УДК 519.21

В.С. КИРИЛЮК
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *vlad00@ukr.net*.

ПОЛІЕДРАЛЬНА КОГЕРЕНТНА МІРА РИЗИКУ ТА РОБАСТНА ЗА РОЗПОДІЛОМ ОПТИМІЗАЦІЯ ПОРТФЕЛЯ

Анотація. Розглянуто поліедральні когерентні міри ризику та їхні конструкції найгіршого випадку за множиною неоднозначності. Для випадку дискретного розподілу та поліедральної множини неоднозначності обчислення таких мір ризику зводиться до задач лінійного програмування. Вивчено задачі робастної за розподілом оптимізації портфеля за співвідношенням винагорода–ризик з використанням конструкцій найгіршого випадку за поліедральною множиною неоднозначності для цих мір ризику та середнього доходу. Ці задачі зведено до відповідних задач лінійного програмування.

Ключові слова: когерентна міра ризику, поліедральна когерентна міра ризику, Conditional Value-at-Risk (CVaR), множина неоднозначності, робастна за розподілом оптимізація, оптимізований еквівалент визначеності, оптимізація портфеля, міра відхилення.

ВСТУП

У класичних задачах стохастичної оптимізації зазвичай вважається відомим стохастичний розподіл випадкових величин (в.в.), а як критерії чи обмеження для пошуку оптимальних розв'язків використовують їхні статистичні характеристики: середні значення, відхилення, квантилі тощо. Проте, в застосуваннях зазвичай наявна лише часткова інформація про розподіл у вигляді даних спостережень (передісторії). Це дає змогу описати стохастичний розподіл в.в. лише деякою множиною неоднозначності (МН, ambiguity set). Постановки задач стохастичної оптимізації відповідно модифікують. Тепер у них для опису критеріїв оптимальності чи обмежень під час пошуку розв'язків використовують статистичні характеристики найгіршого випадку за МН.

Тематику подібних постановок задач називають робастною за розподілом оптимізацією (РРО, distributionally robust optimization). Нині вона активно розвивається, наприклад у [1–6]. Так, у [1] вивчено моделі, що враховують невизначеність за типом розподілу та його моментами (середнім значенням та коваріаційною матрицею), у [2] — структуру моделі з МН розподілів з довірчими множинами, описаними конусом та середніми значеннями на афінному різновиді, в [3] — постановки задач з МН імовірнісних мір, близьких у певному сенсі до початкової міри, в [4] — РРО моделі з використанням метрики Вассерштейна для побудови МН, у [5] — адаптивну структуру РРО для динамічного прийняття рішень з МН, описаними конусом другого порядку. В [6] запропоновано огляд з теорії та застосувань РРО.

Широкого поширення також набув апарат когерентних мір ризику для кількісного оцінювання ризику [7]. Тому його використання в задачах РРО є природним і потребує врахування відповідної МН у конструкції міри ризику.

У роботі вивчаються поліедральні когерентні міри ризику (ПКМР) та їхні конструкції найгіршого випадку за МН. Для скінченних дискретних розподілів обчислення таких ПКМР з поліедральними МН зведено до задачі лінійного програмування (ЛП). Показано, як задачі робастної за розподілом оптимізації портфеля з такими мірами ризику та МН зводяться до відповідних задач ЛП.

1. ДВОЇСТЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ КОГЕРЕНТНОЇ МІРИ РИЗИКУ

Розглянемо ймовірнісний простір (Ω, Σ, P_0) і простір Z э X в.в., де $X : \Omega \to \overline{R}$ — вимірна функція, що описує величину випадкових втрат.

Функція $\rho : Z \to \overline{R}$ називається когерентною мірою ризику (КМР) [7], якщо вона напівнеперервна знизу (нн.зн.), власна у сенсі [8] та виконані такі аксіоми:

R1) $\rho(X + a) = \rho(X) + a$, $a \in R$ (трансляційна інваріантність);

R2) $\rho(\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2) \le \lambda\rho(X_1) + (1-\lambda)\rho(X_2)$ (опуклість);

R3) $\rho(0) = 0$, $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X), \lambda \ge 0$ (позитивна однорідність);

R4) $\rho(X) \le \rho(Y)$, якщо $X \le Y$ (монотонність).

У [9] було введено поняття опуклої міри ризику як узагальнення КМР. Функція $\rho(.)$ називається опуклою мірою ризику, якщо вона має властивості R1, R2, R4 та $\rho(0) = 0$.

Зауваження 1. Зазначені властивості мір ризику стосуються в.в. X, що описують втрати, витрати та інші величини за відношенням переваги «чим менше — тим краще». Величини, впорядковані за відношенням «чим більше — тим краще», зокрема, величину фінансового потоку треба враховувати зі знаком мінус.

Нехай $Z = L_p(\Omega, \Sigma, P_0)$, $p \in [1, +\infty)$, його двоїстим простором є $Z^* = L_q(\Omega, \Sigma, P_0)$, $q \in (1, +\infty]$. $1/p + 1/q = 1$. Скалярний добуток для $X \in Z$ і $\zeta \in Z^*$ має вигляд

$$\langle \zeta, X \rangle = \int_\Omega \zeta(\omega) X(\omega)\, dP_0(\omega).$$

Міра ризику $\rho(.)$ за означенням є опуклою власною та нн.зн. функцією. Нагадаємо, що її спряжена функція $\rho^* : Z^* \to \overline{R}$ визначається як

$$\rho^*(\zeta) = \sup_{X \in Z} (\langle \zeta, X \rangle - \rho(X)).$$

Використовуючи теорему Фенхеля–Моро [10, теорема 7.71], $\rho(.)$ можна представити у двоїстому вигляді

$$\rho(X) = \sup_{\zeta \in \mathfrak{M}_\rho} (\langle \zeta, X \rangle - \rho^*(\zeta)) = \sup_{\zeta \in \mathfrak{M}_\rho} \left(\int_\Omega \zeta(\omega) X(\omega) dP_0(\omega) - \rho^*(\zeta) \right), \quad (1)$$

де $\mathfrak{M}_\rho = \mathrm{dom}(\rho^*)$ — область визначення функції ρ^*.

Зауваження 2. Представлення (1) має місце для рефлексивних просторів $L_p(\Omega, \Sigma, P_0)$, $p \in (1, +\infty)$. Для пари просторів: $L_1(\Omega, \Sigma, P_0)$ та $L_\infty(\Omega, \Sigma, P_0)$, перший простір розглядається зі слабкою топологією, другий — зі слабко* топологією [3].

