УДК 519.8

О.Г. ХАНІН
Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна,
e-mail: *aleks.hanin@ukr.net,*

Б.М. БОРСУК
Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна,
e-mail: *b.borsuk@outlook.com.*

АПРОКСИМАТИВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ УЗАГАЛЬНЕНИХ ОПЕРАТОРІВ ПУАССОНА НА КЛАСАХ ЗИГМУНДА

Анотація. Досліджено апроксимативні характеристики узагальнених операторів Пуассона на класах функцій Зигмунда Z^{α} для подальшого їхнього застосування в теорії оптимальних рішень. Класи функцій Зигмунда Z^{α} сьогодні все частіше використовують в оптимізаційних методах, що зумовлює актуальність розв'язуваної задачі. Отримано оцінку верхньої межі відхилення функцій класу Зигмунда Z^{α} від їхніх узагальнених операторів Пуассона в рівномірній метриці. Узагальнені оператори Пуассона як розв'язки відповідних диференціальних рівнянь в частинних похідних еліптичного типу є лінійними додатними операторами, а тому вони реалізують найкраще асимптотичне наближення функцій класу Z^{α}. Тобто маємо конкретну реалізацію оптимізаційних задач методами теорії наближень.

Ключові слова: оптимізаційні властивості функцій, апроксимативні характеристики, лінійні додатні оператори, класи Зигмунда.

ВСТУП

Процес впровадження сучасних методів теорії оптимальних рішень, теорії ігрових задач динаміки [1–3] все більше стає неможливим без використання диференціальних рівнянь в частинних похідних, зокрема еліптичного типу [4, 5]. Отже, важливим є дослідження апроксимативних характеристик розв'язків цих рівнянь. Натепер малодослідженими є апроксимативні характеристики узагальнених операторів Пуассона [6], які є розв'язками відповідних інтегро-диференціальних рівнянь з певними крайовими умовами. Водночас однією з важливих задач дослідження операцій є варіаційна задача, яка полягає у пошуку таких значень набору параметрів (оптимального рішення), який за деяких накладених обмежень забезпечує максимум (або мінімум) певного критерію. Однак варте зацікавлення узагальнення цієї задачі, коли знаходиться недискретний набір оптимізаційних параметрів, а оптимальне рішення шукається на деякому класі функцій. Особливо це актуально для випадку узагальнених операторів Пуассона, коли як клас функцій обрано клас функцій Зигмунда Z^{α} $(0< \alpha \le 2)$. Річ у тім, що класи функцій Зигмунда Z^{α} забезпечують найкращу апроксимацію (найкраще наближення) узагальнених операторів Пуассона. Більше того, класи функцій Зигмунда використовують в оптимізаційних методах та їхніх прикладних застосуваннях.

У теорії оптимальних рішень деяку варіаційну задачу розглядають як непараметричну задачу оптимізації. У цій роботі пропонується саме такий підхід — шукається найкраще у рівномірній метриці наближення 2π-періодичних функцій, які задовольняють деяку додаткову умову належності класу Зигмунда. При цьому досліджується та аналізується асимптотика цього наближення як і в деяких задачах прикладної математики [7–10] за принципом оптимальності прийняття рішень.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Позначимо $Z^{\alpha}(0<\alpha\le 2)$ (див., наприклад, [11]) клас неперервних 2π-періодичних функцій $f(x)$, які задовольняють умову

$$|f(x+t)-2f(x)+f(x-t)|\le 2|t|^{\alpha}, \quad -\pi\le x\le\pi,\ |t|\le 2\pi. \tag{1}$$

Нехай далі

$$P_{s,q}(r;f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)K_{s,q}(r,t)\,dt \tag{2}$$

є узагальненим оператором Пуассона [12], де відповідно

$$K_{s,q}(r,t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(1+sk(1+r)(1-r)^{q})r^{k}\cos kt,\ 0\le s\le\frac{1}{2},\ q\ge 1,\ r\to 1-0, \tag{3}$$

є ядром цього оператора.

