

С.В. ЯКОВЛЕВ

Національний аерокосмічний університет ім. М.С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна; Лодзинський політехнічний університет, Лодзь, Польща, e-mail: svsyak7@gmail.com.

КОНЦЕПЦІЯ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ РОЗМІЩЕННЯ ТА ПОКРИТТЯ З ВИКОРИСТАННЯМ СУЧАСНИХ ПАКЕТІВ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Анотація. Розглянуто клас геометричних задач розміщення та покриття. Запропоновано нову концепцію їхнього математичного моделювання з використанням спеціального класу функцій. Для розв'язування задач використано спеціальні бібліотеки програм обчислювальної геометрії, які не потребують аналітичного вигляду функцій, що описують умови розміщення та покриття, але дають змогу здійснювати їхню перевірку. Обґрунтовано скорочення обчислювальних витрат, що розширює можливості ефективного застосування методів локальної та глобальної оптимізації. Наведено результати розв'язування тестових задач максимального покриття прямокутної області сукупністю еліпсів заданих розмірів та задачу розміщення еліпсів у прямокутнику мінімальної площі.

Ключові слова: задачі розміщення та покриття, математичне моделювання, пакети обчислювальної геометрії, оптимізація.

ВСТУП

Задачі розміщення та покриття завжди привертали особливу увагу науковців. З одного боку, це пов'язано з класичними постановками цих задач, якими цікавились математики. Перш за все йдеться про оцінки щільності покриття та розміщення ідентичних фігур простої форми у разі їхнього розташування у всьому просторі, витоки яких ґрунтуються на фундаментальних роботах Л.Ф. Тота та К.А. Роджерса [1, 2]. З іншого боку, задачі розміщення та покриття широко застосовують у різних галузях виробництва та забезпечення життєдіяльності суспільства. Це потребує побудови адекватних математичних моделей задач, що виводить їх за межі класичних постановок. Клас задач, пов'язаних з обробленням і перетворенням геометричної інформації під час синтезу складних систем з урахуванням просторової форми складових об'єктів, називають задачами геометричного проектування [3, 4]. Саме розвиток засобів обчислювальної техніки та програмного забезпечення став суттєвим поштовхом до дослідження ефективних методів розв'язування цих задач. Аналіз безлічі сучасних підходів для розв'язання прикладних задач розміщення та покриття не є метою цієї статті. Основну увагу приділено математичному моделюванню взаємного розташування геометричних об'єктів довільної просторової форми, адже формалізація і врахування відповідних вимог є обов'язковим етапом будь-якого методу розв'язування задач геометричного проектування.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ПОЗНАЧЕННЯ

Розглянемо в арифметичному Евклідовому просторі R^d , $d = 2, 3$, множину геометричних об'єктів $\Omega = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$. Уведемо такі позначення для множин індексів: $\mathbf{J}_n = \{1, \dots, n\}$, $\mathbf{J}_n^0 = \mathbf{J}_n \cup \{0\} = \{0, 1, \dots, n\}$. Під геометричним об'єктом $S_i \subset R^d$, $i \in \mathbf{J}_n^0$, будемо розуміти геометричне місце точок $P \in R^d$, що задовольняють нерівності $f_i(P, \mathbf{m}^i) \geq 0$. При цьому рівняння $f_i(P, \mathbf{m}^i) = 0$ задає

межу об'єкта S_i та визначає його форму. У загальному випадку функції $f_i(P, \mathbf{m}^i)$ містять константи $\mathbf{m}^i = (m_1^i, \dots, m_{\alpha_i}^i)$, які назвемо метричними параметрами просторової форми об'єкта S_i . Ці параметри визначають лінійні розміри відповідних об'єктів.

Розглянемо у просторі R^d , $d=2,3$, нерухому Декартову систему координат, а з кожним об'єктом $S_i \subset R^d$, $i \in \mathbf{J}_n^0$, пов'яжемо власну систему координат, початок якої називають полюсом об'єкта. Взаємне розташування цих систем буде характеризуватися параметрами $\mathbf{p}^i = (p_1^i, \dots, p_{\beta_i}^i) = (\mathbf{v}^i, \boldsymbol{\theta}^i)$, $i \in \mathbf{J}_n^0$, де \mathbf{v}^i — вектор координат полюса об'єкта S_i в нерухомій системі координат, а $\boldsymbol{\theta}^i$ — вектор куткових параметрів, що визначають взаємне розташування осей власної і нерухомої систем координат. Компоненти вектора $\mathbf{p}^i = (p_1^i, \dots, p_{\beta_i}^i)$ визначають положення об'єкта S_i у просторі R^d , $d=2,3$, і називаються параметрами розміщення. Водночас положення об'єкта S_i щодо нерухомої системи координат задають рівнянням загального положення, яке має вигляд

$$F_i(P, \mathbf{m}^i, \mathbf{v}^i, \boldsymbol{\theta}^i) = f_i(A(P - \mathbf{v}^i), \mathbf{m}^i) = 0,$$

де A — ортогональний оператор, виражений через кутові параметри $\boldsymbol{\theta}^i$.

Введемо поняття просторової конфігурації геометричних об'єктів. Відповідно до [5] під конфігурацією розуміють відображення $\eta: \Omega \rightarrow \Sigma$ вихідної множини Ω елементів довільної природи в абстрактну множину Σ певної структури за умови виконання заданого набору обмежень Λ . Скористаємося цим визначенням для формалізації просторової конфігурації геометричних об'єктів, поклавши $\Omega = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$, і з'ясуємо структуру множини Σ та набір обмежень Λ . Множину Σ далі називатимемо результативною або складним геометричним об'єктом.

Структуру результативної множини Σ для відображення $\eta: \Omega \rightarrow \Sigma$ будемо формувати за допомогою теоретико-множинних операцій. Далі, наголошуючи на тому, що структуру множини Σ побудовано за вказаним відображенням, будемо додавати до Σ індекс η , тобто отримаємо $\eta: \Omega \rightarrow \Sigma_\eta$, де $\Sigma_\eta = \eta(S_0, S_1, \dots, S_n)$.

Зазначимо, що під час розгляду будь-яких теоретико-множинних операцій над геометричними об'єктами вихідної множини Ω , можна будувати безліч просторових конфігурацій. Втім, для задач розміщення та покриття у межах цієї статті обмежимося відображенням

$$\varphi: \Omega \rightarrow \Sigma_\varphi, \quad (1)$$

де

$$\Sigma_\varphi = \varphi(S_0, S_1, \dots, S_n) = S_0 \cap \bigcup_{i=1}^n S_i. \quad (2)$$

У задачах розміщення об'єкт S_0 називають областю розміщення або контейнером, а S_i , $i \in \mathbf{J}_n$, — об'єктами, що розміщуються. У задачах покриття S_0 називають областю покриття, а S_i , $i \in \mathbf{J}_n$, — об'єктами, що покривають.

Розглянемо набори обмежень Λ для класичних задач розміщення та покриття. Базовими для задач розміщення є умови взаємного неперетинання об'єктів S_i , $i \in \mathbf{J}_n$, тобто $S_i \cap S_j = \emptyset \quad \forall i, j \in \mathbf{J}_n, i \neq j$, та умови включення до контейнера, тобто $S_i \subseteq S_0 \quad \forall i \in \mathbf{J}_n$. Для задач покриття умовою покриття є

$$S_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^n S_i,$$

тобто кожна точка області покриття має належати хоча б одному покривальному об'єкту.

