

Ю.І. КАЛЮХ

ДП «Державний науково-дослідний інститут будівельних конструкцій»;
Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України,
Київ, Україна, e-mail: *kalyukh2002@gmail.com*.

О.М. ТРОФИМЧУК

Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України,
Київ, Україна, e-mail: *Trofymchuk@nas.gov.ua*.

О.Г. ЛЕБІДЬ

Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України,
Київ, Україна, e-mail: *o.g.lebid@gmail.com*.

ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМ У ПОТОЦІ

Анотація. Розглянуто особливості застосування методу скінченних різниць (МСР) для розв'язання нелінійних динамічних задач розподілених систем (РС) у потоці. Показано, що основними обмеженнями застосування МСР для чисельного моделювання поширення та відбиття хвиль у РС є особливості визначальних квазілінійних рівнянь. Вони зумовлюють необхідність одночасного обчислення змінних, що відповідають швидкоплинним та повільним хвильовим процесам. Для таких систем рівнянь використовують термін «сингулярно збурена система рівнянь». Ці збурення є наслідком значної різниці у швидкостях поширення поздовжніх, конфігураційних, згинальних і крутильних хвиль у РС на фізичному рівні. З огляду на це потрібно застосовувати спеціальні покрокові за часом методи регуляризації та фільтрації чисельних результатів. Це накладає певні обмеження на можливість моделювання реальних процесів та на точність отриманих результатів і змушує застосовувати неявні різницеві схеми та високочастотну фільтрацію. Для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з урахуванням поганої обумовленості матриці конвективних членів експериментальним обчисленням було обрано метод регуляризації. Результати з необхідним ступенем точності можна отримати, використовуючи різницеву схему Кранка–Нікольсон навіть на грубих сітках і витрати часу при цьому будуть мінімальними. Інша ситуація спостерігається у разі порівняння результатів на грубій і більш дрібній сітках для різницевої схеми Ейлера. Непереборні помилки від похибок апроксимації відсутніх граничних умов призводять до ще більших похибок.

Ключові слова: метод скінченних різниць, розподілені системи, нелінійність, сингулярність, високочастотна фільтрація.

ВСТУП

До розподілених систем (РС) належать крила літаків та гвинтокрилів, буксирні системи постійної та змінної довжини в потоці рідини та газу, у космічному середовищі, а також лопатеві та безлопатеві повітряні генератори, палі, підводні кабелі зв'язку, опори морських нафтових платформ та ін. Розподіленими системами є усі механічні об'єкти, де один з лінійних розмірів як мінімум у 10–20 разів більший за два інших. Це космічні зв'язки на навколоземному просторі довжиною десятки кілометрів [1]; РС описують залізобетонні палі [2] в ґрунті для розрахунків напружено-деформованого стану і оцінювання технічного стану [3–5]; підводні нафто- та газопроводи [6]; буксирні системи [7–11]; системи ерліфта великої протяжності для видобутку мінералів (конкрецій) з дна океану довжиною 5–10 км [12]. Математичні моделі, що відображають динаміку РС в просторово-неоднорідному полі масових і поверхневих сил, зазвичай описуються нелінійними рівняннями в частинних похідних [5, 7, 8, 13], розв'язання яких можливе лише з використанням обчислювальних методів [7–9]. Обчислювальні методи і алгоритми для математичного моделювання РС досліджували і розробляли багато вчених,

серед яких А.В. Гладкий, В.Ф. Губарев, Ю.Г. Кривонос, І.В. Сергієнко, В.В. Скопецький [14–18].

Розглянемо проблеми чисельного моделювання нелінійних задач динаміки РС.

1. Геометричний розмір (вздовж РС) на декілька порядків перевищує розмір РС в поперечному напрямку. Це призводить до складнощів в обчисленні поперечних хвиль різної природи в РС (конфігураційних, згинальних, крутильних, депланаційних тощо) з одночасною необхідністю врахування поздовжніх хвиль.

2. Застосування проєкційних методів чисельного аналізу квазілінійних рівнянь динаміки РС зумовлює наявність у матричних рівняннях коефіцієнтів при невідомих, що можуть відрізнятися один від одного на декілька порядків. Як відомо, це призводить до великих складнощів з обчисленням оберненої матриці у цих рівняннях і спричиняє необхідність використання спеціальних методів та алгоритмів подвійної точності.

3. Унаслідок великої чутливості чисельних алгоритмів до похибок у початкових і крайових умовах складно подолати «розхитування» чисельних алгоритмів, тому виникає потреба у застосуванні спеціальних методів та програмних високочастотних фільтрів.

4. Під час чисельної реалізації багатохвильових моделей РС виникають деякі труднощі, зумовлені тим, що швидкість поширення хвиль різного типу неоднакова [8]. В окремих випадках, наприклад для поздовжніх і поперечних хвиль у РС, різниця може становити величину в декілька порядків [8]. За чисельної реалізації ця особливість призводить до накопичення похибок в обчисленні шуканих величин під час переходу з одного часового шару на наступний і в результаті — до «розхитування» програми.

5. Поширені математичні моделі РС [19] не є цілком коректними для врахування різноманіття хвильових процесів. Це визначає необхідність побудови уточнених багатохвильових моделей РС додатково до спеціальних чисельних методів та алгоритмів їхнього обчислення.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нелінійну хвильову модель РС, яка описує розподілену буксирну систему (рис. 1, 2), що рухається у потоці стаціонарно або з прискоренням у площині, представимо як матричне рівняння типу переносу в стандартному вигляді [7–9]:

$$E \frac{\partial W}{\partial t} + B \frac{\partial W}{\partial S} = D. \quad (1)$$

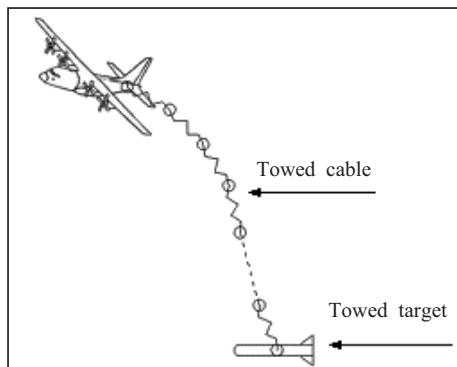


Рис. 1. Загальний вигляд пастки, прикріпленої до РС, та літака з пасткою [10]. Призначення пастки — захист літака від зенітних ракет

Тут E — одинична матриця, B — матриця конвективних членів, D — вектор-стовпець правих частин, який визначається розподіленими масовими та поверхневими силами, а також моментами цих сил. Вектор-стовпець D залежить від часу t , Лагранжевої координати S , вектора-стовпця невідомих W та компонент розподілених масових і поверхневих сил.