Якщо позначити C простір неперервних 2π-періодичних функцій, у якому норма елемента задається за допомогою рівності

$$\|f\|_{C}=\max_{t}|f(t)|, \tag{4}$$

то, наслідуючи О.І. Степанця [13], будемо розглядати величину

$$\sup_{f\in Z^{\alpha}}\|f(x)-P_{s,q}(r,f;x)\|_{C}:=\mathrm{E}(Z^{\alpha};P_{s,q}(r))_{C}. \tag{5}$$

Величина $\mathrm{E}(Z^{\alpha};P_{s,q}(r))_{C}$ є точною верхньою межею відхилення функцій класу Зигмунда Z^{α} від їхнього узагальненого оператора Пуассона в рівномірний метриці.

Для більш ефективного дослідження асимптотичної поведінки узагальнених операторів Пуассона на класах функцій Зигмунда в метриці простору C аналогічно до [14] у формулах (2) та (3) зробимо заміну змінної $\delta=-\frac{1}{\ln r}$, $r\to 1-0$. У результаті чого матимемо, що узагальнений оператор Пуассона (2) записуватиметься у вигляді

$$P_{s,q}(\delta;f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)K_{s,q}(\delta,t)\,dt,\ 0\le s\le\frac{1}{2},\ q\ge 1, \tag{6}$$

де

$$K_{s,q}(\delta,t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+sk\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\right)e^{-\frac{k}{\delta}}\cos kt \tag{7}$$

є його ядром.

Тоді згідно з позначеннями (6) та (7) дослідження асимптотичної поведінки (5) узагальненого оператора Пуассона $P_{s,q}(\delta;f;x)$ за допомогою методів теорії наближень набере вигляду

$$\mathrm{E}(Z^{\alpha};P_{s,q}(\delta))_{C}=\sup_{f\in Z^{\alpha}}\|f(x)-P_{s,q}(\delta;f;x)\|_{C}. \tag{8}$$

Наслідуючи О.І. Степанця [13], кажемо, якщо в явному вигляді знайдено функцію $g(\delta)=g(Z^{\alpha};\delta)$, $0<\alpha\le 2$, таку, що для $\delta\to\infty$ має місце асимптотична рівність $\mathrm{E}(Z^{\alpha};P_{s,q})_{C}=g(\delta)+o(g(\delta))$, то розв’язано задачу Колмогорова–

Нікольського [13] для узагальненого оператора Пуассона $P_{s,q}(\delta; f; x)$ на класах функцій Зигмунда Z^{α} у рівномірній метриці.

Натепер існує низка праць, присвячених розв'язанню задачі Колмогорова–Нікольського для операторів типу Пуассона [15–19] (які є розв'язками відповідних диференціальних рівнянь у частинних похідних еліптичного типу з певними крайовими умовами), саме на класах Зигмунда Z^{α} для випадку, коли $0 < \alpha \le 1$. Щодо розв'язання цієї задачі на класах функцій Z^{α} для випадку $1 < \alpha < 2$, то вона ще донині не розв'язана.

Отже, основною метою цієї роботи є дослідження асимптотичної поведінки верхньої межі відхилення функцій класу Z^{α} саме для випадку $1 < \alpha < 2$ від їхніх узагальнених операторів Пуассона $P_{s,q}(\delta; f; x)$ у метриці простору C.

ОСНОВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ РОБОТИ

За використання прийнятих позначень має місце теорема.