Для формалізації обмежень у задачах розміщення та покриття скористаємося концепцією побудови конфігураційних просторів геометричних об'єктів [6]. Конфігураційний простір $\Xi(S)$ геометричного об'єкта S визначається сукупністю узагальнених змінних, що задають як взаємне розташування деякої системи просторових об'єктів у просторі, так і їхнє розташування відносно заданої системи координат. Як узагальнені змінні для геометричних об'єктів природно вибрати їхні метричні параметри та параметри розміщення.

Нехай $\Omega = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$ — вихідна множина геометричних об'єктів з метричними параметрами форми $\mathbf{m}^i = (m_1^i, \dots, m_{\alpha_i}^i)$ та параметрами розміщення $\mathbf{p}^i = (p_1^i, \dots, p_{\beta_i}^i) = (\mathbf{v}^i, \boldsymbol{\theta}^i), i \in \mathbf{J}_n^0$. Визначимо узагальнені змінні $\mathbf{g}^i = (\mathbf{m}^i, \mathbf{p}^i) = (m_1^i, \dots, m_{\alpha_i}^i, p_1^i, \dots, p_{\beta_i}^i)$ об'єктів S_i та сформуємо відповідні конфігураційні простори $\Xi(S_i), i \in \mathbf{J}_n^0$ [6, 7]. Об'єкт S_i з узагальненими змінними \mathbf{g}^i позначимо $S_i(\mathbf{g}^i)$. Побудуємо конфігураційний простір $\Xi(\Omega) = \Xi(S_0) \times \Xi(S_1) \times \dots \times \Xi(S_n)$ з узагальненими змінними $\mathbf{g}^i, i \in \mathbf{J}_n^0$, і позначимо $\mathbf{g} = (\mathbf{g}^0, \mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^n)$. У цьому просторі об'єкту S_i відповідає параметризований об'єкт $S_i(\mathbf{g}^i)$, а складному об'єкту Σ_φ — параметризований об'єкт

$$\Sigma_\varphi(\mathbf{g}) = \varphi(S_0(\mathbf{g}^0), S_1(\mathbf{g}^1), \dots, S_n(\mathbf{g}^n)) = S_0(\mathbf{g}^0) \cap \bigcup_{i=1}^n S_i(\mathbf{g}^i). \quad (3)$$

Відображення (1) задає конфігурацію розміщення [7], якщо виконується набір обмежень Λ , який можна записати так:

$$S_i(\mathbf{g}^i) \cap S_j(\mathbf{g}^j) = \emptyset \quad \forall i, j \in \mathbf{J}_n, i \neq j, \quad (4)$$

$$S_i(\mathbf{g}^i) \subseteq S_0(\mathbf{g}^0) \quad \forall i \in \mathbf{J}_n. \quad (5)$$

Відображення (1) задає конфігурацію покриття [7] за виконання обмеження Λ у вигляді

$$S_0(\mathbf{g}^0) \subseteq \bigcup_{i=1}^n S_i(\mathbf{g}^i). \quad (6)$$

2. ЗАСОБИ ФОРМАЛІЗАЦІЇ УМОВ РОЗМІЩЕННЯ ТА ПОКРИТТЯ

Дослідження задач розміщення у загальному випадку ґрунтується на формалізації умов (3), (4) в аналітичному вигляді для довільних просторових форм об'єктів. Зазначимо, що для побудови рівняння межі складного об'єкта В.Л. Рвачовим запропоновано теорію R -функцій [8]. Однак, у задачах розміщення та покриття розглядають взаємовідношення принаймні двох об'єктів. У цьому разі R -функції насамперед становлять інтерес під час аналітичного опису межі кожного з них.

2.1. Метод Φ -функцій. Для формалізації умов неперетину двох об'єктів та включення одного до іншого Ю.Г. Стоян розробив теорію Φ -функцій [4, 9]. Розглянемо геометричні об'єкти $S_1(\mathbf{g}^1)$ та $S_2(\mathbf{g}^2)$, де $\mathbf{g}^i = (\mathbf{m}^i, \mathbf{p}^i)$, $\mathbf{m}^i = (m_1^i, \dots, m_{\alpha_i}^i)$, $\mathbf{p}^i = (p_1^i, \dots, p_{\beta_i}^i), i = 1, 2$. Відповідно до [9], будь-яка всюди визначена неперервна на R^d функція $\Phi: R^d \rightarrow R^1$ називається Φ -функцією геометричних об'єктів $S_1(\mathbf{g}^1)$ та $S_2(\mathbf{g}^2)$ за виконання таких умов:

$$\Phi_{S_1, S_2}(\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2) > 0, \text{ якщо } S_1(\mathbf{g}^1) \cap S_2(\mathbf{g}^2) = \emptyset;$$

$$\begin{aligned} \Phi_{S_1 S_2}(\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2) &= 0, \text{ якщо } \text{fr } S_1(\mathbf{g}^1) \cap \text{fr } S_2(\mathbf{g}^2) \neq \emptyset \text{ та } \text{int } S_1(\mathbf{g}^1) \cap \text{int } S_2(\mathbf{g}^2) = \emptyset; \\ \Phi_{S_1 S_2}(\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2) &< 0, \text{ якщо } \text{int } S_1(\mathbf{g}^1) \cap \text{int } S_2(\mathbf{g}^2) \neq \emptyset, \end{aligned}$$

де int та fr — оператори топологічної внутрішності та межі відповідного геометричного об'єкта, а $d = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2$.

Побудова Φ -функцій об'єктів $S_1(\mathbf{g}^1)$ та $S_2(\mathbf{g}^2)$ залежить від їхньої форми, тому для складних геометричних об'єктів виділено класи базових та складених 2D та 3D об'єктів [9–12]. Однак, Φ -функції не завжди вдається застосувати для деяких форм об'єктів, зокрема для еліпсів та еліпсоїдів. У цих випадках пропонують використовувати так звані квазі- Φ -функції [13–15], які залежать не тільки від параметрів розміщення об'єктів, а й від додаткових змінних, що призводить до збільшення розмірності задачі.

Окремо зазначимо, що загальну теорію Φ -функцій можна застосовувати для урахування відстаней між об'єктами, для чого будують нормалізовані та псевдонормалізовані Φ -функції [9–18].

У задачах розміщення умови неперетину об'єктів (4) можна записати як

$$\Phi_{S_i S_j}(\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j) \geq 0 \quad \forall i, j \in \mathbf{J}_n, \quad j > i, \quad (7)$$

а умови включення в контейнер (5) набудуть вигляду

$$\Phi_{cS_0 S_i}(\mathbf{g}^0, \mathbf{g}^i) \geq 0 \quad \forall i \in \mathbf{J}_n, \quad (8)$$

де $\Phi_{S_i S_j}(\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j)$ — Φ -функції об'єктів $S_i(\mathbf{g}^i)$ та $S_j(\mathbf{g}^j)$, а $\Phi_{cS_0 S_i}(\mathbf{g}^0, \mathbf{g}^i)$ — Φ -функції об'єктів $cS_0(\mathbf{g}^0)$ та $S_i(\mathbf{g}^i)$. Тут і далі c — позначення теоретико-множинної операції доповнення.