Для КМР співвідношення (1) значно спрощується:

$$\rho(X) = \sup_{\zeta \in \mathfrak{M}_\rho} \langle \zeta, X \rangle = \sup_{\zeta \in \mathfrak{M}_\rho} \int_\Omega \zeta(\omega) X(\omega)\, dP_0(\omega). \quad (2)$$

Як відомо [10, теорема 6.4], властивості монотонності R4 та трансляційної інваріантності R1 для $\rho(.)$ гарантують, що

$$\zeta(.) \ge 0 \text{ a.s.}, \int_\Omega \zeta(\omega)\, dP_0(\omega) = 1. \quad (3)$$

Отже, множина $\mathfrak{M}_\rho \subset Z^*$ із співвідношень (1) і (2) є підмножиною імовірнісних щільностей (3). У такому випадку

$$Q_\rho(P_0) = \left\{ P(.) : P(A) = \int_A \zeta(\omega)\, dP_0(\omega),\ \zeta \in \mathfrak{M}_\rho \right\} \tag{4}$$

є множиною ймовірнісних мір вигляду $dP = \zeta dP_0$ на (Ω, Σ), породжених множиною $\mathfrak{M}_\rho$ (похідних Радона–Нікодима)

$$\rho_{P_0}(X) = \sup_{\zeta \in \mathfrak{M}_\rho} \int_\Omega \zeta(\omega) X(\omega)\, dP_0(\omega) = \sup_{P \in Q_\rho(P_0)} E_P[X]. \tag{5}$$

Зауваження 3. У співвідношенні (5) міра ризику $\rho(.)$ позначена як $\rho_{P_0}(.)$, щоб вказати на її явну залежність від початкової імовірнісної міри P_0.

Зауваження 4. Залежність $Q_\rho(.)$ від P_0 у (4) можна розуміти як багатозначне відображення на множині ймовірнісних мір.

Приклад 1. Розглянемо CVaR з [11], її двоїстим представленням [10] є (2), де

$$\mathfrak{M}_\rho = \left\{ \zeta(.) : 0 \le \zeta(.) \le \frac{1}{1-\alpha} \text{ a.s.}, \int_\Omega \zeta(\omega) P_0(d\omega) = 1 \right\}, \tag{6}$$

а множина $Q_\rho(P_0)$ описується у вигляді (4) з множиною $\mathfrak{M}_\rho$ (6).

Приклад 2. Розглянемо $\rho(X) = -S_u(-X)$, де $S_u(X) = \sup_{\eta \in R} \{\eta + Eu(X - \eta)\}$ — оптимізований еквівалент визначеності [12] з кусково-лінійною функцією корисності $u(t) = \begin{cases} \gamma_2 t, & t \le 0, \\ \gamma_1 t, & t > 0, \end{cases}$ $0 \le \gamma_1 < 1 < \gamma_2$. Її двоїстим представленням [13] є (2), де

$$\mathfrak{M}_\rho = \left\{ \zeta : \gamma_1 \le \zeta(.) \le \gamma_2 \text{ a.s.}, \int_\Omega \zeta(\omega)\, dP_0(\omega) = 1 \right\}.$$

Відповідно множина $Q_\rho(P_0)$ має вигляд (4) з такою множиною $\mathfrak{M}_\rho$.

Уточнимо тепер поняття поліедральної КМР (ПКМР), раніше вивченої в [14–16] для скінченних дискретних розподілів в.в.

Означення 1. Міру ризику $\rho(.)$ будемо називати ПКМР, якщо вона у двоїстій формі представляється у вигляді (2), де $\mathfrak{M}_\rho$ є або множиною

$$\mathfrak{M}_0 = \left\{ \zeta(.) \ge 0 \text{ a.s.}, \int_\Omega \zeta(\omega)\, dP_0(\omega) = 1 \right\}, \tag{7}$$

або її перетином з якоюсь із двох множин:

$$\mathfrak{M}_1 = \left\{ \zeta(.) : \int_\Omega \zeta(\omega) X_i(\omega) dP_0(\omega) \le c_i,\ i = 1, \ldots, k \right\} \tag{8}$$

для деяких $\{X_i \in Z, c_i \in R, i = 1, \ldots, k\}$ та

$$\mathfrak{M}_2 = \{\zeta(.) : \gamma_1 \le \zeta(.) \le \gamma_2 \text{ a.s.}\},\ 0 \le \gamma_1 \le 1 \le \gamma_2, \tag{9}$$

для деяких γ_1, γ_2. При цьому $\mathfrak{M}_0$ називається стандартною частиною опису $\mathfrak{M}_\rho$.

Отже,

$$\rho(X) = \sup_{P \in Q(P_0)} \int_\Omega X(\omega)\, dP(\omega) = \sup_{\zeta \in \mathfrak{M}_\rho} \int_\Omega \zeta(\omega) X(\omega)\, dP_0(\omega) \tag{10}$$

для таких випадків представлення $\mathfrak{M}_\rho$:

C0) $\mathfrak{M}_\rho = \mathfrak{M}_0$;

C1) $\mathfrak{M}_\rho = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}_1$;

C2) $\mathfrak{M}_\rho = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}_2$;

C3) $\mathfrak{M}_\rho = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$

для $\mathfrak{M}_i$, $i = 0, 1, 2$, описаних у (7)–(9).

Розглянемо деякі приклади. Неважко бачити, що суттєвий супремум, середнє значення, CVaR і оптимізований еквівалент визначеності зі знаком мінус із прикладу 2 описуються у вигляді (10) з відповідними $\mathfrak{M}_\rho$:

$$\rho(X) = \operatorname{ess\,sup} X \ \text{ для } \mathfrak{M}_\rho = \mathfrak{M}_0;$$

$$\rho(X) = E[X] \ \text{ для } \mathfrak{M}_\rho = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}_2,\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 1;$$

$$\rho(X) = CVaR_\alpha(X) \ \text{ для } \mathfrak{M}_\rho = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}_2,\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 1/(1-\alpha);$$

$$\rho(X) = -S_u(-X) \ \text{ для } \mathfrak{M}_\rho = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}_2.$$

Зазначимо, що мірою відхилення [17] називається нн.зн. функціонал $D: Z \to [0, \infty]$ з властивостями:

D1) $D(0) = 0$;

D2) $D(X + a) = D(X)$, $a \in R$;

D3) $D(\lambda X) = \lambda D(X)$, $\lambda \ge 0$;

D4) $D(X_1 + X_2) \le D(X_1) + D(X_2)$.