Розмірність матричного рівняння (1) визначається кількістю врахованих хвиль в РС: розмірність 2 — врахована одна хвиля — поздовжня або попе-

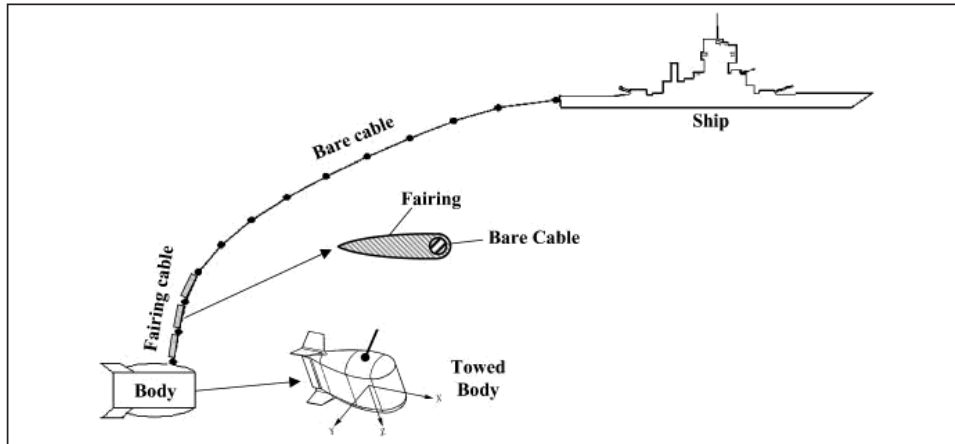


Рис. 2. Загальний вигляд буксированої в потоці рідини РС з підводним апаратом [11], який може використовуватися для пошуку підводних човнів, мін тощо

речна (характерно для переважної більшості наукових публікацій), розмірність 4 — враховано дві хвилі (прикладом є модель балки Тимошенка [20]), розмірність 6 — враховано три хвилі і т.ін. У роботі [21] отримано найбільш узагальнену дотепер математичну модель (1) розмірності 14, що описує нелінійну динаміку РС в просторово-неоднорідному полі масових і поверхневих сил. Вона враховує сім хвиль в РС п'яти типів: поздовжню, крутильну, дві конфігураційні (поперечні) та дві згинальні, а також депланаційну. Для моделі, описаної в роботі [21], виконуються принципи граничності і гіперболічності, сформульовані в [22].

Крайові та початкові умови для моделі (1). У верхньому кінці РС для $S = L$ (рис. 1, 2) задамо проекції швидкості \bar{U} :

$$\begin{aligned} U_t(L, t) &= U_t^*(t), \\ U_n(L, t) &= U_n^*(t), \\ U_b(L, t) &= U_b^*(t). \end{aligned} \quad (2)$$

На нижньому кінці РС (для $S = 0$) задано умови динамічної рівноваги сил \bar{F}_i і моментів \bar{M}_j на кінці РС:

$$\sum_{i=1}^3 \bar{F}_i = 0, \quad \sum_{j=1}^3 \bar{M}_j = 0. \quad (3)$$

Як початкові умови використаємо розв'язки задачі статики рівнянь моделі (1) для $\frac{\partial}{\partial t}(\dots) = 0$:

$$B \frac{\partial W}{\partial S} = D. \quad (4)$$

Модель (1) з початковими (4) та крайовими (2), (3) умовами являє собою замкнену систему квазілінійних рівнянь в частинних похідних [23], а також початково-крайову задачу.

Дослідники для чисельного розв'язання крайової задачі (1)–(4) (у значно спрощеному вигляді, переважно в одно- або двохвильовому наближенні (1)–(4)) використовують кілька підходів. Найбільш поширеними серед них є дискретний підхід, метод скінченних елементів (МСЕ) і метод скінченних різниць (МСР). Розглянемо окремо кожний з них.

У межах дискретного підходу [19, 24, 25] рівняння, що описують поведінку РС у просторі, виводять із загальних рівнянь Лагранжа 2-го роду, а РС апроксимуються відрізками стрижнів, дуг кіл і т.ін. [26]. Заміна рівнянь у частинних похідних звичайними та простота реалізації на ПК сприяли широкому використанню дискретного підходу для розв'язання задач статичної і динамічної РС [24, 26, 27]. Теорію дискретного підходу висвітлено в монографіях [19, 24]. Але використання дискретної моделі РС для розв'язання просторових, геометрично і фізично нелінійних задач призводить до певних труднощів. Це, насамперед, залежить від кількості дискретних елементів, потрібних для забезпечення точності та гладкості апроксимації, а також від їхнього «зшивання» [25]. Так, під час дослідження тих чи інших ефектів в РС автори враховують шарнірні з'єднання елементів [24], пружинні [28], пружинні з демпфером [29] і т.ін. Одним із складнощів, що обмежують реалізацію цього підходу, є необхідність обчислювати інтегральні вирази від узагальнених сил у кожному вузлі зшивання дискретних елементів [24, 25], що збільшує витрати обчислювального часу. Унаслідок цього потрібно обмежуватися мінімально можливою кількістю дискретних елементів [24], що в деяких випадках може призвести до похибок і накопичення помилок в обчисленнях [24].

МСЕ найчастіше застосовується для розв'язання задач механіки суцільних середовищ та був застосований для аналізу задач статичної і динамічної РС [26, 28]. Найбільшого поширення він набув для розв'язання статичних і квазістатичних задач [27, 28]. Оскільки РС — це одновимірний об'єкт суцільного середовища, для його апроксимації в МСЕ потрібен одновимірний скінченний елемент, яким є стрижень [19, 24]. У результаті ми отримуємо деяке узагальнення дискретної моделі РС з використанням концепції МСЕ. Тому у разі застосування МСЕ для дослідження нестационарних швидкоплинних процесів, просторових змін характеристик систем з розподіленими параметрами, якими є РС, ми стикаємося з тими самими труднощами, що і у разі застосування дискретної моделі [25, 27].

Швидкість поширення збурень у разі використання дискретного підходу та МСЕ в РС стає нескінченною і однаковою для різних хвильових мод; є порушення принципу гіперболічності [22] (поздовжні, поперечні, крутильні та згинальні збурення поширюються в моделі з однаковою швидкістю). Насправді це не відповідає природі явища, оскільки швидкість поширення поздовжнього імпульсу може значно перевищувати швидкість поширення поперечного імпульсу. Це є серйозним обмеженням до застосування цих підходів і є джерелом накопичення помилок під час розв'язання задач динаміки для керування підводними прив'язними апаратами, неруйнівної діагностики паль (поширення та відбиття хвиль у залізобетонних палях [30–35]) та ін.

Цих недоліків позбавлений метод скінченних різниць, який широко застосовується для таких складних задач [8, 36, 37], особливо задач визначення напружено-деформованого стану РС під час перехідних процесів у площині та просторі зі змінною в часі довжиною РС [38]. У разі застосування цього методу протягом всього часу розрахунку математична модель є гіперболічною, швидкість поширення збурень в РС — скінченна та відповідає фізиці процесу — типу збурень (поздовжні, конфігураційні, згинальні, крутильні та інші збурення поширюються із скінченною швидкістю) [8]. Однак суттєва відмінність у швидкостях поширення хвиль різного типу в РС із застосуванням звичайного скінченнорізницевого алгоритму призводить до неможливості використання будь-яких скінченнорізницевоїх схем (явних, неявних) для чисельного розв'язання. Тому перед дослідниками стоїть проблема вибору скінченнорізницевої схеми (CPC) для математичного моделювання РС.

1. СРС має бути стійкою для розв'язання сингулярних рівнянь вихідної математичної моделі [39].