Набагато складніше формалізувати за допомогою Φ -функцій умову покриття (6). Відомо, що Φ -функції описують взаємовідношення двох геометричних об'єктів тоді, коли конфігурація покриття включає всі об'єкти одночасно. У першому виданні монографії [4] описано загальний підхід до застосування Φ -функцій у задачах покриття. Це потребує узагальнення теорії Φ -функцій на випадок параметризованих складних геометричних об'єктів. Завдяки введенню конфігураційного простору геометричних об'єктів з'явилася можливість принаймні у коректній математичній формі записати умови покриття у загальному випадку. Основна ідея цього підходу полягає у формуванні складеного параметризованого об'єкта

$$S(\mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^n) = \bigcup_{i=1}^n S_i(\mathbf{g}^i)$$

з подальшою побудовою Φ -функції об'єктів $S(\mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^n)$ та $S_0(\mathbf{g}^0)$. У результаті маємо умову покриття у вигляді

$$\Phi_{cS_0 S_i}(\mathbf{g}^0, \mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^n) \geq 0.$$

Цей підхід реалізовано під час розв'язування окремих класів задач покриття прямокутними об'єктами [19] та паралелепіпедами [20]. Для об'єктів складної форми виникають труднощі у побудові відповідних Φ -функцій, які досі не вдалося подолати.

Окремо зазначимо, що для орієнтованих геометричних об'єктів, які мають форму багатокутника чи багатогранника, можна застосовувати апарат структур лінійних нерівностей [21]. Це проілюстровано для задач розміщення, наприклад у роботах [4, 21, 22], а для задач покриття — у [23, 24].

2.2. Метод ω -функцій. Аналіз сучасних методів формалізації умов розміщення та покриття свідчить про потребу в аналітичному описі залежності відстані між геометричними об'єктами від їхніх просторових форм та параметрів розміщення. В окремих випадках за допомогою нормалізованих та псевдонормалізованих Φ -функцій вдається отримати необхідні формули, незважаючи на їхню громіздкість [9–12]. Заразом, завдяки розвитку засобів обчислювальної техніки можна запропонувати принципово інакший підхід до математичного моделювання просторових конфігурацій розміщення та покриття. В основу цього підходу покладено обчислення площі (об'єму) відповідної конфігурації з використанням сучасних пакетів обчислювальної геометрії.

Нехай у просторі R^d , $d=2, 3$, задано вимірні за Лебегом геометричні об'єкти $\Omega = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$. Сформуємо конфігураційний простір $\Xi(\Omega) = \Xi(S_0) \times \Xi(S_1) \times \dots \times \Xi(S_n)$ з узагальненими змінними \mathbf{g}^i , $i \in \mathbf{J}_n^0$. Використовуючи відображення $\eta: \Omega \rightarrow \Sigma_\eta$, побудуємо складний геометричний об'єкт $\Sigma_\eta = \eta(S_0, S_1, \dots, S_n)$, якому у конфігураційному просторі $\Xi(\Omega)$ відповідає параметризований об'єкт $\Sigma_\eta(\mathbf{g}) = \eta(S_0(\mathbf{g}^0), S_1(\mathbf{g}^1), \dots, S_n(\mathbf{g}^n))$.

Визначимо функцію

$$\omega_\eta(\mathbf{g}) = \mu(\Sigma_\eta(\mathbf{g})), \quad (9)$$

де $\mu(\cdot)$ — міра Лебега відповідної множини.

Функцію $\omega_\eta: \Xi(\Omega) \rightarrow R^1$, визначену за виразом (9), називають ω -функцією [24]. Властивості ω -функцій залежно від вибору узагальнених змінних $\mathbf{g} = (\mathbf{g}^0, \mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^n)$ конфігураційного простору $\Xi(\Omega)$ та вибраного відображення $\eta: \Omega \rightarrow \Sigma_\eta$ описано у [25].

Для формалізації ω -функції введемо характеристичну функцію

$$\lambda_{\Sigma_\eta}(P, \mathbf{g}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } P \in \Sigma_\eta(\mathbf{g}); \\ 0, & \text{якщо } P \notin \Sigma_\eta(\mathbf{g}). \end{cases}$$

Тоді для $P \in R^d$, $d=2, 3$, маємо

$$\omega_\eta(\mathbf{g}) = \begin{cases} \iint \lambda_{\Sigma_\eta}(P, \mathbf{g}) dP, & \text{якщо } P \in R^2, \\ \iiint \lambda_{\Sigma_\eta}(P, \mathbf{g}) dP, & \text{якщо } P \in R^3. \end{cases}$$

Зазначимо, що це визначення ω -функції корелює з теорією функцій множин [26], але має певні відмінності, пов'язані з тим, що ω -функції розглядаються в конфігураційному просторі геометричних об'єктів заданої просторової форми та залежать від їхніх узагальнених змінних. У теорії функцій множин розглядають скінченний простір (X, U, μ) , де X — непорожня множина, U — деяка σ -алгебра її підмножин з одиницею $E = X$, μ — σ -адитивна міра, визначена на U . При цьому довільну множину $S \in U$ ідентифікують її характеристичною функцією $\chi_S \in L_1(X, U, \mu)$ у нормованом просторі L_1 , елементами якого є класи еквівалентних між собою сумовних функцій. На цій основі у роботах [27, 28] розроблено математичну теорію неперервних задач оптимального розбиття множин n -вимірною евклідового простору як неklasичних задач нескінченновимірною математичного програмування з булевими змінними.

Формалізуємо умови розміщення та покриття з використанням ω -функцій. Як вже зазначено, для цього потрібно визначитись із вихідною множиною, структурою результативної множини та узагальненими змінними відповідного конфігураційного простору.

Нехай $\Omega_{ij} = \{S_i, S_j\}$, $i, j \in \mathbf{J}_n$, $j > i$, — вихідна множина, а структура результативної множини задається відображенням $\chi: \Omega_{ij} \rightarrow \Sigma_{\chi}^{ij}$, де $\Sigma_{\chi}^{ij} = \chi(S_i, S_j) = S_i \cap S_j$. Тоді у конфігураційному просторі $\Xi(\Omega_{ij}) = \Xi(S_i) \times \Xi(S_j)$ з узагальненими змінними $(\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j)$ умови неперетину (4) набудуть вигляду

$$\omega_{\chi}(\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j) = \mu(\Sigma_{\chi}^{ij}(\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j)) = 0 \quad \forall i, j \in \mathbf{J}_n, j > i. \quad (10)$$

Для формалізації умови включення у контейнер розглянемо множини $\Omega_{0j} = \{S_0, S_j\}$, $j \in \mathbf{J}_n$, і покладемо $\Sigma_{\chi}^{0j} = \chi(cS_0, S_j) = cS_0 \cap S_j$. Тоді обмеження (5) можна записати у такому еквівалентному вигляді:

$$\omega_{\chi}(\mathbf{g}^0, \mathbf{g}^j) = \mu(\Sigma_{\chi}^{0j}(\mathbf{g}^0, \mathbf{g}^j)) = 0 \quad \forall j \in \mathbf{J}_n. \quad (11)$$

Окремо зазначимо, що кількість нерівностей чи рівнянь у разі формалізації умов (4), (5) з використанням Φ - або ω -функцій дорівнює $n(n+1)/2$, тобто квадратично залежить від кількості об'єктів n .