Неважко перевірити, що для КМР $\rho_{P_0}(X)$ величина $D_{P_0}(X) = \rho_{P_0}(X - E(X))$ є мірою відхилення. Тому, якщо $\rho(X)$ представлена у вигляді (2), використавши позначення $\mathbf{1}(.) = 1$ a.s., отримаємо

$$D_{P_0}(X) = \sup_{\zeta \in \mathfrak{M}_\rho} \int_\Omega (\zeta(\omega) - \mathbf{1}(\omega)) X(\omega)\, dP_0(\omega) = \sup_{\zeta \in \mathfrak{M}_\rho} \langle \zeta - \mathbf{1}, X \rangle. \tag{11}$$

Означення 2. Міру відхилення будемо називати поліедральною, якщо вона представлена у вигляді (11), де $\mathfrak{M}_\rho$ описує ПКМР.

2. МІРА РИЗИКУ НАЙГІРШОГО ВИПАДКУ ЗА МНОЖИНОЮ НЕОДНОЗНАЧНОСТІ

Нехай маємо міру ризику $\rho(.)$, а міра P_0 імовірнісного простору характеризується МН у вигляді $P_0 \in P_U$. Тоді оцінюватимемо ризик найгіршим (максимальним) значенням $\rho(.)$ з МН. Використовуючи позначення $\rho_{P_U}(.)$, отримуємо

$$\rho_{P_U}(X) = \sup_{P_0 \in P_U} \rho_{P_0}(X). \tag{12}$$

Визначимо тепер за $\rho_{P_U}(.)$ міру відхилення як

$$D_{P_U}(X) = \sup_{P_0 \in P_U} D_{P_0}(X) = \sup_{P_0 \in P_U} (\rho_{P_0}(X) - E_{P_0}(X)). \tag{13}$$

Означення 3. Функціонали $\rho_{P_U}(.)$ та $D_{P_U}(.)$ із (12), (13) називатимемо відповідно мірами ризику та відхиленнями найгіршого випадку за множиною P_U.

Зауваження 5. Неважко бачити, що така міра ризику найгіршого випадку за МН $\rho_{P_U}(.)$ зберігає когерентні властивості початкової $\rho_{P_0}(.)$. Отже, $\rho_{P_U}(.)$ є КМР.

Для конструкції (12) зручно використовувати двоїсте представлення міри ризику (5). Наприклад, такі конструкції для когерентної міри ризику та відхилення відповідно мають вигляд

$$\rho_{P_U}(X) = \sup_{P_0 \in P_U} \sup_{P \in Q_\rho(P_0)} E_P[X] = \sup_{P \in Q_\rho(P_U)} E_P[X], \tag{14}$$

$$D_{P_U}(X) = \sup_{P_0 \in P_U} \left(\sup_{P \in Q_\rho(P_0)} E_P[X] - E_{P_0}[X] \right). \tag{15}$$

Зауваження 6. Як неважко бачити з (14), множина ймовірнісних мір $Q(U)$ визначається з точністю до слабкого замикання його опуклої оболонки.

Відповідна МН P_U, що характеризує неоднозначність у вигляді $P_0 \in P_U$, може бути описана по-різному [1–6]. Якщо множину P_U можна представити у вигляді множини ймовірнісних мір $dP = \eta dP_0$ на (Ω, Σ), породжених деякою множиною щільностей $\mathfrak{M}_U$ (похідних Радона–Нікодима), тобто для

$$\mathfrak{M}_U \subseteq \left\{ 0 \le \eta(.) \text{ a.s.}, \int_\Omega \eta(\omega) dP_0(\omega) = 1 \right\},$$

то МН описується як

$$P_U = \left\{ P(.) : P(A) = \int_A \eta(\omega) dP_0(\omega), \eta \in \mathfrak{M}_U \right\}.$$

Тоді міру ризику (14) можна представити у вигляді

$$\rho_{P_U}(X) = \sup_{P_0 \in P_U} \sup_{\zeta \in \mathfrak{M}_\rho} \int_\Omega \zeta(\omega) X(\omega)\, dP_0(\omega) = \sup_{P \in Q(P_U)} \int_\Omega X(\omega) dP(\omega),$$

де $Q(P_U) = \left\{ P(A) = \int_A \zeta(\omega)\eta(\omega)\, dP_0(\omega),\ \zeta \in \mathfrak{M}_\rho, \eta \in \mathfrak{M}_U \right\}$ за умови

$$\left\{ 0 \le \zeta, \eta \text{ a.s.}, \int_A \eta(\omega)\, dP_0(\omega) = 1, \int_A \zeta(\omega)\eta(\omega)\, dP_0(\omega) = 1 \right\}.$$

Тоді міра відхилення (15) за МН P_U має вигляд

$$D_{P_U}(X) = \sup_{P_0 \in P_U} \sup_{\zeta \in \mathfrak{M}_\rho} \langle \zeta - 1, X \rangle_{P_0} = \sup_{\eta \in \mathfrak{M}_U} \sup_{\zeta \in \mathfrak{M}_\rho} \int_\Omega \eta(\omega)(\zeta(\omega) - 1) X(\omega)\, dP_0(\omega).$$

Означення 4. Деяку МН імовірнісних мір P_U називатимемо поліедральною, якщо вона представлена у вигляді

$$P_U = \left\{ P : P(A) = \int_A \eta(\omega)\, dP_0(\omega), \eta \in \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}_1 \right\},$$

де $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$ описано співвідношеннями (7) та (8) відповідно.

3. ВИПАДОК ДИСКРЕТНИХ РОЗПОДІЛІВ ЗІ СКІНЧЕННИМ Ω

Розглянемо випадок дискретних розподілів зі скінченною множиною елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Тоді ймовірнісна міра P_0 та в.в. X є векторами сценарних імовірностей $p_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)$ і значень $x = (x_1, \dots, x_n)$ відповідно. А такі міри ризику, як суттєвий супремум, середнє значення, CVaR та оптимізований еквівалент визначеності зі знаком мінус із прикладу 2, представляються у вигляді

$$\rho_{p_0}(x) = \sup(\langle x, p \rangle : p \in Q(p_0)),$$

де

$$\rho(X) = \operatorname{ess\,sup} X \text{ для } Q(p_0) = \left\{ p \ge 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1 \right\};$$

$$\rho(X)=E[X] \text{ для } Q(p_0)=\left\{p\le p_0,\ p\ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} p_i=1\right\}=\{p_0\};$$

$$\rho(X)=CVaR_\alpha(X) \text{ для } Q(p_0)=\left\{Ip\le \frac{1}{1-\alpha}\,p_0,\ p\ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} p_i=1\right\};$$

$$\rho(X)=-S_u(-X) \text{ для } Q(p_0)=\left\{\gamma_1 p_0\le Ip\le \gamma_2 p_0,\ p\ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} p_i=1\right\}.$$