2. СРС має бути стійкою до похибок у формулюванні крайових умов.

3. СРС повинна максимально коректно враховувати зміни крайових умов, що на практиці відповідає вітровихвильовій хитавиці корабля-буксирувальника, роботі суднової лебідки під час буксирування, зіткненням буксированого апарата з перешкодами (дном, ракетою тощо).

Усе викладене вище визначає актуальність досліджень вибору СРС, здатної максимально відповідати зазначеним вище вимогам.

ВИБІР ТА ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДВОХВИЛЬОВОГО НАБЛИЖЕННЯ МОДЕЛІ (1)–(4)

У випадку двохвильового наближення моделі (1)–(4) одинична матриця E матиме розмір 4×4 , матриця конвективних членів B також має розмір 4×4 , вектор-стовпець правих частин D та вектор-стовпець невідомих W мають розмір 1×4 .

Запишемо покомпонентно елементи матриці B , вектора-стовпця D і вектора-стовпця W [3–5]:

$$B_{\xi} = \begin{pmatrix} \frac{-u_t}{1+eT} & \frac{-u_n}{1+eT} & \frac{-1}{m} & 0 \\ \frac{-u_n}{1+eT} & \frac{u_t}{1+eT} & 0 & \frac{u_t^2 + u_n^2}{1+eT} - \frac{T - Mu_t^2}{m+M} \\ \frac{-1}{e} & 0 & 0 & \frac{u_n}{e} \\ 0 & \frac{-1}{1+eT} & 0 & \frac{-u_t}{1+eT} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$D_{\xi} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{m} \left(\omega \sin \varphi + \frac{\pi k_f \rho d_0}{2} \sqrt{1+eT} |u_t| u_t \right) \\ \frac{-1}{m+M} \left(\omega \cos \varphi + \frac{k_n \rho d_0}{2} \sqrt{1+eT} |u_n| u_n \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} u_t \\ u_n \\ T \\ \varphi \end{pmatrix},$$

де d_0 — початковий діаметр РС до деформування; φ — кут нахилу РС до горизонталі; m , M , ω — маса, приєднана маса і плавучість одиниці довжини РС до деформування; k_f , k_n — гідродинамічні коефіцієнти опору тертя і форми РС; ρ — щільність рідини; T — ефективне натягіння РС; u_t , u_n — відносна дотична і нормальна швидкості РС; t — час; S — поточна довжина РС до деформування; $e = \frac{1}{EF}$ — ефективна розтяжність РС; E — модуль Юнга; F —

площа поперечного перерізу РС до деформування.

Граничні умови в корінній точці РС (точці сходження РС з лебідки, розташованої на кормі корабля ($S = 0$)), яка здійснює рівноприскорений рух, запишемо у вигляді

$$u_t(0, t) = V(t) \cos \varphi, \quad u_n(0, t) = V(t) \sin \varphi, \quad (6)$$

де $u_t(0, t)$, $u_n(0, t)$ — відносна дотична і нормальна швидкості РС у точці РС, $S = 0$; $V(t)$ — швидкість (закон руху) судна-буксирувальника.

На буксироване тіло діють сили тяжіння, виштовхувальна сила, динамічні сили опору та інерції приєднаної маси рідини, зусилля T у точці кріплення підводного буксированого апарата (ПБА). У цьому разі крайова умова для $S = L$ матиме вигляд

$$\begin{aligned} Q^* + P^* \sin \varphi + M^* \left(\frac{\partial u_t}{\partial t} - u_n \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{K^* Z^* \rho}{2} \sqrt{u_t^2 + u_n^2} u_t &= 0, \\ P^* \cos \varphi + M^* \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} - u_t \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{K^* Z^* \rho}{2} \sqrt{u_t^2 + u_n^2} u_n &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

де Q^* — контактна сила у точці кріплення ПБА до РС; P^* — різниця гідростатичної виштовхувальної сили і сили тяжіння, що діють на ПБА; M^* — сума маси і приєднаної маси ПБА; K^* — коефіцієнт опору ПБА; Z^* — площа міделевого перерізу ПБА.

Оскільки рівняння (1) є матричним рівнянням типу переносу, для його чисельного розв'язання можна використовувати відомі різницеві схеми для такого класу рівнянь: Лакса, двошарові схеми тощо [40]. У разі використання явних різницевих схем для розв'язання рівняння переносу основною вимогою, що забезпечує стійкість чисельного розв'язку, є певні обмеження на критерій стійкості різницевих схем Фрідрікса–Куранта–Леві (ФКЛ):

$$b_{i,j} \frac{\Delta \tau}{\Delta \sigma} \leq C. \quad (8)$$

Тут $\Delta \tau$ — крок розрахункової сітки за часом; $\Delta \sigma$ — крок розрахункової сітки за Лагранжевою координатою S ; $b_{i,j}$ — елементи матриці конвективних членів B ; C — деяка константа. Зауважимо, що величина C відповідно до конкретної РС набуває певного значення.

Особливістю РС є їхня розтяжність. Унаслідок цього при похідній $\partial T / \partial t$ в моделі (1)–(4) коефіцієнти є малими (від 10^{-4} до 10^{-9}). Це свідчить про сингулярність матриці B та її погану обумовленість. Фізично ця особливість матриці B характеризує значну різницю в швидкості поширення поздовжніх і поперечних хвиль в РС. Отже, щоб задовольнити умову стійкості чисельного алгоритму (виконання умов для числа ФКЛ) для всіх коефіцієнтів матриці B , потрібно різницеву сітку вибирати таким чином, щоб відношення кроку розрахункової сітки за Лагранжевою координатою до кроку розрахункової сітки за часом перевищувало безрозмірну швидкість поширення поздовжніх коливань у досліджуваній РС (швидкість поширення поздовжніх коливань найбільша у порівнянні з іншими типами коливань в РС). А це так само спричиняє складнощі в застосуванні явних різницевих схем для аналізу системи квазілінійних гіперболічних рівнянь (1) та інших рівнянь, отриманих на основі спрощення системи (1) для різних окремих випадків. Для розв'язання СЛАР, враховуючи погану обумовленість матриці B , експериментальним обчисленням було обрано метод регуляризації.

ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Як приклад неявних різницевих схем розв'язання матричного рівняння переносу розглянемо різницеві схеми Кранка–Нікольсон та Ейлера. Шаблони цих схем зображено на рис. 3.

Матриця B і вектор-стовпець D є нелінійними функціями, які залежать від незалежних змінних t і S , а також інших змінних та параметрів. Аналізуючи різницеві схеми для розв'язання рівняння (1), застосовуватимемо квазілінеаризацію коефіцієнтів матриці B і вектора-стовпця D на поточному розрахунковому кроці за часом t .