З іншого боку, для вихідної множини $\Omega = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$ розглянемо структуру складного об'єкта Σ_{φ} у вигляді (2) та визначимо у конфігураційному просторі $\Xi(\Omega) = \Xi(S_0) \times \Xi(S_1) \times \dots \times \Xi(S_n)$ ω -функцію за виразом (8):

$$\omega_{\varphi}(\mathbf{g}) = \mu(\Sigma_{\varphi}(\mathbf{g})). \quad (12)$$

Тоді у задачах розміщення умови (4), (5) виконуються одночасно тоді й тільки тоді, якщо

$$\omega_{\varphi}(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^n \mu(S_i(\mathbf{g}^i)), \quad (13)$$

а умову покриття (6) можна записати так:

$$\omega_{\varphi}(\mathbf{g}) = \mu(S_0(\mathbf{g}^0)). \quad (14)$$

Зазначимо, що для фіксованих метричних параметрів об'єктів S_i , $i \in \mathbf{J}_n^0$, праві частини рівнянь (13), (14) не залежать від параметрів розміщення $\mathbf{p}^i = (p_1^i, \dots, p_{\beta_i}^i)$ і є константами.

Отже, систему обмежень для конфігурацій як розміщення, так і покриття задають лише одним рівнянням.

3. ЗАСТОСУВАННЯ СУЧАСНИХ ПАКЕТІВ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ Φ - ТА ω -ФУНКЦІЙ

Для формалізації набору обмежень Λ використовують аналітичні методи побудови нормалізованих та псевдонормалізованих Φ -функції, тобто встановлюють формули, за якими обчислюють значення цих функцій залежно від параметрів розміщення об'єктів. Використовуючи ω -функції, науковці не ставлять за мету отримати їхній аналітичний вигляд для довільних просторових конфігурацій, хоча в деяких випадках це не так вже й складно. Основна ідея полягає у застосуванні сучасних пакетів обчислювальної геометрії для розрахунку площі (об'єму) результативної множини відповідної структури. При цьому операції здійснюють з класами геометричних об'єктів. Ці класи визнача-

ються просторовими формами об'єктів (полігон, коло, еліпс, сфера, багатогранник, еліпсоїд тощо), а метричні параметри та параметри розміщення лише ідентифікують об'єкт, що розглядається.

Під час роботи з геометричними об'єктами заданої форми можна знайти потужний перелік бібліотек, що дають змогу працювати з цими фігурами, зокрема *SymPy*, *Shapely*, *CGAL*, *SpaceFuncs* та багато інших. На основі аналізу наявних бібліотек з урахуванням необхідного функціоналу для обчислення ω -функції просторових конфігурацій (складних геометричних об'єктів) вибрано бібліотеку *Shapely* [29, 30]. Бібліотека *Shapely* — це пакет *Python* для теоретичного аналізу точкових множин і маніпулювання площинними об'єктами з використанням через модуль *ctypes Python* функцій із добре відомої та широко розгорнутої бібліотеки *GEOS*. Зазначимо, що *GEOS* як порт пакету *Java Topology Suite (JTS)* є механізмом геометрії просторового розширення *PostGIS* для СУБД *PostgreSQL*. Отже, пакет *Shapely*, з одного боку, є глибоко вкоріненим у конвенціях світу географічних інформаційних систем (ГІС), а з іншого боку є корисним для програмістів, які працюють над розв'язанням нетрадиційних проблем, зокрема в галузі оброблення зображень і геометричного проектування.

Саме за допомогою бібліотеки *Shapely* можна будувати складні фігури шляхом здійснення теоретико-множинних операцій над геометричними об'єктами (об'єднання, перетину, симетричної різниці, добутку) з множини базових фігур (круг, еліпс, багатокутник тощо), а також здійснювати такі самі операції над довільними складними фігурами, що будуються за допомогою базових. Використання функції *unary_union()* в *shapely.ops* дає змогу будувати об'єднання фігур одночасно, що набагато ефективніше аніж послідовне накопичення за допомогою операції *union()*. Набір функцій афінного перетворення міститься у модулі *shapely.affinity*, який перетворює геометричні фігури шляхом безпосереднього надання коефіцієнтів матриці афінного перетворення або за допомогою спеціального іменованого перетворення (повороту, масштабу тощо). Зазначимо, що геометричні об'єкти створюють у типовий спосіб *Python*, використовуючи самі класи як фабрики екземплярів.

Принциповою властивістю бібліотеки *Shapely* є можливість обчислювати площу будь-якого складного об'єкта за допомогою поля *area*. З огляду на наведені міркування можна стверджувати, що для побудови результативної множини та обчислення її площі перспективним є використання саме бібліотеки *Shapely*.

Особливістю запропонованого підходу є те, що він не обмежується класами базових форм геометричних об'єктів, для яких на сьогодні вдалося отримати аналітичні вирази для Φ - та ω -функцій. Зрозуміло, що при цьому виникає потреба у дослідженні обчислювальної складності підходу. У роботах [31, 32] описано низку експериментів з метою встановлення залежності часу обчислення площі конфігурації (3) від кількості об'єктів. Розглянуто геометричні об'єкти $\Omega = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$, що мають форму еліпса. Їхні метричні параметри (півосі) задано у випадковий спосіб. Задля коректності експерименту параметри розміщення еліпсів вибрано рівномірно розподіленими в області S_0 . Її метричні параметри на 10 % перевищували сумарну площу об'єктів. Експерименти проведено для різної кількості об'єктів $n \leq 500$. Автори дійшли висновку, що розрахунок площі конфігурації у задачах розміщення і покриття потребує часу, на порядок меншого за час, потрібний для перевірки всіх $n(n+1)/2$ обмежень щодо неперетину об'єктів та включення їх до області S_0 .

4. ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ КОНЦЕПЦІЇ В ЗАДАЧАХ ОПТИМІЗАЦІЇ

У класичних екстремальних задачах розміщення та покриття функція, яку оптимізують, залежить від узагальнених змінних $\mathbf{g} = (\mathbf{g}^0, \mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^n)$ геометричних об'єктів $\Omega = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$, тобто маємо задачу нелінійної оптимізації

$$F(\mathbf{g}) \rightarrow \min_{\mathbf{g} \in G}, \quad (15)$$

де G — множина допустимих розв'язків.

Властивості задачі (15) залежать від аналітичного вигляду цільової функції $F(\mathbf{g})$ та властивостей функцій, що задають G . Для задач розміщення множина G описується умовами неперетину об'єктів S_1, \dots, S_n та включення їх до контейнера S_0 . Ці умови можна записати з використанням теорії Φ -функцій у вигляді системи нерівностей (7), (8), де аналітичний вигляд функцій $\Phi_{S_i S_j}(\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j)$ та $\Phi_{cS_0 S_i}(\mathbf{g}^0, \mathbf{g}^i)$, $i, j \in \mathbf{J}_n$, $j > i$, залежить від просторових форм об'єктів $\Omega = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$. Хоча зазначені залежності зазвичай є нелінійними і доволі складними, проте для багатьох форм їх вдалося отримати. Це дає змогу для розв'язування задачі (15) використовувати сучасні солвери локальної оптимізації з подальшим перебором локальних екстремумів. Саме ці підходи реалізовано, наприклад, у роботах [33–36].

