УДК 519.65

**П.С. МАЛАЧІВСЬКИЙ**
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача
НАН України, Львів, Україна,
e-mail: *Petro.Malachivskyy@gmail.com*.

**Л.С. МЕЛЬНИЧОК**
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача
НАН України, Львів, Україна,
e-mail: *levkom@gmail.com.*

**Я.В. ПІЗЮР**
Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна,
e-mail: *yaropolk.v.piziur@lpnu.ua.*

# ЧЕБИШОВСЬКЕ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ РАЦІОНАЛЬНИМ ВИРАЗОМ З УМОВОЮ

**Анотація.** Запропоновано метод побудови чебишовського наближення функцій багатьох змінних раціональним виразом з інтерполяційною умовою. Ідея методу ґрунтується на побудові граничного середньостепеневого наближення раціональним виразом з інтерполяційною умовою у нормі простору $L^p$ для $p \to \infty$. Для побудови такого наближення використано ітераційну схему на основі методу найменших квадратів з двома змінними ваговими функціями. Одна вагова функція забезпечує побудову середньостепеневого наближення з умовою, а друга — уточнення параметрів раціонального виразу за схемою його лінеаризації. Збіжність методу забезпечує оригінальний спосіб послідовного уточнення значень вагових функцій, який враховує результати наближення на попередніх ітераціях. Наведено результати тестових прикладів, що підтверджують швидку збіжність запропонованого методу побудови чебишовського наближення раціональним виразом з умовою.

**Ключові слова:** чебишовське наближення раціональним виразом, чебишовське наближення з умовою, функції багатьох змінних, середньостепеневе наближення, метод найменших квадратів, змінна вагова функція.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай $f(X)$ — функція $n$ дійсних змінних, де $X$ — вектор, $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, неперервна в деякій обмеженій області $D$ ($D \subset R^n$, $R^n$ — $n$-вимірний векторний простір). Функцію $f(X)$, задану на множині точок $\Omega=\{X_j\}_{j=1}^{s}$ з області $D$ ($\Omega \subset D$), потрібно наблизити на множині точок $\Omega$ раціональним виразом

$$R_{k,l}(a,b;X)=\frac{\sum_{i=0}^{k} a_i \varphi_i(X)}{\sum_{i=0}^{l-1} b_i \psi_i(X)+\psi_l(X)}, \tag{1}$$

де $\varphi_i(X)$, $i=\overline{0,k}$, та $\psi_i(X)$, $i=\overline{0,l}$, — системи лінійно незалежних неперервних на $D$ дійсних функцій, $a_i$, $i=\overline{0,k}$, та $b_i$, $i=\overline{0,l-1}$, — невідомі параметри: $\{a_i\}_{i=0}^{k} \in A$, $A \subseteq R^{k+1}$, $\{b_i\}_{i=0}^{l-1} \in B$, $B \subseteq R^l$. Побудова чебишовського наближення функції $f(X)$ раціональним виразом (1) з умовою в точці $U$ ($U \in \Omega$) полягає в обчисленні таких значень параметрів $a^*$ та $b^*$, за яких досягається найменше значення похибки наближення

$$\max_{X \in \Omega} |f(X)-R_{k,l}(a^*,b^*;X)| = \min_{a \in A,\ b \in B} \max_{X \in \Omega} |f(X)-R_{k,l}(a,b;X)|, \tag{2}$$

і в точці $U$ наближення $R_{k,l}(a^*,b^*;X)$ відтворює значення функції $f(U)$:

$$f(U)=R_{k,l}(a^*,b^*;U)=\nu. \tag{3}$$

Наближення раціональним виразом $R_{k,l}(a^*, b^*; X)$, що задовольняє умову (2), (3), називають чебишовським наближенням з умовою або з інтерполюванням [1, 2].

Чебишовське наближення раціональним виразом з інтерполюванням використовують під час розв'язання багатьох прикладних задач [1–4], зокрема, для лінеаризації термометричних характеристик термодіодних сенсорів [5, 6], проєктування манометрів [7] тощо.

Задача побудови чебишовського наближення функцій раціональним виразом з умовою сформульована в [8]. Властивості чебишовського наближення з умовою вперше описано в [9]. Під час чебишовського наближення раціональним виразом здебільшого застосовують зведення до послідовного розв'язування задачі лінійного програмування [10, 11] або метод нелінійної оптимізації [2, 10]. У [12, 13] описано алгоритми обчислення параметрів чебишовського наближення функцій однієї змінної на основі схеми Ремеза з використанням диференціальної корекції.

У цій статті пропонується метод побудови чебишовського наближення функцій багатьох змінних раціональним виразом як граничного наближення у нормі простору $L^p$ для $p \to \infty$ [11]. Він полягає в послідовній побудові середньостепеневих наближень з інтерполяційною умовою [14, 15]. Значення параметрів середньостепеневих наближень раціональним виразом з інтерполюванням обчислюються із застосуванням ітераційної схеми на основі методу найменших квадратів з використанням двох змінних вагових функцій, значення яких уточнюються з урахуванням всіх проміжних середньостепеневих наближень [11, 16]. Параметри раціонального наближення за методом найменших квадратів визначаються з використанням лінеаризації [17].

## ОБЧИСЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЧЕБИШОВСЬКОГО НАБЛИЖЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИМ ВИРАЗОМ З УМОВОЮ

Якщо для функції $f(X)$ на множині точок $\Omega$ існує неперервне чебишовське наближення раціональним виразом $R_{k,l}(a,b;X)$ з інтерполяційною умовою, то його можна побудувати послідовним обчисленням середньостепеневого наближення з умовою у просторі $E^p$ для $p = 2, 3, 4, \ldots$ [11, 15]. Для оцінки похибки наближення в просторі $E^p$ використовуємо норму

$$\|\Delta\|_{E^p} = \left( \sum_{X \in \Omega} |f(X) - R_{k,l}(a,b;X)|^p \right)^{1/p}.$$

Граничне значення норми $\|\Delta\|_{E^p}$ для $p \to \infty$, аналогічно до норми простору $L^p$ для $p \to \infty$, збігається з нормою простору неперервних функцій $\|\Delta\|_C$ [18]:

$$\|\Delta\|_C = \max_{X \in \Omega} |f(X) - R_{k,l}(a,b;X)|.$$

Збіжність обчислювальних схем побудови чебишовського наближення на основі середньостепеневого наближення теоретично обґрунтував і проілюстрував на чисельних прикладах Є.Я. Ремез у [18].

Нехай для функції $f(X)$, заданої на множині точок $\Omega$, існує чебишовське наближення раціональним виразом $R_{k,l}(a,b;X)$ з умовою у точці $U$. Побудова такого чебишовського наближення функції $f(X)$ полягає в послідовному обчисленні середньостепеневих наближень $f(X)$ на множині точок $\overline{\Omega} = \Omega \setminus \{U\}$ виразом

$$\overline{R}_{k,l}(a,b;X) = \frac{a_0 \varphi_0(X) + \sum_{i=1}^{k} a_i \varphi_i(X)}{\sum_{i=0}^{l-1} b_i \psi_i(X) + \psi_l(X)}, \tag{4}$$

де
$$a_0 = \left( \nu \left( \sum_{i=0}^{l-1} b_i \psi_i(U) + \psi_l(U) \right) - \sum_{i=1}^{k} a_i \varphi_i(U) \right) \Big/ \varphi_0(U),$$

$a_i \ (i=\overline{1,k})$ і $b_i \ \ (i=\overline{0,l-1})$ — невідомі параметри. Вираз $\overline{R}_{k,l}(a,b;\,X)$ отримано із раціонального виразу (1) з урахуванням умови (3). Під час отримання значення параметра $a_0$ припускалося, що $\varphi_0(U)$ не дорівнює нулеві. Для обчислення значень параметрів середньостепеневих наближень виразом $\overline{R}_{k,l}(a,b;\,X)$ у просторі $E^p$ для $p=2,3,4,\ldots$ використовуємо ітераційну схему на основі методу найменших квадратів [11, 16]

$$\sum_{X\in\overline{\Omega}} \rho_r(X)(f(X)) - \overline{R}_{k,l}(a,b;\,X)^2 \xrightarrow[a\in A,\,b\in B]{} \min, \quad r=0,\ldots,p-2,\ p=2,3,\ldots, \tag{5}$$

з послідовним уточненням значень вагової функції
$$\rho_0(X)\equiv 1, \quad \rho_r(X)=\rho_{r-1}(X)|\Delta_r(X)| = \prod_{i=1}^{r} |\Delta_i(X)|, \quad r=1,\ldots,p-2, \tag{6}$$

де $\Delta_s(X)=f(X)-\overline{R}_{k,l,s-1}(a,b;X)$, $k=\overline{1,r}$, $\overline{R}_{k,l,s}(a,b;X)$ — наближення функції $f(X)$ виразом (4) за методом найменших квадратів з ваговою функцією $\rho_s(X)$ на множині точок $\overline{\Omega}$ з інтерполюванням у точці $U$. Наближення $\overline{R}_{k,l,s}(a,b;X)$ відповідає середньостепеневому наближенню функції $f(X)$ степеня $p=s+2$.

Побудова наближення раціональним виразом за методом найменших квадратів — це нелінійна задача [19]. Обчислення раціонального наближення за методом найменших квадратів часто зводять до задачі нелінійної оптимізації [20], де цільова функція може мати багато локальних мінімумів. Практично для отримання такого наближення використовують й інші підходи [19–21], зокрема, в [20] обчислення параметрів наближення раціональним виразом зводять до задачі квадратичного програмування зі строго опуклою цільовою функцією.