Тоді множина $Q(p_0)$ для ПКМР у випадках С1–С3 має вигляд:

С1) $Q(p_0)=\left\{p:\langle x_j, p\rangle\le c_j,\ j=1,\ldots,k,\ p\ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} p_i=1\right\};$

С2) $Q(p_0)=\left\{p:\gamma_1 p_0\le Ip\le \gamma_2 p_0,\ p\ge 0, \sum_{i=1}^{n} p_i=1,\ p_0\ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} p_i^0=1\right\};$

С3) $Q(p_0)=\left\{p:\langle x_j, p\rangle\le c_j,\ j=1,\ldots,k, \gamma_1 p_0\le Ip\le \gamma_2 p_0,\ p\ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} p_i=1\right\}.$

Представимо тепер обмеження у множинах $Q(p_0)$ у матричному вигляді. Почнемо з нормування ймовірностей, $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$ опишемо як $\sum_{i=1}^{n} p_i\le 1$ і $-\sum_{i=1}^{n} p_i\le -1$ та представимо у вигляді

$$B_0 p\le c_0, \text{ де } B_0=\begin{pmatrix}1 & \ldots & 1\\ -1 & \ldots & -1\end{pmatrix},\ c_0=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}. \tag{16}$$

Обмеження $\langle x_j, p\rangle\le c_j$, $j=1,\ldots,k$, представимо матрицею B_1 та вектором c_1, де j-й рядок матриці B_1 описує розподіли $x_j=(x_1^j,\ldots,x_n^j)$, а вектор c_1 — компоненти c_j, $j=1,\ldots,k$. Тоді

$$B_1 p\le c_1, \text{ де } B_1=\begin{pmatrix}x_1^1 & \ldots & x_1^k\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ x_n^1 & \ldots & x_n^k\end{pmatrix},\ c_1=\begin{pmatrix}c_1\\ \ldots\\ c_k\end{pmatrix}. \tag{17}$$

Введемо позначення

$$B=\begin{pmatrix}B_1\\ B_0\end{pmatrix},\ c=\begin{pmatrix}c_1\\ c_0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}I\\ -I\end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix}\gamma_2 I\\ -\gamma_1 I\end{pmatrix}. \tag{18}$$

Зауваження 7. Якщо для множини $Q(p_0)$ параметр $\gamma_1=0$, то нерівність з ним уже врахована в обмеженнях $p\ge 0$. У цьому випадку $D=I, G=\gamma_2 I$.

З урахуванням позначень (16)–(18) маємо:

С1) $Q(p_0)=\{p: Bp\le c,\ p\ge 0\}$;

С2) $Q(p_0)=\{p: B_0 p\le c_0, Dp\le Gp_0,\ p\ge 0\}$;

С3) $Q(p_0)=\{p: Bp\le c, Dp\le Gp_0,\ p\ge 0\}$.

Розглянемо тепер поліедральну МН P_U. Аналогічно (17) обмеження $\langle x_j, p\rangle\le c_j$, $j=1,\ldots,k$, можемо описати матрицею B_u^1, рядки якої є розподілами $x_j=(x_1^j,\ldots,x_n^j)$, та вектором c_u^1, що описує праві частини нерівностей. Тоді з урахуванням нормування ймовірностей (16), (17) маємо

$$P_U=\{p_0: B_u p_0\le c_u,\ p_0\ge 0\}, \text{ де } B_u=\begin{pmatrix}B_u^1\\ B_0\end{pmatrix},\ c_u=\begin{pmatrix}c_u^1\\ c_0\end{pmatrix}. \tag{19}$$

Приклади такого опису P_U у вигляді (19) наведено в [16].

Тепер можемо описати ПКМР найгіршого випадку за МН P_U:

$$\rho_{P_U}(x) = \sup(\langle x, p\rangle : p \in Q(P_U)) = \sup_{p, p_0}(\langle x, p\rangle : p_0 \in P_U, \ p \in Q(p_0)). \quad (20)$$

Зауваження 8. Оскільки для випадку С1 множина $Q(p_0)$ не залежить від початкової p_0, конструкція найгіршого випадку за МН нічого не змінює в початковій мірі ризику.

Тоді ПКМР найгіршого випадку за МН (20) для випадків С1–С3 з урахуванням позначень (16)–(18) має вигляд:

С1) $\rho_{P_U}(x) = \sup\limits_{p}(\langle x, p\rangle : Bp \le c, \ p \ge 0)$;

С2) $\rho_{P_U}(x) = \sup\limits_{p, p_0}(\langle x, p\rangle : Dp \le Gp_0, \ B_0 p \le c_0, \ B_u p_0 \le c_u, \ p, p_0 \ge 0)$;

С3) $\rho_{P_U}(x) = \sup\limits_{p, p_0}(\langle x, p\rangle : Dp \le Gp_0, \ Bp \le c, \ B_u p_0 \le c_u, \ p, p_0 \ge 0)$.

Нехай o_{2n}, $O_{2\times n}$, $O_{l\times n}$, $O_{m\times n}$ — нульовий вектор та нульові матриці відповідного розміру, а l, m — кількість рядків матриць B_u та B відповідно. Введемо позначення:

$$\widehat{A}_1 = B, \ \widehat{B}_1 = O_{l\times n}, \ \widehat{c}_1 = c; \quad (21)$$

$$\widehat{A}_2 = \begin{pmatrix} O_{l\times n} \\ D \\ B_0 \end{pmatrix}, \ \widehat{B}_2 = \begin{pmatrix} B_u \\ -G \\ O_{2\times n} \end{pmatrix}, \ \widehat{c}_2 = \begin{pmatrix} c_u \\ o_{2n} \\ c_0 \end{pmatrix}, \ \widehat{A}_3 = \begin{pmatrix} O_{l\times n} \\ D \\ B \end{pmatrix}, \ \widehat{B}_3 = \begin{pmatrix} B_u \\ -G \\ O_{m\times n} \end{pmatrix}, \ \widehat{c}_3 = \begin{pmatrix} c_u \\ o_{2n} \\ c \end{pmatrix}, \quad (22)$$

З урахуванням позначень (21), (22) сформулюємо твердження про обчислення ПКМР найгіршого випадку за МН для випадків С1–С3.

Твердження 1. Обчислення ПКМР найгіршого випадку для поліедральної МН для варіантів С1–С3 зводиться до задач ЛП для $i = 1, 2, 3$ відповідно:

$$\rho_{P_U}(x) = \max_{\substack{(p, p_0) \\ \widehat{A}_i p + \widehat{B}_i p_0 \le \widehat{c}_i, \ p, p_0 \ge 0}} \langle x, p\rangle .$$

Зазначимо, що поліедральну міру відхилення найгіршого випадку за МН $D_{P_U}(.)$ обчислювати не складніше. Сформулюємо відповідне твердження.