Застосування концепції моделювання задач розміщення та покриття на базі ω -функцій не потребує знання аналітичного вигляду функцій у системі обмежень (10)–(14), але дає змогу дуже швидко обчислювати їхні значення за допомогою пакетів обчислювальної геометрії. При цьому задачі зводяться до оптимізації функції (15) за умови виконання обмежень (13) для задач розміщення або (14) для задач покриття.

У результаті аналізу обмежень (13) та (14) можна виявити цікаву властивість задач розміщення та покриття у зазначених постановках. Оскільки множина $\Sigma_\eta(\mathbf{g})$ є перетином множин $S_0(\mathbf{g}^0)$ та $\bigcup_{i=1}^n S_i(\mathbf{g}^i)$, то $\mu(\Sigma_\varphi(\mathbf{g}))$ не може перевищувати міру кожної з цих множин для будь-яких узагальнених змінних $\mathbf{g} = (\mathbf{g}^0, \mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^n)$. Тоді справедливими є такі нерівності:

$$\begin{aligned} \omega_\varphi(\mathbf{g}) &\leq \sum_{i=1}^n \mu(S_i(\mathbf{g}^i)), \\ \omega_\varphi(\mathbf{g}) &\leq \mu(S_0(\mathbf{g}^0)). \end{aligned} \quad (16)$$

Отже, обмеження (13) та (14) задовольняються лише тоді, коли функція $\omega_\varphi(\mathbf{g})$ досягатиме свого максимуму, тому їх можна еквівалентно сформулювати у вигляді задачі безумовної оптимізації

$$\omega_\varphi(\mathbf{g}) \rightarrow \max. \quad (17)$$

З цього випливає, що задачі розміщення та покриття можна розглядати як дворівневі задачі оптимізації, де пошук екстремумів функції $F(\mathbf{g})$ задачі (15) здійснюється на множині розв'язків оптимізаційної задачі (17).

Завдяки тому, що обчислення значень функції $\omega_\varphi(\mathbf{g})$ для фіксованих узагальнених змінних $\mathbf{g} = (\mathbf{g}^0, \mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^n)$ не потребує великих часових витрат, можна скористатися метаевристичними методами глобальної оптимізації [37–39]. Окремо зазначимо, що є можливість застосування паралельних комп'ютерних технологій під час оброблення геометричної інформації та оптимізації [40].

Інша властивість задач розміщення та покриття пов'язана з чисельним оцінюванням градієнтів, що дає змогу ефективно застосовувати методи локальної оптимізації. Можна виконати розвинення функції $\omega_\varphi(\mathbf{g})$ в околі фіксованої точки $\mathbf{g} = (\mathbf{g}^0, \mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^n)$ через ω -функції $\omega_\chi(\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j)$, $\omega_\chi(\mathbf{g}^0, \mathbf{g}^j)$, $i, j \in \mathbf{J}_n$, $j > i$, у вигляді (10), (11), що значно зменшує час обчислення градієнтів для $\omega_\varphi(\mathbf{g})$. У роботі [31] запропоновано формули для такого оцінювання та надано порівняльні характеристики чисельної оцінки градієнтів, отриманої різними методами.

5. ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ

Проілюструємо реалізацію запропонованої концепції прикладом розв'язання задачі максимального покриття. Різні класи задач максимального покриття, методи їхнього розв'язання та практичні застосування описано у [41–47].

Розглянемо задачу максимального покриття у такій постановці. Задано область покриття S_0 та сукупність покривальних об'єктів S_1, \dots, S_n з фіксованими метричними параметрами $\hat{\mathbf{m}}^i = (\hat{m}_1^i, \dots, m_{\alpha_i}^i)$, $i \in \mathbf{J}_n^0$. Необхідно знайти таке розташування об'єктів S_1, \dots, S_n , що покриває якомога більшу частину області S_0 . У межах нашої концепції виберемо узагальнені змінні $\mathbf{g} = (\mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^n)$, де $\mathbf{g}^i = \mathbf{p}^i$, $i \in \mathbf{J}_n$. У результаті отримуємо задачу безумовної оптимізації у вигляді (17), в якій $\mathbf{g} = (\mathbf{p}^1, \dots, \mathbf{p}^n)$.

Конкретизуємо задачу, визначивши просторові форми об'єктів $\Omega = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$. Нехай область покриття S_0 є прямокутником, а покривальні об'єкти S_1, \dots, S_n — еліпсами. Потрібно знайти таке розташування еліпсів, що забезпечує максимальну площу покритої частини прямокутника. Метричними параметрами прямокутника S_0 є довжини сторін $\mathbf{m}^0 = (a_0, b_0)$. Зафіксуємо його параметри розміщення, поклавши $\hat{\mathbf{p}}^0 = (0, 0, 0)$. Еліпси S_i , $i \in \mathbf{J}_n$, мають метричні параметри $\mathbf{m}^i = (a_i, b_i)$, $i \in \mathbf{J}_n$ та параметри розміщення $\mathbf{p}^i = (x_i, y_i, \theta_i)$, $i \in \mathbf{J}_n$, де a_i, b_i — розміри півосей еліпсів; x_i, y_i — координати їхніх центрів симетрії в нерухомій системі координат Oxy ; θ_i — кути повороту. Враховуючи, що метричні параметри усіх об'єктів $\Omega = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$ та параметри розміщення області S_0 є заданими, узагальненими змінними задачі будуть $\mathbf{g} = (\mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^n)$, де $\mathbf{g}^i = (x_i, y_i, \theta_i)$, $i \in \mathbf{J}_n$.

Розглянемо тестову задачу максимального покриття прямокутника сукупністю еліпсів. Нехай $n = 50$, $a_0 = 50$, $b_0 = 60$, а розміри півосей еліпсів (a_i, b_i) , $i \in \mathbf{J}_n$, наведено у табл. 1.

Таблиця 1. Метричні параметри еліпсів

i	a_i	b_i	i	a_i	b_i	i	a_i	b_i	i	a_i	b_i	i	a_i	b_i
1	1.5	1.3	11	5.9	3.1	21	8.3	5.0	31	3.8	2.9	41	7.1	2.5
2	1.9	1.4	12	6.1	3.0	22	8.5	4.5	32	4.5	3.0	42	7.3	3.7
3	2.4	2.0	13	6.4	2.8	23	8.8	5.5	33	4.9	2.5	43	7.6	3.9
4	2.9	2.0	14	6.6	3.5	24	8.8	3.1	34	5.0	3.4	44	7.9	2.5
5	3.3	1.7	15	7.0	3.0	25	9.0	5.9	35	5.4	2.3	45	8.1	3.0
6	3.8	1.9	16	7.1	3.5	26	1.5	1.5	36	5.9	2.1	46	8.3	4.0
7	4.5	2.0	17	7.3	3.3	27	1.9	1.8	37	6.1	1.5	47	8.5	3.5
8	4.9	2.5	18	7.6	2.9	28	2.4	1.2	38	6.4	2.8	48	8.8	4.5
9	5.0	2.4	19	7.9	3.5	29	2.9	1.5	39	6.6	2.9	49	8.8	4.1
10	5.4	2.3	20	8.1	4.0	30	3.3	1.3	40	7.0	4.0	50	9.0	3.9