Теорема 1. Якщо $1 < \alpha < 2$, то для $\delta \to \infty$ буде справедлива оцінка

$$\mathrm{E}(Z^{\alpha}; P_{s,q}(\delta))_C =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{\pi} \sin\frac{\alpha\pi}{2} \left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^q \sum_{k=0}^{\infty} \left(s\left(\left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right)k - e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1 + e^{-\frac{1}{\delta}}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^{1-q} \right) \left(\frac{2k+1}{2}\right)^{-\alpha} e^{-\frac{k}{\delta}} + O\left(\left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + s\left(\left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right)k - e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1 + e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^{q-1}\right)\left(\frac{2k+1}{2}\right)^{-2} e^{-\frac{k}{\delta}}\right).$$

Доведення. Знайдемо спочатку інтегральне представлення для величини $f(x) - P_{s,q}(\delta; f; x)$ з правої частини рівності (8).

Враховуючи (7), маємо, що $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_{s,q}(\delta, t)\, dt = 1$. Тому очевидно, що

$$\| f(x) - P_{s,q}(\delta; f; x)\|_C = \frac{1}{\pi}\left\| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) K_{s,q}(\delta, t) dt \right\|_C =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)) K_{s,q}(\delta, t) dt \right\|_C .$$

На основі представлення (7) ядра $K_{s,q}(\delta, t)$ узагальненого оператора Пуассона (6) легко показати, що для всіх вказаних параметрів $s \ge 0$, $q \ge \frac{1}{2}$, $-\pi \le t \le \pi$ і $\delta > 0$ завжди $K_{s,q}(\delta, t) \ge 0$.

Отже, із співвідношень (1), (4), (8) і (10) випливає, що

$$\mathrm{E}(Z^{\alpha};P_{s,q}(\delta))_C=\frac{1}{2\pi}\sup_{f\in Z^{\alpha}}\left\|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+t)-2f(x)+f(x-t))K_{s,q}(\delta,t)dt\right\|_C\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\sup_{f\in Z^{\alpha}}\max_{-\pi\le t\le\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-2f(x)+f(x-t)||K_{s,q}(\delta,t)dt|\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|^{\alpha}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+sk\left(1+e^{\frac{1}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^{q}\right)e^{-\frac{k}{\delta}}\cos kt\right)dt. \qquad (11)$$

Тепер оцінимо інтеграл в правій частині (11). Для цього спочатку покажемо, що

$$2\sin\frac{t}{2}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+sk\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^{q}\right)e^{-\frac{k}{\delta}}\cos kt\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(1+sk\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^{q}\right)e^{-\frac{k}{\delta}}-\right.$$

$$\left.-\left(1+s(k+1)\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^{q}\right)e^{-\frac{k+t}{\delta}}\right)\sin\frac{2k+1}{2}t=$$

$$=\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^{q}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(s\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(k\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^{1-q}\right)e^{-\frac{k}{\delta}}\sin\frac{2k+1}{2}t\right). \qquad (12)$$

Домноживши ліву та праву частини співвідношення (12) на величину $\dfrac{|t|^{\alpha}}{2\pi\sin\frac{t}{2}}$ і проінтегрувавши почленно обидві частини отриманої рівності в межах від $-\pi$ до π, матимемо, що

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|^{\alpha}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+sk\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^{q}\right)e^{-\frac{k}{\delta}}\cos kt\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^{q}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|t|^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(s\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(k\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^{1-q}\right)e^{-\frac{k}{\delta}}\frac{\sin\frac{2k+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^{q}\sum_{k=0}^{\infty}\left(s\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(k\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^{1-q}e^{-\frac{k}{\delta}}\right)\int\limits_{0}^{\pi}t^{\alpha}\frac{\sin\frac{2k+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}dt\,. \qquad (13)$$

Аналогічно до [11] для обчислення інтеграла в правій частині (13) запишемо його в дещо іншому вигляді, а саме

$$\int\limits_{0}^{\pi}t^{\alpha}\frac{\sin\frac{2k+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}dt=\int\limits_{0}^{\pi}t^{\alpha-1}\sin\frac{2k+1}{2}t\,dt+\int\limits_{0}^{\pi}\left(\frac{t^{\alpha}}{\sin\frac{t}{2}}-t^{\alpha-1}\right)\cdot\sin\frac{2k+1}{2}t\,dt\,. \qquad (14)$$