Твердження 2. Обчислення поліедральної міри відхилення найгіршого випадку для поліедральної МН для варіантів С1–С3 зводиться до задач ЛП для $i = 1, 2, 3$ відповідно:

$$D_{P_U}(x) = \max_{\substack{(p, p_0) \\ \widehat{A}_i p + \widehat{B}_i p_0 \le \widehat{c}_i, \ p, p_0 \ge 0}} (\langle x, p\rangle - \langle x, p_0\rangle).$$

4. РОБАСТНА ЗА РОЗПОДІЛОМ ОПТИМІЗАЦІЯ ПОРТФЕЛЯ ЗА СПІВВІДНОШЕННЯМ ВИНАГОРОДА–РИЗИК

У задачах фінансових застосувань рішення зазвичай приймаються за співвідношенням винагорода–ризик. Якщо для оцінки ризику використовувати певну міру ризику, потрібно визначити також функцію винагороди. В [18] як функцію винагороди розглянуто середню дохідність, яка за наявності МН потребує конструкції найгіршого випадку.

Розглянемо середню дохідність як функцію винагороди, тобто $r_{P_0}(X) = E_{P_0}[X]$, де в.в. X описує величину фінансового потоку. За аналогією з мірою ризику розглянемо її конструкцію $r_{P_U}(.)$ найгіршого випадку за МН P_U

$$r_{P_U}(X) = \sup_{P_0 \in P_U} r_{P_0}(X) = \sup_{P_0 \in P_U} E_{P_0}[X]. \quad (23)$$

4.1. Задачі оптимізації портфеля. Нехай розподіл прибутковості компонент портфеля r_j, $j=1,\ldots,k$, описується матрицею H розміру $n\times k$, у якій j-й стовпчик представляє розподіл j-ї компоненти. Вектор $w=(w_1,\ldots,w_k)$, що описує структуру портфеля, розглядається як змінна, причому $\sum_1^k w_i=1$, $w_i\ge 0$, $i=1,\ldots,k$. Потрібно знайти структуру портфеля w, яка оптимізує його за співвідношенням прибутковість–ризик.

У випадку відомого вектора сценарних імовірностей $p_0=(p_1^0,\ldots,p_n^0)$, якщо ризик портфеля оцінюється ПКМР $\rho_{p_0}(.)$, а винагорода — середньою прибутковістю $E_{p_0}(.)$, можна розглянути дві пов'язані задачі: мінімізацію міри ризику портфеля з обмеженнями знизу на його середню прибутковість μ_0 та максимізацію середньої прибутковості портфеля з обмеженнями зверху на його міру ризику ρ_0.

Ці задачі відповідно мають вигляд

$$\min_{\substack{\sum_1^k w_i=1,\ w\ge 0\\ E_{p_0}[Hw]\ge\mu_0}} \rho_{p_0}(-Hw),\qquad \max_{\substack{\sum_1^k w_i=1,\ w\ge 0\\ \rho_{p_0}(-Hw)\le\rho_0}} E_{p_0}[Hw]. \tag{24}$$

Зауваження 9. Оскільки Hw описує прибутковість портфеля, як аргумент для міри ризику враховуємо її зі знаком мінус, це описує втрати портфеля.

Як відомо з [19], ці задачі зводяться до відповідних задач ЛП. Наведемо їх, попередньо зробивши для випадків C1–C3 такі позначення (див. (16)–(18)):

C1) $\widetilde{B}_1=B$, $\widetilde{c}_1(p_0)=c$;

C2) $\widetilde{B}_2=\begin{pmatrix} D\\ B_0\end{pmatrix}$, $\widetilde{c}_2(p_0)=\begin{pmatrix} Gp_0\\ c_0\end{pmatrix}$;

C3) $\widetilde{B}_3=\begin{pmatrix} D\\ B\end{pmatrix}$, $\widetilde{c}_3(p_0)=\begin{pmatrix} Gp_0\\ c\end{pmatrix}$.

Твердження 3. Якщо задачі (24) сумісні, то для випадків C1–C3 вони зводяться до задач ЛП для $i=1,2,3$ відповідно:

$$\min_{\substack{(u,w)\\ \widetilde{B}_i^{\mathrm T}u+Hw\ge 0\\ \langle H^{\mathrm T}p_0,w\rangle\ge\mu_0\\ \sum_1^k w_i=1,\ u\ge 0,\ w\ge 0}} \langle\widetilde{c}_i(p_0),u\rangle,\qquad \max_{\substack{(u,w)\\ \widetilde{B}_i^{\mathrm T}u+Hw\ge 0\\ \langle\widetilde{c}_i(p_0),u\rangle\le\rho_0\\ \sum_1^k w_i=1,\ u\ge 0,\ w\ge 0}} \langle H^{\mathrm T}p_0,w\rangle.$$

Зауваження 10. Зазначимо, що в отриманих задачах ЛП додаткова змінна u має відповідну розмірність для кожного $i=1,2,3$.

Можна розглядати задачі оптимізації портфеля вигляду (24), але з оцінюванням ризику поліедральною мірою відхилення $D_{p_0}(X)=\rho_{p_0}(X-E_{p_0}(X))$:

$$\min_{\substack{\sum_1^k w_i=1,\ w\ge 0\\ E_{p_0}[Hw]\ge\mu_0}} D_{p_0}(-Hw),\qquad \max_{\substack{\sum_1^k w_i=1,\ w\ge 0\\ D_{p_0}(-Hw)\le d_0}} E_{p_0}[Hw]. \tag{25}$$

Аналогічно твердженню 3 проблеми (25) неважко звести до задач ЛП.