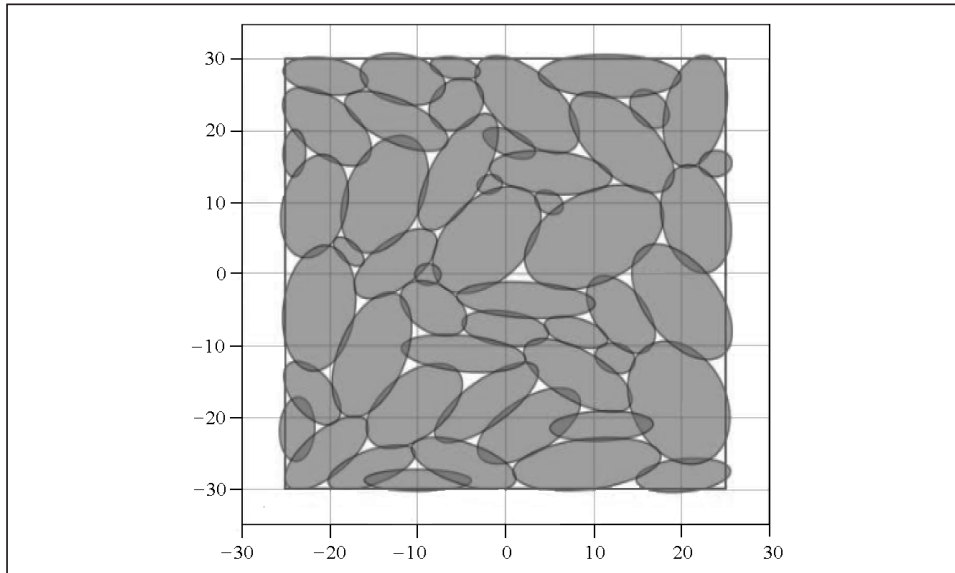


Рис. 1. Локальний оптимум у задачі максимального покриття для 50 еліпсів

Цю задачу розв'язано методом мултистарту з локальною оптимізацією на кожній ітерації. Вибрана конфігурація комп'ютера є такою: Intel Core i7-5557U processor, CPU Speed 3.1 GHz, 2 cores, 4 threads; RAM 16 GB DDR3 1866 MHz; Graphics processor Intel Iris Graphics 6100 with 1.5 GB of video memory; SSD 512 GB; Operating system Mac OS X11.0 Big Sur.

Для обчислення функції $\omega_\varphi(\mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^n)$ використано поля *affinity.rotate*, *unary_union()*, *intersection()* та *area* бібліотеки *Shapely* мови *Python*. Для локальної оптимізації вибрано метод BFGS [48] пакету *Scipy.optimize* з чисельним оцінюванням градієнта. Кількість ітерацій мултистарту становила 10. У середньому локальний оптимум досягався за 27 с. Найкращий результат наведено на рис. 1.

Вочевидь, збільшуючи кількість стартових точок чи застосовуючи метаевристичні методи глобальної оптимізації, можна покращити цей результат. Тим паче, що невеликий час отримання локального оптимуму дає змогу це зробити. Однак метою цієї статті є обґрунтування принципової можливості застосування нового підходу до розв'язання задач розміщення та покриття. Тому питання ефективності методів оптимізації на основі цього підходу є предметом спеціального дослідження.

Розглянемо оптимізаційну задачу компоновки об'єктів у контейнері зі змінними метричними характеристиками. Різні постановки цих задач наведено у [33, 49–54].

Маємо контейнер S_0 заданої просторової форми зі змінними метричними параметрами $\mathbf{m}^0 = (m_1^0, \dots, m_{\alpha_0}^0)$ та сукупність геометричних об'єктів S_1, \dots, S_n заданої форми з фіксованими метричними параметрами $\hat{\mathbf{m}}^i = (\hat{m}_1^i, \dots, \hat{m}_{\alpha_i}^i)$, $i \in \mathbf{J}_n$. Потрібно знайти таке розташування об'єктів S_1, \dots, S_n у контейнері S_0 мінімальної площі (об'єму), за якого вони не перетинаються. У межах пропонованої концепції зафіксуємо положення контейнера S_0 , поклавши $\mathbf{p}^0 = \mathbf{p}$ та виберемо $\mathbf{g} = (\mathbf{g}^0, \mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^n)$ як узагальнені змінні, де $\mathbf{g}^0 = \mathbf{p}^0$, $\mathbf{g}^i = \mathbf{p}^i$, $i \in \mathbf{J}_n$. У результаті отримуємо задачу оптимізації у вигляді

$$F(\mathbf{g}^0) = \mu(S_0(\mathbf{g}^0)) \rightarrow \min \quad (18)$$

за виконання обмеження

$$\omega_{\varphi}(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^n \mu(S_i), \quad (19)$$

де $\mu(S_i)$ — константа, що дорівнює площі (об'єму) об'єкта S_i з фіксованими метричними параметрами.

Для розв'язання задачі (18), (19) запропоновано використовувати метод штрафних функцій [48, 55], згідно з яким маємо послідовність безумовних задач оптимізації:

$$F(\mathbf{g}^0) - M_k(\omega_{\varphi}(\mathbf{g}) - \sum_{i=1}^n \mu(S_i)) \rightarrow \min,$$

де M_k , $k = 1, 2, \dots$, — штрафні коефіцієнти, що задовольняють класичні умови.

У цьому випадку вибір штрафної функції є коректним, враховуючи нерівність (16).

Розглянемо тестову задачу розміщення еліпсів заданих розмірів у прямокутнику мінімальної площі [54]. Маємо $n = 32$ еліпсів з такими розмірами півосей:

$$a_i = 222, b_i = 180, i = 1, \dots, 9;$$

$$a_i = 260, b_i = 170, i = 10, \dots, 18;$$

$$a_i = 360, b_i = 270, i = 19, \dots, 24;$$

$$a_i = 350, b_i = 70, i = 25, \dots, 32.$$

Задача (19), (20) набуде вигляду

$$F(\mathbf{g}^0) = a_0 b_0 \rightarrow \min,$$

$$\omega_{\varphi}(\mathbf{g}) = \pi \sum_{i=1}^{32} a_i b_i = 4750527.9152,$$

де a_0 та b_0 — довжина та ширина прямокутника.

Для локальної оптимізації застосовано метод штрафних функцій, а для глобальної оптимізації — метод мултистарту з обмеженням за часом, що становить 1 год. Отримано розміри прямокутника $a_0 = 2344.146169$; $b_0 = 2442.065462$, а його площа становить 5724558.3991. Відповідний результат наведено на рис. 2. Зазначи-