Для побудови наближення раціональним виразом за методом найменших квадратів застосуємо лінеаризацію з використанням змінної вагової функції [11, 17], яка полягає в ітераційному уточненні наближення раціональним виразом (4). Відповідно до цього методу лінеаризації для кожного фіксованого значення $p$ $(p=2,3,4,\ldots)$ обчислюємо наближення функції $f(X)$ виразом $\overline{R}_{k,l}(a,b;X)$ (4) за методом найменших квадратів

$$\sum_{X\in\overline{\Omega}} \rho_r(X) \upsilon_{r,t}(X)(\Phi_{r,t}(a,b;X))^2 \xrightarrow[a\in A,\,b\in B]{} \min, \quad r=p-2,\ t=0,1,\ \ldots, \tag{7}$$

де
$$\Phi_{r,t}(a,b;X) = f(X)\left( \sum_{i=0}^{l-1} b_{i,r,t}\psi_i(X) + \psi_l(X) \right) - \sum_{i=1}^{k} a_{i,r,t}\varphi_i(X) - a_0\varphi_0(X). \tag{8}$$

Значення вагової функції $\rho_r(X)$ обчислюємо за формулою (6), а вагової функції $\upsilon_{r,t}(X)$ — за формулою

$$\upsilon_{r,t}(X) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \quad r=0, \quad t=0, \\ \left( \sum_{i=0}^{l-1} b_{i,r,t-1}\psi_i(X) + \psi_l(X) \right)^{-2}, \text{ якщо } t>0. \end{cases} \tag{9}$$

Уточнення наближення виразом $\overline{R}_{k,l}(a,b;\,X)$ за методом найменших квадратів (7) з ваговими функціями (6) і (9) можна контролювати точністю $\varepsilon_1$ виконанням умови

$$|\eta_{r,t-1} - \eta_{r,t}| \le \varepsilon_1 \eta_{r,t}, \tag{10}$$

де

$$\eta_{r,t} = \sum_{X \in \overline{\Omega}} \rho_r(X) \upsilon_{r,t}(X) (\Phi_{r,t}(a,b;X))^2 .$$

Виконання умови (10) означає, що середньостепеневе наближення степеня $p = r + 2$ раціональним виразом $\overline{R}_{k,l,r}(a,b;X)$ обчислено з точністю $\varepsilon_1$. Значення параметрів наближення $\overline{R}_{k,l,r}(a,b;X)$ такі:

$$a_{j,r} = a_{j,r,t} \, (j = \overline{1,k}), \quad b_{j,r} = b_{j,r,t} \;\; (j = \overline{0, l-1}).$$

Отже, побудова чебишовського наближення раціональним виразом (4) полягає в застосуванні двох ітераційних процесів: вкладених (7), (9) і зовнішніх (5), (6) ітерацій. Завершення ітерацій (5), (6) можна контролювати досягненням деякої заданої точності $\varepsilon$

$$\mu_{r-1} - \mu_r \le \varepsilon \mu_r, \tag{11}$$

де

$$\mu_r = \max_{(x,y) \in \overline{\Omega}} | f(X) - \overline{R}_{k,l,r}(a,b;X)| .$$

Під час розв'язання тестових прикладів для функцій однієї, двох і трьох змінних досягнення точності $\varepsilon = 0.003$ спостерігалося з використанням від п'яти до двадцяти двох ітерацій (5), (6). Ця точність забезпечувала збіг двох-трьох значущих цифр похибки чебишовського наближення раціональним виразом. При цьому точність $\varepsilon_1 = 0.003$ визначення проміжних наближень раціональним виразом досягалась за три-чотири внутрішні ітерації (7), (9). Якщо для $r \ge 1$ значення вагової функції $\upsilon_{r,0}(X)$ не змінювати — залишити рівними попереднім $\upsilon_{r-1,t}(X)$, то для уточнення раціонального виразу достатньо було лише двох ітерацій (7), (9).

У результаті чебишовське наближення неперервної функції $f(X)$ раціональним виразом (1) на множині точок $\Omega$ з інтерполюванням у точці $U$ визначається значеннями параметрів, обчисленими для наближення виразом (4)

$$R_{k,l}(a,b;X) = \overline{R}_{k,l,r}(a,b;X). \tag{12}$$

Якщо $k \ge l$, то для отриманого наближення (12) проводимо ще корегування з використанням адитивної поправки

$$\overline{\alpha}_0 = (\mu_{\max} + \mu_{\min})/2,$$

де

$$\mu_{\max} = \max_{X \in \Omega_u} (f(X) - R_{k,l}(a,b;X)), \quad \mu_{\min} = \min_{X \in \Omega_u} (f(X) - R_{k,l}(a,b;X)).$$

Скореговане наближення неперервної функції $f(X)$, заданої на множині точок $X \in \Omega$ раціональним виразом (1) для $k \ge l$ з умовою у точці $U$, буде

$$R_{k,l}(a,b;X) = R_{k,l}(a,b;X) + \overline{a}_0 . \tag{13}$$

Зазначимо, що скореговане наближення раціональним виразом (13) функції $f(X)$, заданої на множині точок $X \in \Omega$ з інтерполюванням у точці $U$, забезпечує зменшення абсолютної похибки наближення на величину значення $\overline{a}_0$, але водночас спричиняє похибку такої ж величини $\overline{a}_0$ під час відтворення значення функції в точці $U$.