Твердження 4. Якщо задачі (25) сумісні, то для випадків C1–C3 вони зводяться до задач ЛП для $i=1,2,3$ відповідно:

$$\min_{\substack{(u,w)\\ \widetilde{B}_i^{\mathrm T}u+Hw\ge 0\\ \langle H^{\mathrm T}p_0,w\rangle\ge\mu_0\\ \sum_1^k w_i=1,\ u\ge 0,\ w\ge 0}} \langle\widetilde{c}_i(p_0),u\rangle+\langle H^{\mathrm T}p_0,w\rangle,\qquad \max_{\substack{(u,w)\\ \widetilde{B}_i^{\mathrm T}u+Hw\ge 0\\ \langle\widetilde{c}_i(p_0),u\rangle+\langle H^{\mathrm T}p_0,w\rangle\le d_0\\ \sum_1^k w_i=1,\ u\ge 0,\ w\ge 0}} \langle H^{\mathrm T}p_0,w\rangle.$$

Зауваження 11. До задач ЛП можна звести також задачі оптимізації портфеля за відношенням Шарпа з критеріями $\dfrac{E_{P_0}(.)}{\rho_{P_0}(.)}$ та $\dfrac{E_{P_0}(.)}{D_{P_0}(.)}$, тобто такі:

$$\max_{\sum_1^k w_i=1,\ w\geq 0} \frac{E_{P_0}(Hw)}{\rho_{P_0}(-Hw)} \quad \text{та} \quad \max_{\sum_1^k w_i=1,\ w\geq 0} \frac{E_{P_0}(Hw)}{D_{P_0}(-Hw)}.$$

Для цього достатньо перейти до задачі $\min\limits_{\sum_1^k w_i=1,\ w\geq 0} \dfrac{\rho_{P_0}(-Hw)}{E_{P_0}(Hw)}$ та використати результат із [19]. Своєю чергою, $\min\limits_{\sum_1^k w_i=1,\ w\geq 0} \dfrac{D_{P_0}(-Hw)}{E_{P_0}(Hw)} = \min\limits_{\sum_1^k w_i=1,\ w\geq 0} \dfrac{\rho_{P_0}(-Hw)}{E_{P_0}(Hw)} + 1.$ Як неважко бачити, оптимальні портфелі в обох випадках збігаються.

4.2. Задачі робастної за розподілом оптимізації портфеля. Розглянемо тепер ситуацію, коли вектор сценарних імовірностей оцінюється МН у вигляді $p_0 \in P_U$. Тоді можемо сформулювати задачі оптимізації портфеля, аналогічні (24), з конструкціями найгіршого випадку за МН для міри ризику (20) та середньої прибутковості (23), тобто такі задачі робастної за розподілом оптимізації портфеля:

$$\min_{\substack{\sum_1^k w_i=1,\ w\geq 0 \\ r_{P_U}[Hw]\geq r_U}} \rho_{P_U}(-Hw), \qquad \max_{\substack{\sum_1^k w_i=1,\ w\geq 0 \\ \rho_{P_U}(-Hw)\leq \rho_U}} r_{P_U}[Hw]. \tag{26}$$

Скористаємося позначеннями (21), (22), введеними для ПКМР найгіршого випадку за МН P_U для випадків C1–C3, та сформулюємо відповідну теорему.

Теорема 1. Задачі робастної за розподілом оптимізації портфеля (26) за умов їхньої сумісності для випадків C1–C3 зводяться до задач ЛП для $i=1, 2, 3$ відповідно:

$$\min_{\substack{(w,v,u) \\ \langle -c_u, v\rangle \geq r_U \\ B_u^{\mathrm{T}} v + Hw \geq 0 \\ \begin{pmatrix} \widehat{A}_i^{\mathrm{T}} \\ \widehat{B}_i^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} u \geq \begin{pmatrix} -Hw \\ o_n \end{pmatrix} \\ \sum_1^k w_i=1,\ w, v, u\geq 0}} \langle \widehat{c}_i, u\rangle, \qquad \max_{\substack{(w,v,u) \\ \langle \widehat{c}_i, u\rangle \leq \rho_U \\ B_u^{\mathrm{T}} v + Hw \geq 0 \\ \begin{pmatrix} \widehat{A}_i^{\mathrm{T}} \\ \widehat{B}_i^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} u \geq \begin{pmatrix} -Hw \\ o_n \end{pmatrix} \\ \sum_1^k w_i=1,\ w, v, u\geq 0}} \langle -c_u, v\rangle. \tag{27}$$

Доведення. Опишемо детальніше задачі (26). З урахуванням позначень (21), (22) вони мають вигляд

$$\min_{\substack{w \\ \sum_1^k w_i=1,\ w\geq 0 \\ \min\limits_{\substack{p_0 \\ B_u p_0 \leq c_u,\ p_0\geq 0}} \langle Hw, p_0\rangle \geq r_U}} \ \max_{\substack{(p, p_0) \\ \widehat{A}_i p + \widehat{B}_i p_0 \leq \widehat{c}_i,\ p,\ p_0 \geq 0}} \langle -Hw, p\rangle, \tag{28}$$

$$\max_{\substack{w \\ \sum_1^k w_i=1,\ w\geq 0 \\ \max\limits_{\substack{(p, p_0) \\ \widehat{A}_i p + \widehat{B}_i p_0 \leq \widehat{c}_i,\ p,\ p_0 \geq 0}} \langle -Hw, p\rangle \leq \rho_U}} \ \min_{\substack{p_0 \\ B_u p_0 \leq c_u,\ p_0\geq 0}} \langle Hw, p_0\rangle. \tag{29}$$

Якщо задачі (28) та (29) сумісні, то такими є й їхні внутрішні підзадачі. Отже, можемо замінити внутрішні підзадачі двоїстими, а потім зробити еквівалентні перетворення за такою відповідністю:

$$\min_{\substack{p_0 \\ B_u p_0 \leq c_u,\ p_0\geq 0}} \langle Hw, p_0\rangle \Leftrightarrow \max_{\substack{v \\ -B_u^{\mathrm{T}} v - Hw \leq 0,\ v\geq 0}} \langle -c_u, v\rangle,$$

$$\min_{\substack{B_u p_0 \le c_u,\ p_0 \ge 0}} {}_{p_0} \langle Hw, p_0 \rangle \ge r_U \Leftrightarrow \max_{\substack{-B_u^{\mathrm T} v - Hw \le 0,\ v \ge 0}} {}_{v} \langle -c_u, v \rangle \ge r_U \Leftrightarrow \exists\, v \ge 0 : \langle -c_u, v \rangle \ge r_U,$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -B_u^{\mathrm T} v - Hw \le 0$$

$$\max_{\substack{\widehat{A}_i p + \widehat{B}_i p_0 \le \widehat{c}_i,\ p,\ p_0 \ge 0}} {}_{(p, p_0)} \langle -Hw, p \rangle \Leftrightarrow \min_{\substack{\begin{pmatrix} \widehat{A}_i^{\mathrm T} \\ \widehat{B}_i^{\mathrm T} \end{pmatrix} u \ge \begin{pmatrix} -Hw \\ o_n \end{pmatrix},\ u \ge 0}} {}_{u} \langle \widehat{c}_i, u \rangle,$$

$$\max_{\substack{\widehat{A}_i p + \widehat{B}_i p_0 \le \widehat{c}_i,\ p,\ p_0 \ge 0}} {}_{(p, p_0)} \langle -Hw, p \rangle \le \rho_U \Leftrightarrow \min_{\substack{\begin{pmatrix} \widehat{A}_i^{\mathrm T} \\ \widehat{B}_i^{\mathrm T} \end{pmatrix} u \ge \begin{pmatrix} -Hw \\ o_n \end{pmatrix},\ u \ge 0}} {}_{u} \langle \widehat{c}_i, u \rangle \le \rho_U \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists\, u \ge 0 : \langle \widehat{c}_i, u \rangle \le \rho_U.$$
$$\begin{pmatrix} \widehat{A}_i^{\mathrm T} \\ \widehat{B}_i^{\mathrm T} \end{pmatrix} u \ge \begin{pmatrix} -Hw \\ o_n \end{pmatrix},\ u \ge 0$$