Повторивши хід міркувань [11], оцінимо перший інтеграл правої частини (14). Для цього, зробивши в ньому відповідні заміни змінних, отримаємо, що

$$\int\limits_{0}^{\pi}t^{\alpha-1}\sin\frac{2k+1}{2}t\,dt=\left(\frac{2k+1}{2}\right)^{-\alpha}\int\limits_{0}^{\frac{2k+1}{2}\pi}x^{\alpha-1}\sin x\,dx=$$

$$=(\alpha-1)\left(\frac{2k+1}{2}\right)^{-\alpha}\int\limits_{0}^{\frac{2k+1}{2}\pi}x^{\alpha-2}\cos x\,dx=(\alpha-1)\left(\frac{2k+1}{2}\right)^{-\alpha}\int\limits_{0}^{\infty}x^{\alpha-2}\cos x\,dx-$$

$$-(\alpha-1)\left(\frac{2k+1}{2}\right)^{-\alpha}\int\limits_{\frac{2k+1}{2}\pi}^{\infty}x^{\alpha-2}\cos x\,dx. \qquad (15)$$

Оскільки $\int\limits_{0}^{\infty}x^{\alpha-2}\cos x\,dx=\frac{\pi\operatorname{cosec}(\alpha-1)}{2\Gamma(2-\alpha)}=\Gamma(\alpha-1)\sin\frac{\alpha\pi}{2}$ (див., наприклад, формулу (3.761.9) із [20]), то

$$(\alpha-1)\left(\frac{2k+1}{2}\right)^{-\alpha}\int\limits_{0}^{\infty}x^{\alpha-2}\cos x\,dx=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)\sin\frac{\alpha\pi}{2}\left(\frac{2k+1}{2}\right)^{-\alpha}. \qquad (16)$$

Двічі інтегруючи частинами другий інтеграл із правої частини (15), можна показати, що

$$(\alpha-1)\left(\frac{2k+1}{2}\right)^{-\alpha}\int\limits_{\frac{2k+1}{2}\pi}^{\infty}x^{\alpha-2}\cos x\,dx=O\left(\left(\frac{2k+1}{2}\right)^{-2}\right). \qquad (17)$$

Підставивши (16) та (17) замість відповідних доданків правої частини (15), запишемо оцінку

$$\int\limits_{0}^{\pi}t^{\alpha-1}\sin\frac{2k+1}{2}t\,dt=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)\sin\frac{\alpha\pi}{2}\left(\frac{2k+1}{2}\right)^{-\alpha}+O\left(\left(\frac{2k+1}{2}\right)^{-2}\right). \qquad (18)$$

Оскільки функція $t^{\alpha}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{-1}-t^{\alpha-1}$ (для всіх $1<\alpha<2$) має сумовну другу похідну на відрізку $[0,\pi]$, то двічі застосовуючи метод інтегрування частинами до другого доданка правої частини (14), маємо, що

$$\int_0^{\pi}\left(t^{\alpha}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{-1}-t^{\alpha-1}\right)\sin\frac{2k+1}{2}t\,dt=$$

$$=\left(\frac{2k+1}{2}\right)^{-2}\left(t^{\alpha}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{-1}-t^{\alpha-1}\right)'\sin\frac{2k+1}{2}\Bigg|_0^{\pi}-$$

$$-\left(\frac{2k+1}{2}\right)^{-2}\int_0^{\pi}\left(t^{\alpha}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{-1}-t^{\alpha-1}\right)''\sin\frac{2k+1}{2}t\,dt=O\left(\left(\frac{2k+1}{2}\right)^{-2}\right). \qquad (19)$$

Об'єднавши співвідношення (14), (18) та (19), отримаємо, що

$$\int_0^{\pi}t^{\alpha}\frac{\sin\frac{2k+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}dt=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)\sin\frac{\alpha\pi}{2}\left(\frac{2k+1}{2}\right)^{-\alpha}+O\left(\left(\frac{2k+1}{2}\right)^{-2}\right). \qquad (20)$$