Під час побудови чебишовського наближення таблично заданих функцій раціональним виразом з умовою для деяких значень степенів чисельника $k$ і знаменника $l$ можливе отримання розривного наближення. Це означає, що для заданої функції не існує неперервного чебишовського наближення раціональним виразом з умовою для цих значень степенів $k$ і $l$. За необхідності побудови чебишовського наближення раціональним виразом для цієї функції можна продовжити обчислення з іншими значеннями степенів $k$ і $l$.

### ОБЧИСЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЧЕБИШОВСЬКОГО НАБЛИЖЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИМ ВИРАЗОМ З ВІДНОСНОЮ ПОХИБКОЮ

Якщо неперервна функція $f(X)$ не набуває значень, що дорівнюють нулеві на множині точок $\Omega$, і чебишовське наближення $f(X)$ узагальненим раціональним виразом (1) з інтерполюванням у точці $U$ існує, то таке наближення з відносною похибкою можна обчислити за описаним методом. Схема обчислення чебишовського наближення раціональним виразом з відносною похибкою і умовою в точці $U$ передбачає такі зміни.

Початкові значення вагової функції $\rho_0(X)$ у (6) покладаємо рівними

$$\rho_0(X) = \frac{1}{f(X)^2}. \tag{14}$$

Значення похибки $\mu_r$ чебишовського наближення раціональним виразом (4) в умові (11) обчислюємо за формулою:

$$\mu_r = \max_{X \in \Omega} \left| 1 - \frac{\overline{R}_{k,l,r-1}(a,b;X)}{f(X)} \right|. \tag{15}$$

Уточнені значення вагової функції $\rho_r(X)$ обчислюємо за формулою (6), в якій

$$\Delta_s(X) = 1 - \frac{\overline{R}_{k,l,s}(a,b;X)}{f(X)}. \tag{16}$$

За виконання умови (11) з урахуванням (15) чебишовське наближення неперервної функції $f(X)$ раціональним виразом (1) на множині точок $\Omega$ з відносною похибкою і умовою в точці $U$ будемо вважати обчисленим з точністю $\varepsilon$. Значення параметрів чебишовського наближення раціональним виразом (1) дорівнюватимуть відповідним параметрам отриманого наближення виразом (4)

$$R_{k,l}(a,b;X) = \overline{R}_{k,l,r}(a,b;X). \tag{17}$$

Для наближення (17) можна провести ще корегування з використанням мультиплікативної поправки $d$

$$R_{k,l}(a,b;X) = d\overline{R}_{k,l}(a,b;X),$$

де

$$d = \frac{2f(X_{\max})f(X_{\min})}{R_{k,l}(a,b;X_{\min})f(X_{\max}) + R_{k,l}(a,b;X_{\max})f(X_{\min})},$$

$X_{\max}$ — точка, в якій відносна похибка $\mu_r$ наближення (17) досягає найбільшого значення на множині точок $\Omega$, а $X_{\min}$ — найменшого. Значення корегувальної поправки $d$ визначаємо як розв'язок однопараметричної задачі чебишовського наближення функції $f(X)$ виразом $d\,R_{k,l}(a,b;X)$ на множині точок $\Omega$ з відносною похибкою

$$\max_{X \in \Omega} \left| \frac{f(X) - dR_{k,l}(a,b;X)}{f(X)} \right| \xrightarrow[d]{} \min.$$

**Приклад 1.** Знайдемо чебишовське наближення функції $y(x) = e^x$, заданої на відрізку $[-1, 2]$ у точках $x_i$, $i = \overline{0, 30}$, $x_i = -1 + 0.1i$, раціональним виразом $R_{2,1}(a,b;x)$, в якому чисельник і знаменник — відповідно поліноми другого та першого степеня за змінною $x$, з умовою в точці $\bar{x} = x_6 = -0.4$.

З використанням запропонованого методу для $\varepsilon = 0.003$ за п'ять ітерацій (5) з ваговою функцією (6) для функції $y(x)$ отримано раціональний вираз

$$R_{2,1}(a,b;x) = \frac{0.9560543189x^2 + 2.921771312x + 3.848025101}{3.823924539 - x}, \tag{18}$$

який з урахуванням адитивної поправки $\bar{a}_0 = 0.0002140135$ забезпечує абсолютну похибку наближення 0.022702257. Під час обчислення наближення (18) похибка за ітераціями (5) набувала таких значень:

$$0.0320089585,\ 0.0240330006,\ 0.023045826,\ 0.022958886,\ 0.022916264. \tag{19}$$

Криву похибки апроксимації функції $y(x)$ раціональним виразом (18) відображено на рис. 1. Ця крива відповідає характеристичній властивості чебишовського наближення з інтерполюванням [7] — має чотири екстремальні точки, в яких досягає найбільшого за модулем відхилення. Значення модулів цих відхилень збігаються (або рівні) в межах точності обчислення наближення і знак відхилень у цих точках чергується за винятком точок, сусідніх з точкою умови $\bar{x} = -0.4$:

$$(-1, -0.0223232025), (0.7, -0.022702257), (1.7, 0.022702257), (2, -0.021220319). \tag{20}$$

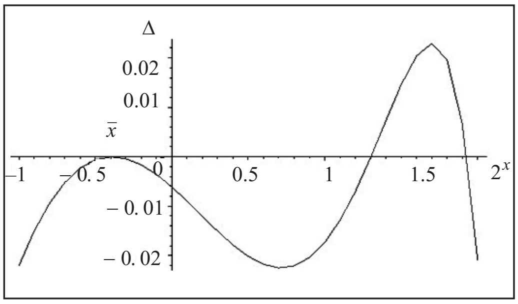

*Рис. 1.* Крива похибки апроксимації функції $y(x)$ раціональним виразом (18) з умовою в точці $\bar{x} = -0.4$

Відповідно до характеристичної властивості чебишовського наближення з умовою знаки похибки відхилення наближення в екстремальних точках, сусідніх з точкою умови, повинні збігатися [7].