Зробивши зазначені еквівалентні перетворення в (28), (29), отримаємо їх у вигляді таких задач ЛП:

$$\min_{\substack{\sum_1^k w_i = 1,\ w \ge 0 \\ \langle -c_u, v \rangle \ge r_U \\ -B_u^{\mathrm T} v - Hw \le 0,\ v \ge 0}} {}_{(w, v)} \ \min_{\substack{\begin{pmatrix} \widehat{A}_i^{\mathrm T} \\ \widehat{B}_i^{\mathrm T} \end{pmatrix} u \ge \begin{pmatrix} -Hw \\ o_n \end{pmatrix},\ u \ge 0}} {}_{u} \langle \widehat{c}_i, u \rangle = \min_{\substack{\langle -c_u, v \rangle \ge r_U \\ -B_u^{\mathrm T} v - Hw \le 0 \\ \begin{pmatrix} \widehat{A}_i^{\mathrm T} \\ \widehat{B}_i^{\mathrm T} \end{pmatrix} u \ge \begin{pmatrix} -Hw \\ o_n \end{pmatrix} \\ \sum_1^k w_i = 1,\ w, v, u \ge 0}} {}_{(w, v, u)} \langle \widehat{c}_i, u \rangle,$$

$$\max_{\substack{\sum_1^k w_i = 1,\ w \ge 0 \\ \langle \widehat{c}_i, u \rangle \le \rho_u \\ \begin{pmatrix} \widehat{A}_i^{\mathrm T} \\ \widehat{B}_i^{\mathrm T} \end{pmatrix} u \ge \begin{pmatrix} -Hw \\ o_n \end{pmatrix},\ u \ge 0}} {}_{w} \ \max_{\substack{-B_u^{\mathrm T} v - Hw \le 0,\ v \ge 0}} {}_{v} \langle -c_u, v \rangle = \max_{\substack{\langle \widehat{c}_i, u \rangle \le \rho_U \\ -B_u^{\mathrm T} v - Hw \le 0 \\ \begin{pmatrix} \widehat{A}_i^{\mathrm T} \\ \widehat{B}_i^{\mathrm T} \end{pmatrix} u \ge \begin{pmatrix} -Hw \\ o_n \end{pmatrix} \\ \sum_1^k w_i = 1,\ w, v, u \ge 0}} {}_{(w, v, u)} \langle -c_u, v \rangle.$$

Праві частини отриманих рівностей є задачами (27) із твердження теореми 1, що й завершує доведення.

Розглянемо тепер задачі оптимізації портфеля вигляду (26), але з оцінюванням ризику поліедральною мірою відхилення $D_{p_0}(X) = \rho_{p_0}(X - E_{p_0}(X))$:

$$\min_{\substack{\sum_1^k w_i = 1,\ w \ge 0 \\ r_{P_U}[Hw] \ge r_U}} D_{P_U}(-Hw), \quad \max_{\substack{\sum_1^k w_i = 1,\ w \ge 0 \\ D_{P_U}(-Hw) \le d_U}} r_{P_U}[Hw]. \tag{30}$$

За допомогою міркувань, аналогічних попереднім, отримаємо теорему.

Теорема 2. Задачі робастної за розподілом оптимізації портфеля (30) за умов їхньої сумісності для випадків С1–С3 зводяться до задач ЛП для $i = 1, 2, 3$ відповідно:

$$\min_{\substack{\langle -c_u, v \rangle \ge r_U \\ B_u^{\mathrm T} v + Hw \ge 0 \\ \begin{pmatrix} \widehat{A}_i^{\mathrm T} \\ \widehat{B}_i^{\mathrm T} \end{pmatrix} u \ge \begin{pmatrix} -Hw \\ Hw \end{pmatrix} \\ \sum_1^k w_i = 1,\ w, v, u \ge 0}} {}_{(w, v, u)} \langle \widehat{c}_i, u \rangle, \quad \max_{\substack{\langle \widehat{c}_i, u \rangle \le \rho_U \\ B_u^{\mathrm T} v + Hw \ge 0 \\ \begin{pmatrix} \widehat{A}_i^{\mathrm T} \\ \widehat{B}_i^{\mathrm T} \end{pmatrix} u \ge \begin{pmatrix} -Hw \\ Hw \end{pmatrix} \\ \sum_1^k w_i = 1,\ w, v, u \ge 0}} {}_{(w, v, u)} \langle -c_u, v \rangle.$$

Розглянемо тепер оптимізацію портфеля за відношенням Шарпа $\dfrac{r_{P_U}(.)}{\rho_{P_U}(.)}$ та $\dfrac{r_{P_U}(.)}{D_{P_U}(.)}$, тобто задачі максимізації $\max\limits_{\sum_1^k w_i=1,\ w\geq 0} \dfrac{r_{P_U}(Hw)}{\rho_{P_U}(-Hw)}$ та $\max\limits_{\sum_1^k w_i=1,\ w\geq 0} \dfrac{r_{P_U}(Hw)}{D_{P_U}(-Hw)}$.

Якщо компоненти описаних дробів позитивні, оптимальні портфелі можна знайти як розв'язки задач мінімізації обернених дробів, тобто

$$\min_{\sum_1^k w_i=1,\ w\geq 0} \frac{\rho_{P_U}(Hw)}{r_{P_U}(Hw)}, \quad \min_{\sum_1^k w_i=1,\ w\geq 0} \frac{D_{P_U}(Hw)}{r_{P_U}(Hw)}. \tag{31}$$

З використанням позначень (21), (22) представимо їх як задачі ЛП.