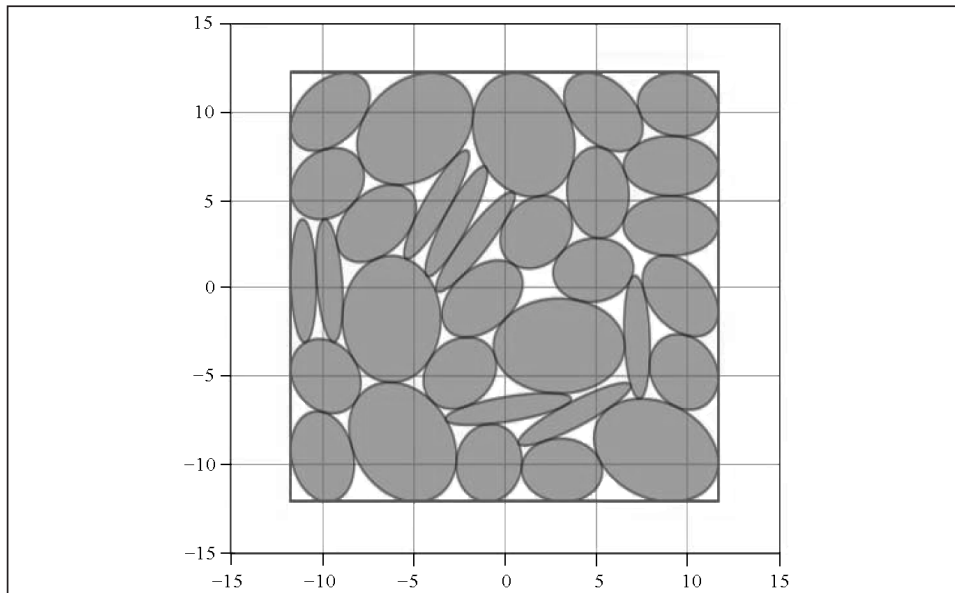


Рис. 2. Розміщення 32 еліпсів у прямокутнику мінімальної площі

мо, що відомий кращий результат, наведений у [54], становив 5777108.5092 з обмеженням за часом до 12 год.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Запропоновано концепцію розв'язування задач розміщення та покриття з використанням сучасних пакетів обчислювальної геометрії. Незважаючи на складність форм геометричних об'єктів, ці пакети дають змогу за вкрай малий час обчислювати площі будь-яких просторових конфігурацій, що розширює можливості ефективного розв'язування задач розміщення та покриття об'єктів довільної форми. Завдяки теорії конфігураційних просторів та спеціального класу функцій для формалізації умов розміщення та покриття вдалося досягти вагомих результатів у дослідженні задач геометричного проектування складних систем. У подальшому зазначений підхід заплановано до застосування для оптимізаційних задач розміщення та покриття зі змінними метричними параметрами об'єктів. Також важливими є питання дослідження ефективності методів локальної та глобальної оптимізації з використанням запропонованої концепції моделювання задач.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Tóth L.F. *Reguläre Figuren*. Budapest: Akadémia, 1965. 316 p.
2. Rogers C.A. *Packing and covering*. Cambridge: University Press, 1964. 109 p.
3. Stoyan Y.G. Mathematical methods for geometric design. *Advances in CAD/CAM. Proc. of PROLAMAT82*. Leningrad, USSR, May 1982. P. 67–86. North–Holland, Amsterdam. The Netherlands, 2003.
4. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. Киев: Наук. думка, 2020. 272 с.
5. Berge C. *Principes de combinatoire*. Paris: Dunod, 1968. 146 p.
6. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V. Configuration space of geometric objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 5. P. 716–726. <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0073-5>.
7. Yakovlev S.V. On some classes of spatial configurations of geometric objects and their formalization. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. Vol. 50, Iss. 9. P. 38–50. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i9.30>.
8. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 552 с.
9. Stoyan Yu., Romanova T. Mathematical models of placement optimisation: two- and three-dimensional problems and applications. In: *Modeling and Optimization in Space Engineering*. Fasano G., Pintér J. (Eds.). SOIA. 2013. Vol. 73. P. 363–388. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4469-5_15.
10. Bennell J., Scheithauer G., Stoyan Y.G., Romanova T. Tools of mathematical modelling of arbitrary object packing problems. *Annals of Operations Research*. 2010. Vol. 179, Iss. 1. P. 343–368. <https://doi.org/10.1007/s10479-008-0456-5>.
11. Stoyan Y., Gil M., Terno J., Romanova T., Schithauer G. Φ -function for complex 2D objects. *4OR Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies*. 2004. Vol. 2, N 1. P. 69–84.
12. Scheithauer G., Stoyan Yu., Romanova T. Mathematical modeling of interaction of primary geometric 3D objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2005. Vol. 41, N 3. P. 332–342. <https://doi.org/10.1007/s10559-005-0067-y>.

13. Stoyan Yu., Romanova T., Pankratov A., Chugay A. Optimized object packings using quasi- ϕ -functions. In: Optimized Packings with Applications. Fasano G., Pintér J.D. (Eds.). SOIA. 2015. Vol. 105. P. 265–293. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18899-7_13.
14. Pankratov A., Romanova T., Litvinchev I. Packing ellipses in an optimized convex polygon. *Journal of Global Optimization*. 2019. Vol. 75, Iss. 2. P. 495–522. <https://doi.org/10.1007/s10898-019-00777-y>.
15. Romanova T., Stoyan Y., Pankratov A. et al. Optimal layout of ellipses and its application for additive manufacturing. *International Journal of Production Research*. 2021. Vol. 59, Iss. 2. P. 560–575. <https://doi.org/10.1080/00207543.2019.1697836>.
16. Stoyan Yu.G., Pankratov A.V., Romanova T.E. Mathematical modeling of distance constraints on two-dimensional ϕ -objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2012. Vol. 48, N 3. P. 330–334. <https://doi.org/10.1007/s10559-012-9412-0>.
17. Stoyan Yu., Pankratov A., Romanova T., Fasano G., Pintér J.D., Stoian Yu.E., Chugai A. Optimized packings in space engineering applications: Part I. In: Modeling and Optimization in Space Engineering. Fasano G., Pintér J.D. (Eds.). SOIA. 2019. Vol. 144. P. 395–437. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10501-3_15.
18. Stoyan Yu., Pankratov A., Romanova T. Placement problems for irregular objects: Mathematical modeling, optimization and applications. In: Optimization Methods and Applications. Butenko S. Pardalos P.M., Shylo V. (Eds.). SOIA. 2017. Vol. 130. P. 521–558. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68640-0_25.
19. Stoyan Y.G., Romanova T., Scheithauer G. et al. Covering a polygonal region by rectangles. *Computational Optimization and Applications*. 2011. Vol. 48, Iss. 3. P. 675–695. <https://doi.org/10.1007/s10589-009-9258-1>.
20. Стоян Ю.Г., Сосяурка Е.С. Покриття компактної багатогранної області скінченим сімейством прямих паралелепіпедів. *Доповіді Національної академії наук України*. 2010. № 8. С. 43–48.
21. Магас С.Л. Определение и свойства структур линейных неравенств. *Автоматизация проектирования в машиностроении*. 1983. Вып. 3. С. 5–11.
22. Stoyan Yu.G., Novozhilova M.V., Kartashov A.V. Mathematical model and method of searching for a local extremum for the non-convex oriented polygons allocation problem. *European Journal of Operational Research*. 1996. Vol. 92, Iss. 1. P. 193–210. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(95\)00038-0](https://doi.org/10.1016/0377-2217(95)00038-0).
23. Yakovlev S.V. On a class of problems on covering of a bounded set. *Acta Mathematica Hungarica*. 1989. Vol. 53, Iss. 3–4. P. 253–262. <https://doi.org/10.1007/BF01953365>.
24. Shekhovtsov S.B., Yakovlev S.V. Formalization and solution of one class of covering problem in design of control and monitoring systems. *Autom. Remote Control*. 1989. Vol. 50, Iss. 5. P. 705–710.
25. Yakovlev S.V. Formalizing spatial configuration optimization problems with the use of a special function class. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, N 4. P. 581–589. <https://doi.org/10.1007/s10559-019-00167-y>.
26. Кісельова О.М., Гарт Л.Л. Елементи теорії функцій множин. Дніпро: Вид-во ДНУ, 2006. 176 с.
27. Kiseleva E.M. The emergence and formation of the theory of optimal set partitioning for sets of the n-dimensional Euclidean space. Theory and application. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. Vol. 50, Iss. 9. P. 1–24. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i9.10>.