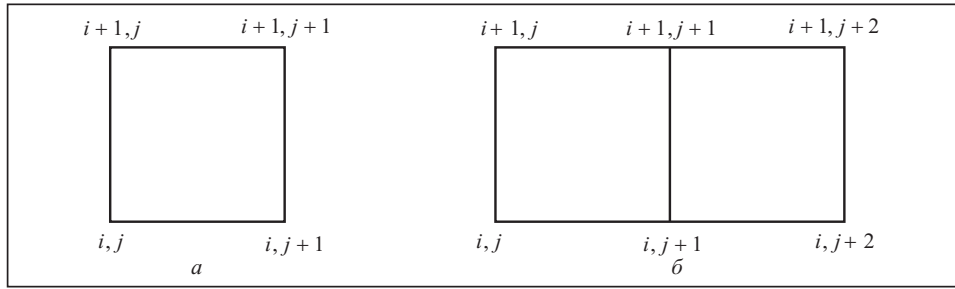


Рис. 3. Шаблиони скінченно-різницевих схем Кранка–Нікольсон (а) та Ейлера (б)

У разі використання різницевої схеми Кранка–Нікольсон для чисельного розв’язання системи нелінійних гіперболічних рівнянь складнощів апроксимації крайових умов зазвичай не виникає. Застосування різницевої схеми Ейлера вимагає додаткових граничних умов. Розглянемо приклад РС у плоскій постановці (поздовжньо-конфігураційна (поперечна) взаємодія).

На практиці зазвичай використовують чотири граничних умови: залежність координат на верхньому кінці РС від часу та гранична умова на її нижньому кінці. З них можна визначити крайові умови для чотирьох проекцій швидкості: $U_t(0, t)$, $U_n(0, t)$, $U_t(L, t)$, $U_n(L, t)$. Крайові умови можна апроксимувати одним з відомих способів [35]. Для використання різницевої схеми Ейлера необхідно задати ще чотири граничних умови для $T(0, t)$, $\varphi(0, t)$ та $\varphi(L, t)$, $T(L, t)$ у плоскій задачі. Апроксимацію відсутніх граничних умов для $T(0, t)$, $\varphi(0, t)$ та $\varphi(L, t)$, $T(L, t)$ можна здійснити декількома способами. Ми використаємо шаблони, зображені на рис. 4 для лівого (верхнього) кінця РС і правого (нижнього) кінця РС.

Для аналізу ефективності та точності розв’язання рівнянь динаміки РС із застосуванням різницевої схеми Ейлера і різницевої схеми Кранка–Нікольсон проведемо тестування чисельних алгоритмів та програм окремо та у порівнянні. Розглянемо розв’язання модельної задачі для таких крайових умов, де горизонтальна швидкість V на верхньому кінці РС для $S = L$ має вигляд

$$V = \begin{cases} V_1, & t \leq 0, \\ V_1 + 0.05t, & t \in [0; 20], \\ V_2, & t \in [20; \infty]. \end{cases} \quad (9)$$

Параметри (дані) РС є такими: довжина системи — 200 м (L); коефіцієнт опору тертя — 0.01 (k_f); коефіцієнт опору форми — 0.2 (k_n); ефективна розтяжність РС — 0.014 (e); ефективна ширина обтікача по міделю — 0.05 м (d_0); від’ємна плавучість лінії — 25.4 Н/м (ω); ефективна погонна маса (маса і приєднана маса) обтікача — 2.5 кг/м ($m + M$); ефективна маса заглиблювача — 500 кг (M^*); його коефіцієнт опору — 0.5 (K^*); площа міделевого перерізу заглиблювача — 0.2 м² (Z^*), заглиблювальна сила — 4000 Н (P^*).

Розроблення і тестування здійснювались в операційній системі Windows 10 Enterprise LTSB/LTSC; як інтегроване середовище обрано Microsoft Visual Studio 16.0.

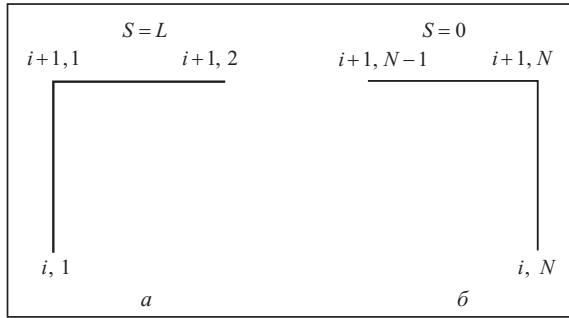


Рис. 4. Шаблиони апроксимації відсутніх граничних умов для $T(0, t)$, $\varphi(0, t)$ та $\varphi(L, t)$, $T(L, t)$ в різницевій схемі Ейлера, N — кількість елементів у рядку різницевої схеми

Для компіляції вихідного коду мовою Fortran 2003 визначено Intel® Visual Fortran COpenMPiler 18.0 for Windows, оскільки він гарантує найкращу продуктивність і використовує підсвічування синтаксису Fortran 2003 у Visual Studio.

Спершу перевірялася ефективність різницевої схеми Кранка–Нікольсон [41, 42] та різницевої схеми Ейлера [42] окремо на грубій та подрібнених різницевоїх сітках для апроксимації крайової задачі квазілінійних рівнянь з крайовими та початковими умовами (5)–(7), (9). Крок за часом становив $\Delta t = 0.2$ с, далі $\Delta t = 0.1$ с; крок за Лагранжевою координатою був спершу $\Delta S = 30$ м, а далі $\Delta S = 15$ м з урахуванням виконання критерію Куранта–Фрідрікса–Леві (8).

Результати порівняльних розрахунків для відносних похибок у відсотках для різницевої схеми Кранка–Нікольсон наведено в табл. 1, а для різницевої схеми Ейлера — в табл. 2. Максимальна різниця досягає 22 % на проміжному кроці за часом для u_t .

Унаслідок сингулярності матриці B для фільтрацій шкідливих високочастотних осциляцій розв’язку усереднювали результати початкових обчислень на трьох послідовних кроках за часом:

$$Y_i^J = \frac{Y_i^{J-1} + Y_i^J + Y_i^{J+1}}{3}. \quad (10)$$

Таблиця 1. Результати розрахунків за різницевою схемою Кранка–Нікольсон з умовами $\Delta t = 0.2$ с і $\Delta S = 30$ м, а також для подрібненої у два рази — з умовами $\Delta t = 0.1$ с і $\Delta S = 15$ м

Час (с)	S (м)	ΔT (%)	$\Delta \varphi$ (%)	Δu_t (%)	Δu_n (%)
6.4	0	0.7	0.6	5.6	3.4
	30	0.8	1.2	9.4	3.4
	60	0.9	3.2	9.2	0.0
	90	1.0	2.3	9.1	0.6
	120	1.2	2.7	9.6	1.5
	150	1.5	2.7	11.6	2.7
12.8	0	0.6	0.5	22.0	10.3
	30	0.7	3.2	21.3	7.1
	60	0.8	2.1	21.0	4.3
	90	0.9	2.3	21.1	11.2
	120	1.0	2.3	22.2	0.0
	150	1.1	3.2	13.5	4.6
25.6	0	0.6	0.7	0.0	0.7
	30	0.7	0.8	0.1	0.7
	60	0.7	1.4	0.3	8.9
	90	0.9	2.1	0.5	1.3
	120	1.0	2.1	0.6	2.7
	150	1.1	1.0	0.3	0.1
64.0	0	0.8	0.0	0.0	0.3
	30	0.9	0.4	0.0	0.5
	60	1.0	0.6	0.7	1.0
	90	1.1	1.9	0.3	1.8
	120	1.3	1.6	0.8	1.6
	150	1.5	2.1	2.4	0.2

Тут Y_i^J — позначення однієї з величин U_t, U_n, T, φ ; i — крок за координатою; J — крок за часом.