Якщо підставити (20) у праву частину (13), то очевидно

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|^{\alpha}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+sk\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^{q}\right)e^{-\frac{k}{\delta}}\cos kt\,dt\right)=$$

$$=\frac{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)}{\pi}\sin\frac{\alpha\pi}{2}\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^{q}\sum_{k=0}^{\infty}\left(s\left(k\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^{1-q}\right)e^{-\frac{k}{\delta}}\left(\frac{2k+1}{2}\right)^{-\alpha}+O\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2k+1}{2}\right)^{-2}\left(\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+s\left(k\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^{q}\right)e^{-\frac{k}{\delta}}\right). \qquad (21)$$

Таким чином із співвідношень (11), (21) та властивостей гамма-функції (див., наприклад, формулу (8.331) із [20]), випливає оцінка зверху для величини (8), а саме

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|^{\alpha}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+sk\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^{q}\right)e^{-\frac{k}{\delta}}\cos kt\,dt\right)=$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{\pi} \sin\frac{\alpha\pi}{2} \left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^q \sum_{k=0}^{\infty} \left(s\left(k\left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right) - e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1 + e^{-\frac{1}{\delta}}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^{1-q} \right) \left(\frac{2k+1}{2}\right)^{-\alpha} e^{-\frac{k}{\delta}} + O\left(\left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + s\left(k\left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right) - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1 + e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^{q-1}\right) \left(\frac{2k+1}{2}\right)^{-2} e^{-\frac{k}{\delta}}\right). \qquad (22)$$

Щоб отримати оцінку знизу для величини (8), спочатку зазначимо, що згідно з [11] функція $|\sin\varphi|^{\alpha}$ для всіх $1 < \alpha < 2$ буде належати класу Z^{α}. Тобто буде виконуватися нерівність

$$||\sin(\varphi + t)|^{\alpha} - 2|\sin\varphi|^{\alpha} + |\sin(\varphi - t)|^{\alpha}| \le 2|t|^{\alpha}.$$

Оскільки для всіх $a \in (1,2)$ і $-\pi \le t \le \pi$ має місце співвідношення $0 \le |t|^{\alpha} - |\sin t|^{\alpha} \le Ct^2$, де C — деяка стала, враховуючи (22), переконуємось у тому, що

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (|t|^{\alpha} - |\sin t|^{\alpha}) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 + sk\left(1 + e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^q\right)\right) e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt\, dt =$$

$$= O\left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + s\left(k\left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1 + e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^{q-1}\right) \left(\frac{2k+1}{2}\right)^{-2} e^{-\frac{k}{\delta}}. \qquad (23)$$

Водночас аналогічно до формули (6) із [11] можемо записати, що

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin t|^{\alpha} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 + sk\left(1 + e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^q\right)\right) e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt\, dt =$$

$$= P_{s,q}(\delta, |\sin\varphi|^{\alpha}; 0) \le \mathrm{E}(Z^{\alpha};\, P_{s,q}(\delta))_C .$$

Отже,

$$\mathrm{E}(Z^{\alpha}; P_{s,q}(\delta))_C = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|^{\alpha} K_{s,q}(\delta, t)\, dt +$$

$$+ \frac{\gamma}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (|t|^{\alpha} - |\sin t|^{\alpha}) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 + sk\left(1 + e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^q\right)\right) e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt\, dt. \quad (24)$$

Об'єднавши співвідношення (7) та (22–24), отримаємо виконання оцінки (9).

Теорему доведено.