Теорема 3. Якщо знаменники в задачах (31) не дорівнюють нулю, оптимальними портфелями для (31) для випадків С1–С3 є $w=\widetilde{w}/t$ у розв'язках $(\widetilde{w}, t, \widetilde{u}, \widetilde{v})$ задач ЛП для $i=1,2,3$ відповідно:

$$\min_{\substack{(\widetilde{w},\widetilde{v},\widetilde{u},t) \\ \langle -c_u,\widetilde{v}\rangle=1 \\ B_u^{\mathrm{T}}\widetilde{v}+H\widetilde{w}\geq 0 \\ \begin{pmatrix}\widehat{A}_i^{\mathrm{T}} \\ \widehat{B}_i^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\widetilde{u}\geq\begin{pmatrix}-H\widetilde{w} \\ o_n\end{pmatrix} \\ \sum_1^k \widetilde{w}_i=t,\ \widetilde{w},\widetilde{v},\widetilde{u},t\geq 0}} \langle \widehat{c}_i, u\rangle, \qquad \min_{\substack{(\widetilde{w},\widetilde{v},\widetilde{u},t) \\ \langle -c_u,\widetilde{v}\rangle=1 \\ B_u^{\mathrm{T}}\widetilde{v}+H\widetilde{w}\geq 0 \\ \begin{pmatrix}\widehat{A}_i^{\mathrm{T}} \\ \widehat{B}_i^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\widetilde{u}\geq\begin{pmatrix}-H\widetilde{w} \\ H\widetilde{w}\end{pmatrix} \\ \sum_1^k \widetilde{w}_i=t,\ \widetilde{w},\widetilde{v},\widetilde{u},t\geq 0}} \langle \widehat{c}_i, u\rangle.$$

Теорему 3 доводять із застосуванням міркувань, що використовуються для доведення теореми 6 у [19], до результатів теорем 1, 2.

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто апарат ПКМР та їхні конструкції найгіршого випадку за МН. Обчислення таких конструкцій ПКМР для поліедральної МН, а також задачі робастної за розподілом оптимізації портфеля з їхнім використанням зведено до відповідних задач ЛП.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Delage E., Ye Y. Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems. *Operations Research*. 2010. Vol. 58, N 3. P. 595–612. https://doi.org/10.1287/opre.1090.0741.
2. Wiesemann W., Kuhn D., Sim M. Distributionally robust convex optimization. *Operations Research*. 2014. Vol. 62, N 6. P. 1358–1376. https://doi.org/10.1287/opre.2014.1314.
3. Shapiro A. Distributionally robust stochastic programming. *SIAM Journal on Optimization*. 2017. Vol. 27, N 4. P. 2258–2275. https://doi.org/10.1137/16M1058297.
4. Mohajerin Esfahani P., Kuhn D. Data-driven distributionally robust optimization using the Wasserstein metric: performance guarantees and tractable reformulations. *Mathematical Programming*. 2018. Vol. 171, N 1–2. P. 115–166. https://doi.org/10.1007/s10107-017-1172-1.
5. Bertsimas D., Sim M., Zhang M. Adaptive distributionally robust optimization. *Management Science*. 2018. Vol. 65, N 2. P. 604–618. https://doi.org/10.1287/mnsc.2017.2952.
6. Lin F., Fang X., Gao Zh. Distributionally robust optimization: a review on theory and applications. *Numerical Algebra, Control and Optimization*. 2022. Vol. 12, N 1. P. 159–212. https://doi.org/10.3934/naco.2021057.
7. Artzner P., Delbaen F., Eber J.M., Heath D. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance.* 1999. Vol. 9, N 3. P. 203–228. https://doi.org/10.1111/1467-9965.00068.

8. Rockafellar R.T. Convex analysis. Princeton: Princeton University Press, 1970. 451 p.
9. Föllmer H., Schied A. Convex measures of risk and trading constraints. *Finance Stochastics*. 2002. Vol. 6, N 4. P. 429–447. https://doi.org/10.1007/s007800200072.
10. Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczynski A. Lectures on stochastic programming. Modeling and theory. Philadelphia: SIAM, 2009. 436 p.
11. Rockafellar R.T., Uryasev S. Conditional value-at-risk for general loss distribution. *J. Banking and Finance.* 2002. Vol. 26, N 7. P. 1443–1471. https://doi.org/10.1016/S0378-4266(02)00271-6.
12. Ben-Tal A.. Teboulle M., An old-new concept of convex risk measures: An optimized certainty equivalent, *Mathematical Finance*. 2007. Vol. 17, N 3. P. 449–476. https://doi.org/10.1111/j.1467-9965.2007.00311.x.
13. Kirilyuk V.S. Risk measures in the form of infimal convolution. *Cybernetics and System Analysis.* 2021. Vol. 57, N 1. P. 30–46. https://doi.org/10.1007/s10559-021-00327-z.
14. Kirilyuk V.S. The class of polyhedral coherent risk measures. *Cybernetics and System Analysis.* 2004. Vol. 40, N 4. P. 599–609. https://doi.org/10.1023/B:CASA.0000047881.82280.e2.
15. Kirilyuk V.S. Risk measures in stochastic programming and robust optimization problems. *Cybernetics and System Analysis*. 2015. Vol. 51, N 6. P. 874–885. https://doi.org/10.1007/s10559-015-9780-3.
16. Kirilyuk V.S. Polyhedral coherent risk measures and robust optimization. C*ybernetics and System Analysis*. 2019. Vol. 55, N 6. P. 999–1008. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00210-y.
17. Rockafellar R.T., Uryasev S., Zabarankin M. Generalized deviations in risk analysis. *Finance and Stochastics*. 2006. Vol. 10, N 1. P. 51–74. https://doi.org/10.1007/s00780-005-0165-8.
18. Markowitz H.M. Portfolio selection. *Journal of Finance.* 1952. Vol. 7, N 1. P. 77–91. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x.
19. Kirilyuk V.S. Polyhedral coherent risk measures and optimal portfolios on the reward-risk ratio. *Cybernetics and System Analysis*. 2014. Vol. 50, N 5. P. 724–740. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9663-z.

V.S. Kirilyuk

POLYHEDRAL COHERENT RISK MEASURE AND DISTRIBUTIONALLY ROBUST PORTFOLIO OPTIMIZATION

Abstract. Polyhedral coherent risk measures and their worst-case constructions on an ambiguity set are considered. For the case of a discrete distribution and a polyhedral ambiguity set calculating such risk measures is reduced to linear programming problems. The distributionally robust portfolio optimization problems based on the reward-risk ratio using worst-case constructions on the polyhedral ambiguity set for these risk measures and average return are analyzed. They are reduced to the appropriate linear programming problems.

Keywords: coherent risk measure, polyhedral coherent risk measure, conditional value-at-risk, ambiguity set, distributionally robust optimization, optimized certainty equivalent, portfolio optimization, deviation measure.

Надійшла до редакції 05.09.2022