Обчислення відносної похибки осьового зусилля T і кута нахилу φ , відносних дотичної u_t та нормальної u_n швидкостей РС здійснювалося за формулами

$$\Delta T = \left| \frac{T_f - T}{T} \right|, \Delta \varphi = \left| \frac{\varphi_f - \varphi}{\varphi} \right|, \Delta u_t = \left| \frac{u_{tf} - u_t}{u_t} \right|, \Delta u_n = \left| \frac{u_{nf} - u_n}{u_n} \right|, \quad (11)$$

де $T_f, \varphi_f, u_{tf}, u_{nf}$ — значення змінних, отримані на подрібненій у два рази різницевій сітці Кранка–Нікольсон (Ейлера); T, φ, u_t, u_n — значення змінних, отриманих на початковій різницевій сітці Кранка–Нікольсон (Ейлера).

Порівняльний аналіз похибок різницевих сіток Кранка–Нікольсон та Ейлера проведемо за максимальною похибкою в один момент часу. З табл. 1 випливає, що чисельний алгоритм на основі різницевої схеми Кранка–Нікольсон має необхідну точність і може бути використаний для чисельного моделювання перехідних процесів у РС. Різниця в силових і геометричних характеристиках напружено-деформованого стану РС, отриманих на грубій і подрібненій різницевих сітках, є незначною (у середньому від 5 до 8 %), крім перехідного режиму руху з прискоренням, коли відмінності можуть збільшуватися до 20 %.

Таблиця 2. Результати розрахунків на основі різницевої схеми Ейлера для $\Delta t = 0.2$ с і $\Delta S = 30$ м, а також для подрібненої у два рази схеми для $\Delta t = 0.1$ с і $\Delta S = 15$ м

Час (с)	S (м)	ΔT (%)	$\Delta \varphi$ (%)	Δu_t (%)	Δu_n (%)
6.4	0	1.3	0.0	0.0	1.0
	30	0.2	6.1	3.1	1.8
	60	1.0	0.3	0.5	5.3
	90	1.2	4.9	5.03	4.5
	120	0.8	12.7	4.0	6.3
	150	0.4	5.7	2.4	10.6
12.8	0	3.1	1.6	0.4	1.3
	30	3.6	2.7	1.6	8.4
	60	3.0	8.0	1.1	6.0
	90	5.8	10.1	2.2	6.0
	120	2.1	18.2	5.3	26.3
	150	10.1	24.4	38.0	25.0
25.6	0	2.4	7.1	1.9	6.2
	30	2.8	8.7	5.0	26.2
	60	3.2	13.1	2.4	3.8
	90	2.7	7.4	5.6	6.2
	120	4.8	5.1	5.1	11.6
	150	0.6	37.6	9.0	15.6
64.0	0	7.1	1.7	4.8	15.5
	30	8.3	2.1	15.4	19.8
	60	7.4	2.1	1.6	6.4
	90	12.2	35.1	11.3	9.5
	120	8.4	5.5	2.1	44.2
	150	23.4	11.3	2.7	72.9

З табл. 2 випливає, що чисельний алгоритм на основі різницевої схеми Ейлера (максимальна похибка 38 %) має меншу точність порівняно з різницевою схемою Кранка–Нікольсон, а тому питання щодо її використання для чисельного моделювання перехідних процесів в РС залишається. Різниця в силових і геометричних характеристиках РС, отриманих на грубій і подрібненій різницевій схемі Ейлера, є більшою в порівнянні з відмінностями у разі використання різницевої схеми Кранка–Нікольсон.

Порівняльний аналіз розрахунків на основі різницевої схеми Кранка–Нікольсон та різницевої схеми Ейлера для $\Delta t = 0.2$ с та $\Delta S = 30$ м наведено в табл. 3.

Обчислення відносної похибки осьового зусилля T і кута нахилу φ , відносних дотичної u_t та нормальної u_n швидкостей РС здійснювалося за формулами

$$\Delta T^{**} = \left| \frac{T_{ff} - T}{T} \right|, \Delta \varphi^{**} = \left| \frac{\varphi_{ff} - \varphi}{\varphi} \right|, \Delta u_t^{**} = \left| \frac{u_{tff} - u_t}{u_t} \right|, \Delta u_n^{**} = \left| \frac{u_{nff} - u_n}{u_n} \right|, \quad (12)$$

де $T_{ff}, \varphi_{ff}, u_{tff}, u_{nff}$ — значення змінних, отримані на різницевій сітці Ейлера; T, φ, u_t, u_n — значення змінних, отриманих на різницевій сітці Кранка–Нікольсон.

Як випливає з табл. 3, результати обчислень на грубій сітці, отримані за схемами Кранка–Нікольсон і Ейлера, можуть значно відрізнятись. Причина цього — не-

Таблиця 3. Порівняння різницевих схем Кранка–Нікольсон і Ейлера для $\Delta t = 0.2$ с, $\Delta S = 30$ м

Час (с)	S (м)	ΔT^{**} (%)	$\Delta \varphi^{**}$ (%)	Δu_t^{**} (%)	Δu_n^{**} (%)
32	0	0.0	6.4	6.0	2.9
	30	0.3	5.9	12.4	5.8
	60	0.0	10.4	9.1	2.6
	90	0.0	8.9	14.0	5.1
	120	0.6	6.3	7.3	7.7
	150	2.3	0.6	11.1	3.3
64	0	4.4	5.6	22.1	13.5
	30	5.1	0.0	22.9	2.0
	60	4.3	7.6	16.0	11.6
	90	7.4	8.8	16.2	3.6
	120	3.6	13.7	26.3	7.1
	150	11.7	28.3	4.3	25.5
128	0	1.6	10.4	2.4	9.5
	30	1.9	15.8	6.2	15.4
	60	2.4	17.1	0.1	4.1
	90	1.8	19.2	8.3	5.9
	120	3.8	10.6	1.0	11.0
	150	8.0	24.6	9.7	13.3
320	0	5.9	18.6	4.3	17.5
	30	6.8	30.2	9.2	3.5
	60	5.8	5.3	1.2	7.0
	90	9.8	38.9	14.8	6.5
	120	6.2	10.2	0.5	26.8
	150	17.3	12.8	0.8	74.3

переборні помилки, спричинені похибками апроксимації відсутніх граничних умов, а також погана обумовленість матриці.

Затим проводили подрібнення у два рази обох різницевих схем. Результати розрахунків наведено в табл. 4.

Обчислення відносної похибки осевого зусилля T , кута нахилу φ , відносних дотичної u_t та нормальної u_n швидкостей РС здійснювалося за формулами (12).