Оскільки узагальнені оператори Пуассона $P_{s,q}(\delta; f; x)$ є лінійними додатними операторами з дельта-подібними ядрами [21–25], матимуть місце наведені далі наслідки

Наслідок 1. Якщо у формулах (6) та (7) покласти $s = 0$, то очевидно отримаємо, що

$$P_{0,q}(\delta; f; x) = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(x+t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt\right) dt = A(\delta, f, x)$$

є оператором Абеля–Пуассона, або Пуассона [26, 27]. А тому із оцінки (9) випливає раніше отриманий розв'язок [11] задачі Колмогорова–Нікольського для оператора Абеля–Пуассона $A(\delta, f, x)$ на класах функцій Зигмунда Z^{α} для випадку $1 < \alpha < 2$ у рівномірній метриці.

Наслідок 2. Поклавши у співвідношеннях (6) та (7) $s = \frac{1}{2}$, а $q = 1$, матимемо, що

$$P_{\frac{1}{2},1}(\delta; f; x) = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(x+t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{k}{2}\left(1 + e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^{q}\right) e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt\, dt\right) =$$

$$= B(\delta, f, x)$$

є бігармонійним оператором Пуассона [28–31]. З теореми 1 випливає раніше невідома оцінка для верхньої межі відхилення функцій класу Зигмунда $Z^{\alpha}(1 < \alpha < 2)$ від їхнього бігармонійного оператора Пуассона $B(\delta, f, x)$ у рівномірній метриці, а саме

$$\mathrm{E}\,(Z^{\alpha}; B(\delta))_C = \frac{\Gamma(\alpha)}{\pi} \sin\frac{\alpha\pi}{2}\left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right) \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\frac{k}{2} - e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1 + e^{-\frac{1}{\delta}}\right) + 1\right) \times$$

$$\times \left(\frac{2k+1}{2}\right)^{-\alpha} e^{-\frac{k}{\delta}} + O\left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right) \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{2}\left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right) - e^{-\frac{1}{\delta}}\left(1 + e^{-\frac{1}{\delta}}\right) + 1\right)\left(\frac{2k+1}{2}\right) e^{-\frac{k}{\delta}}.$$

ВИСНОВКИ

У результаті проведених досліджень було розв'язано задачу Колмогорова–Нікольського для узагальнених операторів Пуассона $P_{s,q}(\delta; f; x)$ на класах функцій Зигмунда Z^{α} для випадку $1 < \alpha < 2$ у рівномірній метриці. Доведена теорема дає можливість оцінити верхню межу відхилення функцій класу Зигмунда $Z^{\alpha}(1 < \alpha < 2)$ від їхніх узагальнених операторів Пуассона в метриці простору. Оскільки узагальнені оператори Пуассона $P_{s,q}(\delta, f, x)$ для $s = 0$ перетворюються в оператори Абеля–Пуассона $A(\delta, f, x)$, а для $s = \frac{1}{2}$, $q = 1$ — у бігармонійні оператори Пуассона $B(\delta, f, x)$, то із теореми 1 як наслідок отримуємо апроксимативні характеристики цих операторів на класах функцій