У крайніх екстремальних точках (20) спостерігається дещо менше за модулем значення похибки наближення. Розкид значень похибки наближення в екстремальних точках (20) за модулем дорівнює 0.001481938, що становить 6.66 % середнього значення модулів похибки наближення в екстремальних точках 0.02223700888. Для досягнення кращого вирівнювання значень модулів похибок наближення в екстремальних точках (20) можна підвищити точність обчислення чебишовського наближення, зменшивши значення $\varepsilon$ в умові (11). Чебишовське наближення функції $y(x)$ раціональним виразом з інтерполюванням у точці $\bar{x} = -0.4$ для $\varepsilon = 0.00003$ було отримано за 115 ітерацій (5). Раціональний вираз

$$\hat{R}_{2,1}(a,b;x) = \frac{0.9566342954x^2 + 2.921051278x + 3.846359357}{3.82355946 - x} \tag{21}$$

з урахуванням поправки $\bar{a}_0 = -0.0000322565$ забезпечує абсолютну похибку наближення 0.02236887.

Для наближення функції $y(x)$ раціональним виразом (21) в екстремальних точках спостерігались такі значення похибок:

$$(-1, -0.0222769132), (0.7, -0.022336613), (1.7, 0.022336614), (2, -0.022272896). \tag{22}$$

З (22) випливає, що під час підвищення точності обчислення наближення екстремальні точки не змінилися. В крайніх екстремальних точках також спостерігаємо дещо менше за модулем значення похибки наближення, проте розкид значень похибки наближення екстремальних точках за модулем значно зменшився 0.000063708 і становить лише 0.286 % середнього значення модулів похибки наближення в цих точках 0.02230575905.

Чебишовське наближення функції $y(x)$ раціональним виразом $R_{2,1}(a,b;x)$ з умовою в точці $\bar{x}=-0.4$ і відносною похибкою для $\varepsilon=0.003$ було обчислено за десять ітерацій (5). Раціональний вираз

$$\bar{R}_{2,1}(a,b;x)=\frac{0.7972125368x^2+2.74683821x+3.678106394}{3.659074535-x} \tag{23}$$

з урахуванням корегувальної поправки $d=0.999968438$ забезпечує відносну похибку наближення 1.021717265 %. Під час обчислення наближення (23) похибка за ітераціями (5) набувала таких значень:

$$\begin{gathered}0.02904823484,\quad 0.01270885344,\quad 0.01084661589,\quad 0.01065015905,\quad 0.01051006218,\\ 0.01041509521,\quad 0.01034981727,\quad 0.01030468772,\quad 0.01027323863,\quad 0.01024905742.\end{gathered} \tag{24}$$

Аналізуючи зміну значень похибки наближення за ітераціями (5), наведених у (19) і (24), бачимо, що значення похибки наближення досить швидко зменшується на початкових ітераціях. У середньому для уточнення перших двох значущих цифр у значенні похибки наближення достатньо від двох до чотирьох ітерацій.

Графік відносної похибки наближення (23) також відповідає характерним ознакам чебишовського наближення з умовою в одній точці [7, 15], а саме в екстремальних точках, сусідніх з точкою умови, знак відносної похибки збігається, а в решті екстремальних точок — чергується. Відносна похибка в екстремальних точках набувала таких значень (у відсотках):

$$(-1,-0.9778652453),\ (0.2,-1.021717195),\ (1.5,1.021717265),\ (2,-0.9682237628).$$

Для досягнення кращого вирівнювання значень модулів похибок наближення в екстремальних точках було отримано чебишовське наближення раціональним виразом $R_{2,1}(a,b;x)$ з точністю $\varepsilon=0.00003$ за 84 ітерації (5). З урахуванням корегувальної поправки $d=1.000003503$ вираз

$$\hat{R}_{2,1}(a,b;x)=\frac{0.7574484034x^2+2.687510612x+3.644765167}{3.614415586-x}$$

забезпечує відносну похибку наближення 1.012 %. Для цього наближення в екстремальних точках спостерігались такі значення похибки (у відсотках):

$$(-1,\ -1.010535459),\ (0.2,\ -1.011625929),$$

$$(1.5,\ 1.011625981),\ (2,\ -1.010751901).$$

Наведені результати підтверджують збіжність запропонованого методу. Підвищуючи точність обчислення чебишовського наближення в умові (11), можна отримати наближення з необхідною точністю, при цьому звичайно зростає кількість ітерацій в процесі обчислення параметрів наближення. Практично задовільна точність обчислення чебишовського наближення забезпечується для $\varepsilon=0.003$. Як для абсолютної, так і для відносної похибки ця точність забезпечує отримання наближення з двома-трьома правильними значущими цифрами похибки наближення з використанням від п'яти до десяти ітерацій для наближення функції однієї змінної раціональним виразом з чотирма параметрами. У випадку підвищення точності обчислення наближення, починаючи зі значення $\varepsilon=0.003$, зміни точок з екстремальними похибками наближення не спостерігалося.

