими, $r^{k+1} = 0$. На цьому етапі відбуватиметься оптимізація в області допустимих розв'язків, виконуватимуться нерівності $c^{\mathrm{T}} x^{k+1} < c^{\mathrm{T}} x^k$.

Зауваження 3. Можна апріорі зафіксувати значення $\overline{\beta} = 0$. Тоді наведений алгоритм стане одним із варіантів алгоритмів методу внутрішніх точок, що розглядалися раніше. Зокрема, за правилом обчислення вагових коефіцієнтів (3) отримаємо найбільш відомий алгоритм внутрішніх точок, який має назву «affine scaling method».

Для варіантів алгоритмів з $\overline{\beta} = 0$ стосовно процесу оптимізації в області допустимих розв'язків за припущення невиродженості задачі (1) доведено, що отримані послідовності векторів x^k, $u^k = u^k(0)$ збігаються не менш ніж лінійно до відносно внутрішніх точок множини оптимальних розв'язків задач (1) і (2). Причому швидкість збіжності двоїстих змінних буде більшою, ніж швидкість збіжності змінних двоїстої задачі

$$\frac{\left\| u^k - \overline{u} \right\|}{\left\| x^k - \overline{x} \right\|} \to 0, \text{ якщо } k \to \infty.$$

Зазначимо, що швидшу збіжність спочатку виявили з урахуванням досвіду використання алгоритмів внутрішніх точок під час реалізації моделей енергетики. Потім було отримано теоретичне обґрунтування. Цей факт робить доцільним використання двоїстих аналогів наведених алгоритмів, у тому числі «dual affine scaling method», для швидшого отримання розв'язку вихідної задачі (1). Для алгоритмів з ваговими коефіцієнтами (3), якщо $p \in [1,3]$, надано доказ без припущення про невиродженість задачі. Причому для $p \in (1,3]$ було доведено, що швидкість збіжності асимптотично залежить від вихідних даних, зокрема, від розмірності задачі, оскільки

$$\frac{\left\| x^{k+1} - \bar{x} \right\|}{\left\| x^{k} - \bar{x} \right\|} \to (1-\gamma), \text{ якщо } k \to \infty.$$

Теоретичні дослідження показали, що це не справджується для алгоритмів з ваговими коефіцієнтами (3), якщо $p = 1$. У цьому разі лінійна швидкість збіжності залежить від усіх вихідних даних задачі.

За доказами зазначених та інших фактів не можна було використовувати стандартне обґрунтування алгоритмів оптимізації. Водночас розроблену технологію обґрунтування алгоритмів, якщо $\bar{\beta} = 0$, не можна легко застосувати для викладеного у цій роботі узагальнення таких алгоритмів.

РЕЗУЛЬТАТИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Наведені вихідні алгоритми використовувалися у спільних дослідженнях [6] Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України та Сибірського енергетичного інституту. Ці алгоритми успішно застосовують у низці моделей електроенергетичних систем (аналізу надійності, оптимізації режимів, вибору графіків ремонту обладнання), у моделях термодинамічних процесів, а також для розв'язання стандартних та нестандартних задач гідравлічних ланцюгів (систем водопостачання, теплопостачання, пожежогасіння тощо).

У табл. 1 наведено здійснені А.Ю. Філатовим порівняльні результати обчислення алгоритмом «affine scaling method» і викладеним алгоритмом з ваговими коефіцієнтами (3), якщо $p = 2$. Зазначимо, що на кожній ітерації в обох випадках здійснюється приблизно однаковий обсяг обчислень. Наведені результати обчислень показують, що використання комбінованого алгоритму має сенс. У табл. 1 під терміном «комбінований алгоритм» розуміється алгоритм з $\bar{\beta} = 1$ і ваговими коефіцієнтами (3), якщо $p = 2$. Під терміном «комбінований розширений» розуміється алгоритм з $\bar{\beta} = 2$. У табл. 1 також представлені результати обчислення алгоритму, у якого вагові коефіцієнти задаються не за правилом (3), а за тим, що враховує множники Лагранжа змінних допоміжної задачі на попередній ітерації. Такі алгоритми називаються «комбінованими модифікованими».

Для кожної розмірності (див. табл. 1) розглядалося двадцять випадково згенерованих задач лінійного програмування в стандартній формі. У табл. 1 наведені середні арифметичні значення кількостей ітерацій, які потрібні для розв'язання задач і середньоквадратичні відхилення від їхніх середніх значень.