Z^{α} у випадку $1 < \alpha < 2$. Бігармонійні оператори Пуассона та оператори Абеля–Пуассона є розв'язками відповідних диференціальних рівнянь у частинних похідних еліптичного типу. А отже, згідно з тенденцією останніх наукових досліджень деяких напрямків [32–36] прикладної математики отримані в цій роботі асимптотичні оцінки верхніх меж відхилень функцій класу Зигмунда Z^{α} $(1 < \alpha < 2)$ від їхніх узагальнених операторів Пуассона матимуть подальше практичне застосування.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Chikrii A.A., Eidel'man S.D. Generalized Mittag-Leffler matrix functions in game problems for evolutionary equations of fractional order. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2000. Vol. 36, N 3. P. 315–338. https://doi.org/10.1007/BF02732983.
2. Pilipenko Yu.B., Chikrii A.A. Oscillatory conflict-control processes. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 1993. Vol. 57, N 3. P. 407–417. https://doi.org/10.1016/0021-8928(93)90119-7.
3. Albus J., Meystel A., Chikrii A.A., Belousov A.A., Kozlov A.I. Analytical method for solution of the game problem of soft landing for moving objects. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2001. Vol. 37, N 1. P. 75–91. https://doi.org/10.1023/A:1016620201241.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. 4-е изд. Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. 512 с.
5. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. Vol. 54, N 1. P. 51–63. https://doi.org/10.1023/A:1019789402502.
6. Kharkevych Yu.I. On Approximation of the quasi-smooth functions by their Poisson type integrals. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2017. Vol. 49, N 10. P. 74–81. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v49.i10.80.
7. Chikrii A.A., Matychyn I.I. Game problems for fractional-order linear systems. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2010. Vol. 268. P. 54–70. https://doi.org/10.1134/S0081543810050056.
8. Chikrii A., Matychyn I. Riemann–Liouville, Caputo, and sequential fractional derivatives in differential games. Breton M., Szajowski K. (Eds.). *Advances in Dynamic Games. Annals of the International Society of Dynamic Games book series (AISDG).* 2011. Vol. 11. P. 61–81. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8089-3_4.
9. Bushev D.M., Kharkevych Yu.I. Conditions of convergence almost everywhere for the convolution of a function with delta-shaped kernel to this function. *Ukrainian Math. J.* 2016. Vol. 67, N 11. P. 1643–1661. https://doi.org/10.1007/s11253-016-1180-y.
10. Dzyubenko G.Ts., Pshenichnyi B.N. Discrete differential games with information lag. *Cybernetics.* 1972. Vol. 8, N 6. P. 947–952. https://doi.org/10.1007/BF01068518.
11. Баусов Л.И. О приближении функций класса Z_{α} положительными методами суммирования рядов Фурье. *Успехи мат. наук.* 1961. Т. 16, № 3(99). С.143–149.
12. Kharkevych Yu.I. Asymptotic expansions of upper bounds of deviations of functions of class W^r from their generalized Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. Vol. 50, N 8. P. 38–49. https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v50.i8.40.
13. Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. Киев: Наук. думка, 1981. 340 с.

14. Kharkevych Yu.I. Approximative properties of the generalized Poisson integrals on the classes of functions determined by a modulus of continuity. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2019. Vol. 51, N 4. P. 43–54. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i4.40.

15. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Holder class by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2000. Vol. 52, N 7. P. 1113–1117. https://doi.org/10.1023/A:1005285818550.

16. Kal'chuk I.V. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions defined on the real axis by Weierstrass operators. *Ukrainian Math. J.* 2007. Vol. 59, N 9. P. 1342–1363. https://doi.org/10.1007/s11253-007-0091-3.

17. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. Vol. 59, N 8. P. 1224–1237. https://doi.org/10.1007/s11253-007-0082-4.

18. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by triharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2001. Vol. 53, N 6. P. 1012–1018. https://doi.org/10.1023/A:1013364321249.

19. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V. Approximation of the classes $W^r_{\beta,\infty}$ by three-harmonic Poisson integrals. *Carpathian Math. Publ.* 2019. Vol. 11, N 2, P. 10–23. https://doi.org/10.15330/cmp.11.2.321-334.

20. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Физматгиз, 1963. 1100 с.

21. Kal'chuk I.V., Kharkevych Y.I. Approximation of the classes $W^r_{\beta,\infty}$ by generalized Abel-Poisson integrals. *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal.* 2022. Vol. 74, N 4. P. 507–515. https://doi.org/10.37863/umzh.v74i4.7164.

22. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the classes $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2011. Vol. 63, N 7. P. 1083–1107. https://doi.org/10.1007/s11253-011-0565-1.

23. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2012. Vol. 63, N 12. P. 1820–1844. https://doi.org/10.1007/s11253-012-0616-2.