28. Kiseleva E.M., Kadochnikova Ya.E. Solving a continuous single-product problem of optimal partitioning with additional conditions. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2009. Vol. 41, Iss. 7. P. 48–63. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v41.i7.30>.
29. Gillies S. The shapely user manual. URL: <https://shapely.readthedocs.io/en/stable/manual.html> (accessed 29 April 2022).
30. Shapely 1.8.5.post1 documentation. URL: <https://shapely.readthedocs.io/en/stable/>.
31. Yakovlev S., Kartashov O., Podzeka D. Mathematical models and nonlinear optimization in continuous maximum coverage location problem. *Computation*. 2022. Vol. 10, Iss 7. 119. <https://doi.org/10.3390/computation10070119>.
32. Yakovlev S., Kartashov O., Mumrienko A. Formalization and solution of the maximum area coverage problem using library Shapely for territory monitoring. *Radioelectronic and Computer Systems*. 2022. Vol. 2022, Iss. 2. P. 35–48. <https://doi.org/10.32620/reks.2022.2.03>.
33. Birgin E.G., Lobato R.D., Martinez J.M. A nonlinear programming model with implicit variables for packing ellipsoids. *Journal of Global Optimization*. 2017. Vol. 68, Iss. 3. P. 467–499. <https://doi.org/10.1007/s10898-016-0483-8>.
34. Stoyan Y.G., Romanova T.E., Pankratov O.V., Stetsyuk P.I., Maximov S.V. Sparse balanced layout of ellipsoids. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2021. Vol. 57, N 6. P. 864–873. <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00412-3>.
35. Stoyan Y., Romanova T., Pankratov A., Kovalenko A., Stetsyuk P. Balance layout problems: Mathematical modeling and nonlinear optimization. In: *Space Engineering*. Fasano G., Pintér J.D. (Eds.). SOIA. 2016. Vol. 114. P. 369–400. https://doi.org/10.1007/978-3-319-41508-6_14.
36. Romanova T., Litvinchev I., Shekhovtsov S. Packing convex 3D objects with special geometric and balancing conditions. In: *Intelligent Computing and Optimization*. Vasant P., Zelinka I., Weber G.-W. (Eds.). *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2020. Vol. 1072. P. 273–281. https://doi.org/10.1007/978-3-030-33585-4_27.
37. Glover F., Sorensen K. (Eds.). *Metaheuristics*. Scholarpedia. 2015. 10(4):6532.
38. Martí R., Pardalos P.M., Resende M.G.C. (Eds.). *Handbook of heuristics*. Springer International Publishing, 2018.
39. Gulyanitskii L.F., Sergienko I.V. Metaheuristic downhill simplex method in combinatorial optimization. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2007. Vol. 43, N 6. P. 822–829. <https://doi.org/10.1007/s10559-007-0106-y>.
40. Romanova T.E., Stetsyuk P.I., Chugay A.M., Shekhovtsov S.B. Parallel computing technologies for solving optimization problems of geometric design. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, N 6. P. 894–904. <https://doi.org/10.1007/s10559-019-00199-4>.
41. Church R.L., ReVelle C. The maximal covering location problem. *Papers of the Regional Science Association*. 1974. Vol. 32, Iss. 1. P. 101–118. <https://doi.org/10.1007/BF01942293>.
42. Murray A.T. Maximal coverage location problem: impacts, significance, and evolution. *International Regional Science Review*. 2016. Vol. 39, Iss. 1. P. 5–27. <https://doi.org/10.1177/0160017615600222>.
43. Coll N., Fort M., Saus M. Coverage area maximization with parallel simulated annealing. *Expert Systems with Application*. 2022. Vol. 202. 117185. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.117185>
44. Murray A.T., Church R.L. Location covering models: History, applications and advancements. Ser. *Advances in Spatial Science*. Cham: Springer, 2018. 271 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-99846-6>.
45. Blanco V., Gázquez R. Continuous maximal covering location problems with interconnected facilities. *Computers & Operations Research*. 2021. Vol. 132. 105310.

46. Bansal M., Kianfar K. Planar maximum coverage location problem with partial coverage and rectangular demand and service zones. *INFORMS Journal on Computing*. 2017. Vol. 29, N 1. P. 152–169. <https://doi.org/10.1287/ijoc.2016.0722>.
47. Davari S., Fazel Zarandi M.H., Hemmati A. Maximal covering location problem (MCLP) with fuzzy travel times. *Expert Systems with Applications*. 2011. Vol. 38, Iss. 12. P. 14535–14541. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2011.05.031>.
48. Fletcher R. Practical methods for optimization (2nd ed.). New York: John Wiley Sons, 1987. 456 p.
49. Kallrath J., Rebennack S. Cutting ellipses from area-minimizing rectangles. *Journal of Global Optimization*. 2014. Vol. 59, Iss. 2–3. P. 405–437. <https://doi.org/10.1007/s10898-013-0125-3>.
50. Miller P. Globally optimal packing of nonconvex two dimensional shapes by approximation with ellipses. Senior thesis. Princeton University, Princeton, NJ. 2012.
51. Stoyan Yu., Pankratov A., Romanova T. Cutting and packing problems for irregular objects with continuous rotations: Mathematical modelling and non-linear optimization. *Journal of the Operational Research Society*. 2016. Vol. 67, Iss. 5. P. 786–800. <https://doi.org/10.1057/jors.2015.94>.
52. Litvinchev I., Infante L., Ozuna L. Packing circular-like objects in a rectangular container. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2015. Vol. 54, Iss. 2. P. 259–267. <https://doi.org/10.1134/S1064230715020070>.
53. Birgin E.G., Lobato R.D., Martinez J.M. Packing ellipsoids by nonlinear optimization. *Journal of Global Optimization*. 2016 Vol. 65, Iss. 4. P. 709–743. <https://doi.org/10.1007/s10898-015-0395-z>.
54. Optimal packing of rotating ellipses. URL: <https://app.box.com/s/mo7xjvje7v52p9movfi>.
55. Бейко И.В., Бублик Б.Н., Зинько П.Н. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. Киев: Вища шк., 1983. 512 с.

S.V. Yakovlev

THE CONCEPT OF SIMULATION PACKING AND COVERING PROBLEMS USING MODERN COMPUTATIONAL GEOMETRY SOFTWARE

Abstract. A class of geometric packing and covering problems is considered. A new concept of mathematical modeling using a special class of functions is proposed. To solve the problems, special libraries of computational geometry programs are used. They do not require an analytical view of the functions that describe the packing and covering conditions but allow their verification. The reduction of the computing costs is substantiated, which expands the possibilities of the efficient application of local and global optimization methods. The results of solving the test problems of the maximum coverage of a rectangular area with a set of ellipses of given sizes and the problem of placing ellipses in a rectangle of minimum area are given.

Keywords: packing and covering problems, mathematical modeling, computational geometry software, optimization.

Надійшла до редакції 30.05.2022