У разі подрібнення різницевої сітки у два рази результати розрахунків за двома схемами (особливо на ділянці встановлення) практично збігаються (див. табл. 4). Це зумовлено тим, що має місце менший вплив похибок визначення

Таблиця 4. Результати розрахунків за різницевиими схемами Кранка–Нікольсон і Ейлера для $\Delta t = 0.1\text{с}$, $\Delta S = 15\text{ м}$

Час (с)	S (м)	ΔT^{***} (%)	$\Delta \varphi^{***}$ (%)	Δu_t^{***} (%)	Δu_n^{***} (%)
1	2	3	4	5	6
32	0	0.3	0.6	0.3	0.5
	15	0.3	0.9	0.1	0.1
	30	0.3	1.2	0.4	0.7
	45	0.4	0.5	0.0	0.2
	60	0.3	6.6	0.4	2.7
	75	0.4	0.0	0.0	1.1
	90	0.4	1.0	0.6	0.2
	105	0.4	0.3	0.2	3.6
	120	0.2	2.8	1.5	0.5
	135	0.4	2.3	1.5	4.9
64	150	0.03	2.3	1.7	1.6
	0	0.5	2.0	6.4	1.7
	15	0.5	2.5	0.6	1.4
	30	0.4	2.7	0.9	0.8
	45	0.4	2.3	0.5	0.2
	60	0.4	2.8	0.3	0.5
	75	0.5	0.9	0.0	2.4
	90	0.3	0.2	0.4	0.0
	105	0.5	0.5	0.2	0.3
	120	0.4	4.5	2.1	0.8
96	135	0.5	1.9	1.1	2.8
	150	0.5	2.1	0.1	1.3
	0	0.0	0.6	0.8	2.6
	15	0.0	3.3	1.4	3.2
	30	0.0	2.9	0.9	0.1
	45	0.0	2.2	1.1	1.6
	60	0.1	1.4	0.7	2.6
	75	0.0	1.5	0.6	0.9
	90	0.2	1.1	0.3	2.4
	105	0.2	3.0	0.4	2.2
96	120	0.4	2.3	1.1	1.5
	135	0.7	1.8	0.3	3.0
	150	0.6	1.9	1.6	1.9

1	2	3	4	5	6
128	0	0.2	1.9	0.6	1.9
	15	0.2	2.5	0.4	0.6
	30	0.1	5.0	0.9	0.6
	45	0.1	3.3	0.7	3.5
	60	0.0	7.0	2.3	0.8
	75	0.0	3.1	0.6	2.4
	90	0.0	8.3	2.6	1.5
	105	0.0	2.2	0.5	2.3
	120	0.2	8.0	0.9	3.2
	135	0.3	1.1	0.0	1.9
	150	0.5	4.8	0.0	0.2
320	0	0.0	1.8	0.3	1.8
	15	0.0	2.5	0.6	0.0
	30	0.0	2.5	0.4	0.4
	45	0.1	2.2	0.9	0.3
	60	0.0	6.9	0.5	1.1
	75	0.2	0.0	0.6	0.2
	90	0.2	9.4	0.6	0.5
	105	0.3	3.8	0.4	0.3
	120	0.3	2.8	1.1	1.9
	135	0.5	8.4	1.0	2.5
	150	0.5	0.9	0.7	0.0

граничних умов на чисельні результати. За подальшого подрібнення різницевої сітки різниця в чисельних результатах, отриманих за двома схемами, складає не більше 0.5%.

Водночас, як випливає з аналізу табл. 1 та табл. 4, результати розрахунків з використанням різницевої схеми Кранка–Нікольсон на грубій і на більш дрібній різничевої сітках для визначення характеристик хвильових процесів у РС відрізняються незначно. Розрахунки за різничевою схемою Кранка–Нікольсон навіть на грубих сітках можуть давати результати з необхідним ступенем точності. До того ж витрати часу будуть мінімальними. Інша ситуація спостерігається у разі порівняння результатів на грубій і на більш дрібній сітках для різничевої схеми Ейлера (див. табл. 2). Непереборні помилки від похибок апроксимації відсутніх граничних умов призводять до ще більших відмінностей.

Отже, різницева схема Кранка–Нікольсон є більш точною та зручною для проведення подальших розрахунків поширення та відбиття хвиль у РС.

Примусова фільтрація осциляцій чисельного розв'язку. Для різничевої схеми Кранка–Нікольсон, як і для інших схем другого порядку точності [40, 41], характерні осциляції чисельного розв'язку, які необхідно примусово згладжувати [8]. Для цього використовувався метод квазілінеаризації на розрахунковому кроці за часом. Він знижує точність різничевої схеми Кранка–Нікольсон до першого порядку точності. Через те різницева схема перетворюється з дисперсійної в дифузійну. Але примусове згладжування чисельних результатів потрібне внаслідок постійних осциляцій, які спостерігаються під час обчислень. Це є наслідком, по-перше, поганої обумовленості матриці B ; по-друге, збурень чисельного алгоритму від похибок, що виникають, коли задають початково-крайові умови; по-третє,

точності скінченно-різницевої апроксимації математичної моделі РС за схемою Кранка–Нікольсон; по-четверте, точності підсумкового обчислювального алгоритму та багатьох інших факторів, що впливають на стійкість чисельного алгоритму та коректність результатів.

Для стійкості чисельного алгоритму обчислення потрібно вести з подвійною точністю, тому що будь-які малі похибки у визначенні того чи іншого розрахункового параметра призводять до осциляцій чисельних результатів. Під час обчислень зі звичайною точністю (дотриманні невеликої кількості значущих цифр після крапки) спостерігалось накопичення похибок у разі переходу з одного розрахункового шару за часом на інший. Наслідком цього є «розхитування» розрахункового алгоритму. Під час обчислень з подвійною точністю ці осциляції за рахунок високочастотної фільтрації згладжувалися у разі переходу з одного розрахункового шару за часом на інший. Це опосередковано підтверджується результатами роботи [43] внаслідок погані обумовленості матриці сіткових лінійних рівнянь.

Для визначення оптимального режиму роботи обчислювальної програми з використанням різницевої схеми Кранка–Нікольсон було проведено порівняння високочастотного (тимчасового, формула (10)) та геометричного усереднення [40, 41]:

$$Y_i^J = \frac{Y_{i-1}^J + Y_i^J + Y_{i+1}^J}{3}. \quad (13)$$

Тут Y_i^J — позначення однієї з величин U_t , U_n , T , φ ; i — крок за координатою; J — крок за часом.

Результати порівняння відповідних характеристик напружено-деформованого стану РС наведено в табл. 5.