**Приклад 2.** Знайдемо чебишовське наближення функції $z(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$, заданої в точках $(x_i, y_j)$, $i = \overline{0,10}$, $j = \overline{0,10}$, де $x_i = -1 + 0.2i$, $y_j = -1 + 0.2j$, раціональним виразом $R_{2,2}(a, b; x, y)$, в якому чисельник і знаменник — поліноми другого степеня за змінними $x$ та $y$, з інтерполюванням у точці $(\bar{x}, \bar{y}) = (-0.8, -0.8)$.

З використанням запропонованого методу для $\varepsilon = 0.003$ за 16 ітерацій (5), (6) для функції $z(x, y)$ отримано раціональний вираз

$$R_{2,2}(a, b; x, y) = \frac{P_2(a; x, y)}{Q_2(b; x, y)}, \tag{25}$$

в якому

$$P_2(a; x, y) = 1.01168691 + 0.01271841065x + 0.01271832247y +$$
$$+ 0.01883247505xy - 0.3389069836x^2 - 0.3389072952y^2,$$
$$Q_2(b, x, y) = 1 + 0.01749531648x + 0.01749495916y +$$
$$+ 0.0798051921xy + 0.801369663x^2 + 0.8013684061y^2.$$

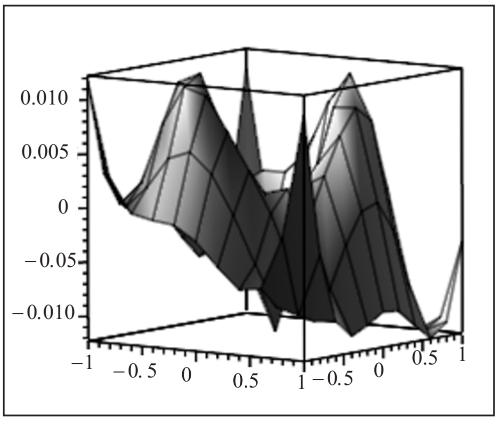


*Рис. 2.* Поверхня похибки апроксимації функції $z(x, y)$ раціональним виразом (25) з інтерполюванням у точці $(\bar{x}, \bar{y}) = (-0.8, -0.8)$

Раціональний вираз (25) з урахуванням корегувальної поправки $\bar{a}_0 = -0.0000309595$ забезпечує абсолютну похибку наближення 0.0122648252. Поверхню похибки апроксимації функції $z(x, y)$ раціональним виразом (25) показано на рис. 2.

Чебишовське наближення функції $z(x, y)$ раціональним виразом з інтерполюванням у точці $(\bar{x}, \bar{y}) = (-0.8, -0.8)$ для $\varepsilon = 0.00003$ було отримано за 186 ітерацій (5)

$$\widehat{R}_{2,2}(a, b; x, y) = \frac{\widehat{P}_2(a; x, y)}{\widehat{Q}_2(b; x, y)}, \tag{26}$$

$$\widehat{P}_2(a; x, y) = 1.011896416 + 0.01275075547y - 0.01280516368x +$$
$$+ 0.01467104117xy - 0.3371140452x^2 - 0.337412009y^2,$$
$$\widehat{Q}_2(b; x, y) = 1 + 0.01764260288y + 0.01813318269x +$$
$$+ 0.3314116329xy + 0.8242332228x^2 + 0.8232947458y^2.$$

Раціональний вираз (26) забезпечує похибку наближення 0.0119322935. Корегувальна поправка для цього наближення $\bar{a}_0 = 0.1483705\text{e}-4$. Врахування цієї поправки не має практичного сенсу, оскільки вона становить лише 0.124 % похибки наближення (26).

Чебишовське наближення функції $z(x, y)$ раціональним виразом $R_{2,2}(a, b; x, y)$ з інтерполюванням у точці $(\bar{x}, \bar{y}) = (-0.8, -0.8)$ з відносною похибкою для $\varepsilon = 0.003$ було обчислено за три ітерації (5). Раціональний вираз

$$R_{2,2}(a, b; x, y) = \frac{P_2(a; x, y)}{Q_2(b; x, y)},$$

в якому

$$P_2(a;x,\,y)=1.029409171+0.0009985053314y+0.0009985051201x+$$

$$+0.005933912472xy-0.3263794034x^2-0.3263794041y^2,$$

$$Q_2(b;x,\,y)=1-0.002981207706y-0.00298120858x+$$

$$+0.04299484992xy+0.9178425704x^2+0.9178425682y^2,$$

з урахуванням корегувальної поправки $d=1.000294165$ забезпечує відносну похибку наближення 2.94 %.