24. Kal'chuk I.V., Kravets V.I., Hrabova U.Z. Approximation of the classes $W^r_{\beta}H^{\alpha}$ by three-harmonic Poisson integrals. *J. Math. Sci. (N. Y.).* 2020. Vol. 246, N 2. P. 39–50. https://doi.org/10.1007/s10958-020-04721-4.

25. Kal'chuk I.V., Hrabova U.Z., Filozof L.I. Approximation of the classes $W^r_{\beta}H^{\alpha}$ by three-harmonic Poisson integrals. *J. Math. Sci. (N.Y.).* 2021. Vol. 254, N 3. P. 397–405. https://doi.org/10.1007/s10958-021-05311-8.

26. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of functions by conjugate Poisson integrals. *Carpathian Math. Publ.* 2020. Vol. 12, N 1. P. 138–147. https://doi.org/10.15330/cmp.12.1.138-147.

27. Kal'chuk I., Kharkevych Y. Approximation properties of the generalized Abel–Poisson Integrals on the Weyl–Nagy Classes. *Axioms.* 2022. Vol. 11, N 4: 161. https://doi.org/10.3390/axioms11040161.

28. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. Vol. 54, N 9. P. 1462–1470. https://doi.org/10.1023/A:1023463801914.

29. Abdullayev F.G., Kharkevych Yu.I. Approximation of the classes $C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2020. Vol. 72, N 1. P. 21–38. https://doi.org/10.1007/s11253-020-01761-6.

30. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. On approximation of functions from the class $L^{\psi}_{\beta,1}$ by the Abel-Poisson integrals in the integral metric. *Carpathian Math. Publ.* 2022. Vol. 14, N 1. P. 223–229. https://doi.org/10.15330/cmp.14.1.223-229.

31. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. Vol. 61, N 3. P. 399–413. https://doi.org/10.1007/s11253-009-0217-x.

32. Chikrii A.A., Chikrii G.Ts. Matrix resolving functions in game problems of dynamics. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2015. Vol. 291. P. 56–65. https://doi.org/10.1134/S0081543815090047.

33. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in an abstract parabolic system. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2016. Vol. 293. P. 254–269. https://doi.org/10.1134/S0081543816050229.

34. Kharkevych Yu.I. On some asymptotic properties of solutions to biharmonic equations. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2022. Vol. 58, N 2. P. 251–258. https://doi.org/10.1007/s10559-022-00457-y.

35. Tovkach R., Kharkevych Y., Kal'chuk I. Application of a fourier series for an analysis of a network signals. *IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory (IEEE ATIT 2019)*. Kyiv, Ukraine, 2019 P. 107–110. https://doi.org/10.1109/ATIT49449.2019.9030488.

36. Makarchuk A., Kal'chuk I., Kharkevych Y., Yakovleva A. The Usage of interpolation polynomials in the studying of data transmission in networks. *IEEE 2nd International Conference on System Analysis & Intelligent Computing (SAIC).* Kyiv, Ukraine. 2020. P. 1–4. https://doi.org/10.1109/SAIC51296.2020.9239180.

O.G. Khanin, B.M. Borsuk

APPROXIMATE CHARACTERISTICS OF GENERALIZED POISSON OPERATORS ON THE ZYGMUND CLASSES

Abstract. The paper analyzes the approximate characteristics of generalized Poisson operators on the classes of Zygmund Z^{α}, with the aim of their further application in the theory of optimal solutions. Classes of Zygmund Z^{α} are increasingly used in optimization methods, emphasizing the relevance of the problem. The estimation of the upper bound of the deviation of the functions of Zygmund class Z^{α} from their generalized Poisson operators in the uniform metric is obtained. Generalized Poisson operators as solutions of the corresponding elliptic partial differential equations are positive linear operators and, therefore, they realize asymptotic approximation of the class functions Z^{α} in the best way. That is, we have the specific implementation of the optimization problems using the methods of approximation theory.

Keywords: functions optimization properties, approximate characteristics, linear positive operators, Zygmund class.

Надійшла до редакції 20.01.2022