Таблиця 5. Результати високочастотного та геометричного усереднення

Час (с)	S (м)	ΔT^* (%)	$\Delta \varphi^*$ (%)	Δu_t^* (%)	Δu_n^* (%)
64	0	2.6	18.7	11.6	39.6
	30	3.5	40.1	1.2	32.7
	60	4.5	60.1	7.5	21.6
	90	6.1	72.5	15.7	7.0
	120	8.7	79.3	20.8	13.9
	150	14.5	45.0	9.5	42.6
128	0	3.2	31.5	8.2	27.5
	30	4.1	51.9	14.9	25.4
	60	5.2	72.9	29.1	17.9
	90	6.8	75.7	28.1	8.0
	120	9.4	95.7	33.6	7.6
	150	13.5	62.3	31.0	35.3
320	0	2.8	37.3	9.0	33.3
	30	3.7	62.6	22.8	29.9
	60	4.9	88.4	23.4	20.6
	90	6.8	111.7	30.3	11.4
	120	9.6	106.4	36.4	6.3
	150	14.3	79.7	33.7	37.4

Обчислення відносної похибки осьового зусилля T і кута нахилу φ , відносних дотичної u_t та нормальної u_n швидкостей РС здійснювалося за формулами

$$\Delta T^* = \left| \frac{T_{ww} - T_w}{T_w} \right|, \quad \Delta \varphi^* = \left| \frac{\varphi_{ww} - \varphi_w}{\varphi_w} \right|, \quad (14)$$

$$\Delta u_t^* = \left| \frac{u_{tww} - u_{tw}}{u_{tw}} \right|, \quad \Delta u_n^* = \left| \frac{u_{nww} - u_{nw}}{u_{nw}} \right|,$$

де $T_w, \varphi_w, u_{tw}, u_{nw}$ — значення змінних, отриманих при високочастотному (тимчасовому) усередненні, $T_{ww}, \varphi_{ww}, u_{tww}, u_{nww}$ — значення змінних, отриманих при геометричному усередненні.

На підставі аналізу табл. 5 можна зробити висновок, що геометричне усереднення є неприйнятним, бо призводить до некоректних результатів. Високочастотне усереднення, що потребує більших витрат часу (розрахунки виконуються на трьох послідовних шарах за часом), у порівнянні з геометричним усередненням (розрахунки виконуються на одному шарі за часом) не спричиняє помилок чисельних результатів. Такий спосіб (усереднення за часом) сприяє підвищенню точності різницевих схем до другого порядку під час розрахунку плавних нестационарних процесів, як показано в дослідженнях [40, 43]. Використання квазілінеаризації за часом накладає певні обмеження на критерій ФКЛ, які є специфічними для кожного кон-

кретного випадку чисельного розв'язання нестационарної задачі динаміки РС, а також для використовуваної різницевої схеми.

Таблиця 6. Залежність критерію ФКЛ за поздовжніми хвилями ($\sigma_{пз}$) від різних значень модуля Юнга E та швидкостей поздовжніх хвиль $v_{пз}$

Модуль Юнга E (Н/м ²)	$v_{пз}$ (м/с)	$\sigma_{пз}$
10^7	169.4	8.448
10^8	533.7	26.573
10^9	1690.3	84.498

Варіювання параметрів Δt (с) і ΔS (м) показало, що в діапазоні $\Delta t \in [0.001; 0.2]$ с і $\Delta S \in [1; 30]$ м чисельні обчислення є стійкими. Діапазон зміни критерію ФКЛ за поздовжніми хвилями ($\sigma_{пз}$) для різних значень модуля Юнга E та швидкостей поздовжніх хвиль $v_{пз}$ наведено в табл. 6.

ВИСНОВКИ

1. Розглянуто особливості застосування МСР для розв'язання нелінійних динамічних задач РС. Основними обмеженнями для застосування МСР, використовуваного для чисельного моделювання поширення та відбиття хвиль у РС, є особливості визначальних квазілінійних рівнянь, що полягають у необхідності одночасного обчислення змінних, які характеризують швидкоплинні та повільні процеси. Для таких систем рівнянь використовують термін «сингулярно збурена система рівнянь» [39]. Ці збурення є наслідком значної різниці у швидкостях поширення поздовжніх, конфігураційних, згинальних і крутильних хвиль у РС на фізичному рівні. З огляду на це потрібно застосувати спеціальні покрокові за часом методи регуляризації та фільтрації чисельних результатів. Це накладає певні обмеження на можливість моделювання реальних процесів та на точність отриманих результатів і змушує застосувати неявні різницеві схеми та високочастотну фільтрацію. Для розв'язання СЛАР з урахуванням поганої обумовленості матриці B експериментальним обчисленням було обрано метод регуляризації.

2. Здійснюючи розрахунки за різницевою схемою Кранка–Нікольсон, навіть на грубих сітках можна отримати результати з необхідним ступенем точ-

ності. До того ж витрати часу є мінімальними. Інша ситуація спостерігається у разі порівняння результатів на грубій і більш дрібній сітках для різницевої схеми Ейлера. Непереборні помилки від похибок апроксимації відсутніх граничних умов призводять до ще більших похибок.

3. На підставі порівняльного аналізу двох різницевих схем можна рекомендувати різницеву схему Кранка–Нікольсон для проведення подальших розрахунків у дослідженнях багатохвильових процесів у РС та керуванні РС у режимі реального часу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Troger H., Alperon A.P., Beletsky V.V., Dranovskii V.I., Khoroshilov V.S., Pirozhenko A.V., Zakrzhevskii A.E. Dynamics of tethered space systems. 1st ed. CRC Press, 2017. 245 p.
2. Амстердам на сваях. URL: https://www.hollandiabeztajemnic.pl/?page_id=32236&lang=ru.
3. Farenjuk G., Kaliukh I., Farenjuk E., Kaliukh T., Berchun Y., Berchun V. Experimental and theoretical diagnostics of defects in ferroconcrete piles based on reflection of longitudinal and transverse waves. High Tech Concrete: Where Technology and Engineering Meet. Hordijk D., Lukovic M. (Eds). Cham: Springer, 2018. P. 1307–1317. https://doi.org/10.1007/978-3-319-59471-2_151.
4. Kaliukh I., Farenjuk G., Trofymchuk O., Farenjuk I., Berchun Y. Identification of defects in reinforced concrete piles based on multi-wave reflection. *Proc. of the fib Symposium 2019: Concrete — Innovations in Materials, Design and Structures*, 2019. P. 991–998.
5. Kaliukh Y., Vusatiuk A. Factorization in problems of control and dynamics of lengthy systems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, N 2. P. 274–283. <https://doi.org/10.1007/s10559-019-00132-9>.
6. Турецький потік. URL: <http://turkstream.info/>.
7. Kaliukh I., Lebid O. Application of asymptotic and numerical methods to determine stability boundaries of distributed systems in a flow. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2022. Vol. 58, N 2. P. 233–241. <https://doi.org/10.1007/s10559-022-00455-0>.
8. Kaliukh I., Lebid O. Constructing the adaptive algorithms for solving multi-wave problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2021. Vol. 57, N 6. P. 938–949. <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00419-w>.
9. Kaliukh I., Trofymchuk O., Lebid O. Numerical solution of two-point static problems for distributed extended systems by means of the Nelder–Mead method. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, N 4. P. 616–624. <https://doi.org/10.1007/s10559-019-00170-3>.
10. AN/ALE-50 towed decoy system. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/AN/ALE-50_towed_decoy_system.
11. Zhu Z.H. Dynamic modeling of cable system using a new nodal position finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*. 2010. Vol. 26, Iss. 6. P. 692–704. <https://doi.org/10.1002/cnm.1161>.
12. Глибоководная добыча. URL: https://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_geolog/1445/%D0%93%D0%BB%D1%83%D0%B1%D0%BE%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F.
13. Kaliukh I., Senatorov V., Khavkin O., Kaliukh T., Khavkin K. Experimental and analytic researches on technical state, design and operation of reinforced concrete anti-landslide structures for seismic dangerous regions of Ukraine. *Proc. of the Fib Symposium: Engineering a Concrete Future: Technology, Modeling and Construction* (Apr. 22–24, 2013, Tel-Aviv). 2013. P. 625–628.