Чебишовське наближення функції $z(x,y)$ раціональним виразом $R_{2,2}(a,b;x,\,y)$ з інтерполюванням у точці $(\bar{x},\,\bar{y})=(-0.8,-0.8)$ з відносною похибкою для $\varepsilon=0.00003$ було отримано за 24 ітерації (5). З урахуванням корегувальної поправки $d=0.9999926746$ отримане чебишовське наближення забезпечувало відносну похибку 2.77 %.

**Приклад 3.** Знайдемо чебишовське наближення функції $z_3(x,\,y,t)=e^{-(x+y+t)}$, заданої в точках $(x_i,\,y_j,t_r)$, $i=\overline{0,20}$, $j=\overline{0,20}$, $r=\overline{0,20}$, де $x_i=-1+0.1i$, $y_j=-1+0.1j$, $t_r=-1+0.1r$, раціональним виразом $R_{1,1}(a,b;x,\,y,t)$, в якому чисельник і знаменник — поліноми першого степеня від змінних $x$, $y$ та $t$, з інтерполюванням у точці $(\bar{x},\,\bar{y},\bar{t})=(-0.8,-0.8,-0.8)$.

З використанням запропонованого методу (5) для $\varepsilon=0.003$ за 22 ітерації для функції $z_3(x,\,y,t)$ отримано наближення раціональним виразом

$$R_{1,1}(a,b;x,y,t)=\frac{P_1(a;x,y,t)}{Q_1(b;x,y,t)},\tag{27}$$

в якому

$$P_1(a;x,\,y,t)=1.65548594111-1.09662621859x-1.09662693548y-1.09662646991t,$$

$$Q_1(a;x,\,y,t)=1+0.254993735029x+0.254993459307y+0.254993922881t.$$

Раціональний вираз (27) забезпечує абсолютну похибку наближення 0.97579906188 з корегувальною поправкою $\bar{a}_0=0.026366720935$.

Чебишовське наближення функції $z_3(x,\,y,t)$ раціональним виразом $R_{1,1}(a,b;x,\,y,t)$ з відносною похибкою не отримали. Під час обчислення наближення з відносною похибкою на ітераціях (6), (8) отримували розривний раціональний вираз.

Чебишовське наближення функції $z_3(x,\,y,t)$ раціональним виразом, в якому чисельник і знаменник — поліноми другого степеня за змінними $x$, $y$ та $t$, з використанням методу (5) для $\varepsilon=0.003$ було отримано за 11 ітерацій. Абсолютна похибка цього наближення з урахуванням корегувальної поправки $\bar{a}_0=0.0002501987786$ дорівнювала 0.0233863597314. Чебишовське наближення функції $z_3(x,\,y,t)$ раціональним виразом, в якому чисельник і знаменник — поліноми другого степеня за змінними $x$, $y$ та $t$, з відносною похибкою з використанням ітерацій (5) з ваговою функцією (14) для $\varepsilon=0.003$ було отримано за 19 ітерацій. З урахуванням корегувальної поправки $d=1.00006973092$ воно забезпечувало відносну похибку наближення 2.16 %.

**ВИСНОВКИ**

Запропонований метод побудови чебишовського наближення таблично заданих функцій багатьох змінних раціональним виразом з умовою ґрунтується на ідеї побудови граничного середньостепеневого наближення з умовою. Він полягає в послідовному обчисленні середньостепеневих наближень раціональним виразом з умовою, яке реалізовано з використанням методу найменших квадратів з двома змінними ваговими функціями. Одна вагова функція забезпечує побудову середньостепеневого наближення раціональним виразом з умовою, а друга — уточнення параметрів наближення раціональним виразом за методом найменших квадратів відповідно до схеми лінеаризації. Збіжність методу забезпечує оригінальний спосіб послідовного уточнення значень вагових функцій за формулами (6) і (9) для абсолютної похибки й врахуванням формул (14), (16) для відносної похибки. Метод простий для реалізації і передбачає можливість обчислення параметрів чебишовського наближення раціональним виразом з інтерполяційною умовою для абсолютної і відносної похибок з потрібною точністю. Результати розв'язування тестових прикладів підтверджують швидку збіжність запропонованого методу для наближення раціональним виразом з умовою функцій однієї, двох і трьох змінних. Під час розв'язування тестових прикладів за цим методом збіг двох-трьох значущих цифр похибки чебишовського наближення раціональним виразом з умовою досягався з використанням від 5 до 22 ітерацій.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Collatz L., Krabs W. Approximationstheorie. Tschebyscheffsche approximation mit anwendungen. Teubner Studienbucher Mathematik (TSBMA). Vieweg+Teubner Verlag Wiesbaden, 1973. P. 209. https://doi.org/10.1007/978-3-322-94885-4.
2. Попов Б.А., Теслер Г.С. Приближение функций для технических приложений. Киев: Наук. думка. 1980. 352 с.
3. Коллатц Л., Альбрехт Ю. Задачи по прикладной математике. Москва: Мир, 1978. 167 с.
4. Skopetskii V.V., Malachivskii P.S. Chebyshev approximation of functions by the sum of a polynomial and an expression with a nonlinear parameter and endpoint interpolation. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2009. N 1. P. 58–68. https://doi.org/10.1007/s10559-009-9078-4.
5. Верлань А.Ф., Адбусадаров Б.Б., Игнатенко А.А., Максимович Н.А. Методы и устройства интерпретации экспериментальных зависимостей при исследовании и контроле энергетических процессов. Киев: Наук. думка, 1993. 208 с.
6. Rudtsch S., von Rohden C. Calibration and self-validation of thermistors for high-precision temperature measurements. *Measurement.* 2015. Vol. 76. P. 1–6. https://doi.org/10.1016/J.MEASUREMENT.2015.07.028.
7. Малачівський П.С., Скопецький В.В. Неперервне й гладке мінімаксне сплайн-наближення. Київ: Наук. думка, 2013. 270 с.
8. Charles B. Dunham C.B. Rational approximation with a vanishing weight function and with a fixed value at zero. *Mathematics of Computation.* 1976. Vol. 30, N 133. P. 45–47.
9. Мельничок Л.С., Попов Б.А. Наилучшее приближение табличных функций с условием. Алгоритмы и программы для вычисления функций на ЭЦВМ. Киев: Ин-т кибернетики, 1977. Вып. 4. С. 189–200.
10. Kalenchuk-Porkhanova A.A. Best Chebyshev approximation of functions of one and many variables. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2009. N 6. P. 988–996. https://doi.org/10.1007/s10559-009-9163-8.
11. Malachivskyy P.S., Pizyur Ya.V., Malachivsky R.P. Chebyshev approximation by the rational expression of functions of many variables. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2020. Vol. 56, N 5. P. 811–819. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00302-0.