Із наведених у табл. 1 результатів видно, що використання викладених у цій статті комбінованих алгоритмів приблизно на 25% скорочує час розв'язання задач лінійного програмування порівняно з вихідним комбінованим найбільш відомим варіантом алгоритму внутрішніх точок. Зазначимо також, що час обчислення (нижче середньоквадратичного відхилення від середнього значення кількості ітерацій) наведених у цій роботі алгоритмів для задач однакової розмірності не змінюється.

Істотний позитивний ефект було отримано також у обчислювальних експериментах (проведених А.Ю. Філатовим) розв'язання нелінійних систем рівнянь та нерівностей. У такому вигляді представлена задача обчислення допустимих режимів електроенергетичних систем.

Використання алгоритмів внутрішніх точок супроводжувалося процедура-

Т а б л и ц я 1. Середнє значення та середньоквадратичне відхилення для кількості ітерацій, які потрібні для розв'язання задач лінійного програмування різних розмірностей

Алгоритми	Розмірність задач			
	20×40	40×80	100×200	100×200
Комбінований	it = 31.1 σ = 6.39	it = 33.0 σ = 6.42	it = 29.1 σ = 11.62	it = 28.6 σ = 2.76
Комбінований модифікований	it = 25.1 σ = 4.44	it = 24.1 σ = 4.97	it = 23.1 σ = 7.99	it = 22.6 σ = 0.66
Комбінований розширений	it = 23.6 σ = 5.28	it = 21.7 σ = 2.87	it = 23.6 σ = 8.49	it = 22.5 σ = 0.67

ми ітеративної лінеаризації. Розглядалися надані О.М. Войтовим чотири схеми електроенергетичних систем: з 152, 118, 207 та 211 вузлами. У всіх чотирьох випадках викладеним у цій роботі алгоритмам знадобилося значно меншої (на 15–50%) кількості обернень матриці (кількості необхідних розв'язків задачі (6)). При цьому тільки для комбінованого алгоритму має бути більше ітерацій лінеаризації, для кожної з яких потрібен деякий додатковий час, але не такий, як для обернення матриці методом квадратного кореня. Цим методом розв'язувалась допоміжна задача (6) всіма алгоритмами, представленими у табл. 1, а також здійснювався пошук допустимих режимів електроенергетичних систем.

ВИСНОВКИ

У роботі наведено результати дослідження низки алгоритмів внутрішніх точок для розв'язання задач лінійного програмування та деякі результати їхнього теоретичного обґрунтування. Виокремлено підмножини алгоритмів, що мають лінійну, асимптотично незалежну від параметрів розв'язуваної задачі швидкість збіжності. Наведено нові модифікації алгоритмів внутрішніх точок, що містять як окремий випадок розроблені раніше алгоритми. Ці методи активно застосовують під час реалізації низки моделей в економіці та енергетиці.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Шор Н.З. Монотонные модификации r-алгоритмов и их приложения. *Кибернетика и системный анализ.* 2002. № 6. С. 74–96.
2. Сергиенко И.В., Стецюк П.И. О трёх научных идеях Н.З. Шора. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. № 1. С. 4–10.
3. Стецюк П.И., Фесюк А.В., Хомяк О.Н. Обобщенный метод эллипсоидов. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 4. С. 70–80.
4. Стецюк П.И. r-алгоритмы и эллипсоиды. *Кибернетика и системный анализ*. 1996. № 1. С. 113–134.
5. Дикин И.И., Зоркальцев В.И. Итеративное решение задач математического программирования: алгоритмы метода внутренних точек. Новосибирск: Наука, 1980. 144 с.
6. Зоркальцев В.И., Пержабинский С.М., Стецюк П.И. Поиск нормальных решений СЛАУ при двусторонних ограничениях на переменные методом внутренних точек. *Кибернетика и системный анализ*. 2015. Т. 51, № 6. С. 71–80.
7. Епифанов С.П., Зоркальцев В.И. Задача потокораспределения с нефиксированными отборами. *Кибернетика и системный анализ*. 2011. № 1. С. 81–92.

T.V. Belykh, V.I. Zorkaltsev

INTERIOR POINT ALGORITHMS: HISTORY, RESEARCH RESULTS, APPLICATIONS, AND PROSPECTS

Abstract. A family of interior point algorithms for solving linear programming problems is considered. The results of their theoretical substantiation are given. Subsets of algorithms that have a linear, asymptotically independent of the parameters of the problem being solved rate of convergence, and a subset of algorithms that lead to relatively internal points of the set of optimal solutions are identified. The history of the creation and development of algorithms is described. New modifications of interior point algorithms are presented, which contain as a special case the previously developed algorithms.

Keywords: linear programming, linear inequalities, interior point algorithms.

Надійшла до редакції 16.06.2022