14. Гладкий А.В., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Численно-аналитические методы исследования волновых процессов. Киев: Наук. думка, 2001. 452с.
15. Гладкий А.В., Скопецкий В.В. О численном моделировании и оптимизации однонаправленных волновых процессов в неоднородных средах. *Кибернетика и системный анализ*. 2010. № 5. С. 177–186.
16. Губарев В.Ф. Рациональная аппроксимация систем с распределенными параметрами. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. № 2. С. 99–115.
17. Selezov I.T., Kryvonos Yu.G., Gandzha I.S. Wave propagation and diffraction. *Mathematical methods and applications. Ser. Foundations of Engineering Mechanics*. Singapore: Springer, 2018. 237 p. <https://doi.org/10.1007/978-981-10-4923-1>.
18. Trofimchuk A.N. Dynamic interaction of a rigid slab with a water-saturated poroelastic foundation. *International Applied Mechanics*. 1996. Vol. 32, N 1. P. 60–64. <https://doi.org/10.1007/BF02084849>.
19. Салтанов Н.В. Гибкие нити в потоках. Киев: Наук. думка, 1974. 140 с.
20. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. Москва: Физматгиз, 1959. 450 с.
21. Лебідь О.Г. П'ятимодова квазілінійна модель нелінійної динаміки протяжної системи. *Екологічна безпека та природокористування*. 2021. № 38(2). С. 104–120. <https://doi.org/10.32347/2411-4049.2021.2.104-120>.
22. Селезов И.Т. Развитие и приложение метода Коши–Пуассона в эластодинамике слоя и уравнение Тимошенко. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. № 3. С. 106–115.
23. Курант Р. Уравнения с частными производными. Москва: Мир, 1964. 830 с.
24. Берто Г.О. Океанографические буи. Ленинград: Судостроение, 1979. 216 с.
25. Бухарин С.Н., Каликов В.Н., Некрасов И.В., Орданович А.Е. О точности аппроксимации гибкой нити конечномерной моделью. *Материалы III республиканской конференции по прикладной гидромеханике*. Киев: Ин-т гидромеханики АН УССР, 1984. С. 31.
26. Leonard J.M., Nath J.H. Comparison of finite element and lumped parameter methods for oceanic cables. *J. Eng. Struct.* 1981. Vol. 3, N 6. P. 153–167.
27. Paul B., Soler A.I. Cable dynamics and optimum owing strategies for submersibles. *Mar. Technol. Soc. J.* 1972. Vol. 2. P. 34–42.
28. Peyrot A.H., Asce M. Marine cable structures. *J. Struct. Div.: Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.* 1980. Vol. 106, N 12. P. 2391–2404.
29. Ильин Р.Ф., Жигула Т.И. К динамике упруго-вязких нитей (канатов) при многоканатном подъеме груза. *Прикладная механика*. 1976. Т. 12, № 8. С. 58–63.
30. Lin J.-M., Sansalone M. Impact-echo response of hollow cylindrical concrete structure surrounded by soil and rock: Part I — Numerical studies. *Geotechnical Testing*. 1994. Vol. 17, N 2. P. 207–219.
31. Lin J.-M., Sansalone M. Impact-echo response of hollow cylindrical concrete structure surrounded by soil and rock: Part II — Experimental studies. *Geotechnical Testing*. 1994. Vol. 17, N 2. P. 220–226.
32. Liao S.T., Roesset J.M. Identification of defects in piles through dynamic testing. *Int. J. for Numer. and Analyt. Meth. in Geomech.* 1997. Vol. 21, N 4. P. 277–291.
33. Liao S.-T., Tong J.-H., Chen C.-H., Wu T.-T. Numerical simulation and experimental study of Parallel Seismic test for piles. *International Journal of Solids and Structures*. 2006. Vol. 43. P. 2279–2298.
34. Ambrosini D., Ezeberry J. Long piles integrity trough impact echo technique. *Mecanica Computacional*. Vol. XXIV. Buenos Aires, Argentina, 2005. P. 651–669.

35. Kim D.S., Seo W.S., Lee K.M. IE-SASW method for nondestructive evaluation of concrete structure. *NDT&E International*. 2006. Vol. 39, N 2. P. 143–154.
36. Ablow C.M., Schechter S. Numerical simulation of undersea cable dynamics. *Ocean Eng.* 1983. Vol. 10, N 6. P. 443–457.
37. Валеев В.И., Кожевникова Г.Л. Тросовые системы в потоке жидкости Москва: ЦАГИ, 1976. № 489. 57 с.
38. Lebid A.G. Control and dynamics of a distributed system with variable length. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2020. Vol. 52, Iss. 9. P. 39–50. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v52.i9.40>.
39. Ковалева М.А., Рутковский А.Л. Сингулярно возмущенные системы оптимального управления. Москва: Мир науки, 2020. 95 с. URL: <https://www.twirpx.com/file/3444935/>.
40. Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1983. 616 с.
41. Хрущ В.К. Численные методы газовой динамики. Днепропетровск: Днепропетровский ун-т, 1981. 102 с.
42. Kaliukh Y.I. Specific features of using the linearization method for the analysis of low-frequency oscillations of a towed system. *Int. Appl. Mech.* 2021. Vol. 57, N 1. P. 103–110. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01055-9>.
43. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 196 с.

I. Kaliukh, O. Trofymchuk, O. Lebid

PECULIARITIES OF APPLYING THE FINITE-DIFFERENCE METHOD FOR CALCULATION OF NONLINEAR PROBLEMS OF THE DYNAMICS OF DISTRIBUTED SYSTEMS IN A FLOW

Abstract. Peculiarities of application of the finite-difference method (FDM) for calculation of nonlinear dynamic problems of distributed systems (DS) in a flow are considered. The main limitations for the application of the FDM for numerical modeling of wave propagation and reflection in DS are the features of the defining quasilinear equations. They are associated with the need to simultaneously calculate the variables responsible for transient and slow wave processes. The term “singularly perturbed system of equations” is used for such systems of equations. These perturbations are the result of a significant difference in the propagation velocities of longitudinal, configurational, bending, and torsional waves in the DS at the physical level, etc. Therefore, it is necessary to use special step-by-step methods of regularization and filtering of the numerical results. It imposes certain constraints on the ability to model real processes and the accuracy of the results and forces the use of implicit difference schemes and high-frequency filtering. When solving the system of linear algebraic equations, taking into account the poor conditioning of the matrix of convective terms, the method of regularization was chosen by experimental calculation. Calculations according to the Crank–Nicholson difference scheme, even using coarse grids, can give results with the required degree of accuracy. And the cost of time will be minimal. Another picture is observed when comparing the results on coarse and fine grids for the Euler difference scheme. Irresistible mistakes brought in by errors in approximating the missing boundary conditions lead to greater differences.

Keywords: finite difference method, distributed systems, nonlinearity, singularity, high frequency filtering.

Надійшла до редакції 16.03.2022