12. Filip S.-I., Nakatsukasa Y., Trefethen L.N., Beckermann B. Rational minimax approximation via adaptive barycentric representations. URL: https://arxiv.org/pdf/1705.10132.

13. Nakatsukasa Y., Se′te O., Trefethen L.N. The AAA algorithm for rational approximation. *SIAM J. Sci. Comput.* 2018. Vol. 40, N 3. P. A1494–A1522. https://doi.org/10.1137/16M1106122.

14. Malachivskyy P., Melnychok L., Pizyur Ya. Chebyshev approximation of multivariable functions with the interpolation. *Mathematical Modeling and Computing.* 2022. Vol. 9, N 3. P. 757–766. https://doi.org/10.23939/mmc2022.03.757.

15. Malachivskyy P.S., Melnychok L.S., Pizyur Y.V. Chebyshev approximation of the functions of many variables with the condition. *IEEE 15th International Conference on Computer Sciences and Information Technologies (CSIT).* Zbarazh, Ukraine. 2020. P. 54–57. https://doi.org/10.1109/CSIT49958.2020.9322026.

16. Malachivskyy P.S., Pizyur Ya.V., Malachivskyi R.P., Ukhanska O. M. Chebyshev approximation of functions of several variables. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2020. Vol. 56, N 1. P. 118–125. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00227-8.

17. Малачівський П.С., Пізюр Я.В. Розв’язування задач в середовищі Maple. Львів: РАСТР–7, 2016. 282 с.

18. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев: Наук. думка, 1969. 623 с.

19. Berljafa M., Güttel S. The RKFIT algorithm for nonlinear rational approximation. *SIAM J. Sci. Comput.* 2017. Vol. 39, N 5. P. A2049–A2071. https://doi.org/10.1137/15M1025426.

20. Gonnet P., Pachon R., Trefethen L.N. Robust rational interpolation and least-squares. *Electronic Transactions on Numerical Analysis.* 2011. N 38. P. 146–167.

21. Pachon R., Gonnet P., van Deun J. Fast and stable rational interpolation in roots of unity and Chebyshev points. *SIAM J. on Numerical Analysis.* 2012. Vol. 50, N 3. P. 1713–1734. https:///doi.org/10.1137/100797291.

**P.S. Malachivskyy, L.S. Melnychok, Ya.V. Pizyur**

**CHEBYSHEV APPROXIMATION OF MULTIVARIABLE FUNCTIONS BY THE RATIONAL EXPRESSION WITH THE CONDITION**

**Abstract.** A method for constructing the Chebyshev approximation by the rational expression of the multivariable functions with the interpolation condition is proposed. The idea of the method is based on the construction of the ultimate mean-power approximation by a rational expression with the interpolation condition in the norm of space $L^p$ at $p \to \infty$. To construct such an approximation, an iterative scheme based on the least squares method with two variable weight functions is used. One weight function provides the construction of a mean-power approximation with the interpolation condition, and the second — the specification of the parameters of a rational expression according to the scheme of its linearization. The convergence of the method provides an original way of sequential refinement of the values of weight functions, which takes into account the results of the approximation of previous iterations. The results of test examples confirm the rapid convergence of the proposed method of constructing the Chebyshev approximation by a rational expression with a condition.

**Keywords:** Chebyshev approximation by the rational expression, Chebyshev approximation with the condition, multivariable functions, mean-power approximation, least squares method, variable weight function.

*Надійшла до редакції 18.01.2022*