СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ

УДК 51.092

І.В. СЕРГІЄНКО
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *Sergiyenko@nas.gov.ua*.

О.М. ХІМІЧ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *KhimichOM@nas.gov.ua*.

Д.А. КЛЮШИН
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *dokmed5@gmail.com.*

В.І. ЛЯШКО
Національний університет «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна,
e-mail: *v.lyashko@ukr.net.*

С.І. ЛЯШКО
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *lyashko.serg@gmail.com.*

В.В. СЕМЕНОВ
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *semenov.volodya@gmail.com*.

СТАНОВЛЕННЯ ТА РОЗВИТОК НАУКОВОЇ ШКОЛИ МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ФІЛЬТРАЦІЇ*

До 100-річчя з дня народження академіка І.І. Ляшка

Анотація. В огляді висвітлено основні етапи становлення та розвитку київської школи математичної теорії фільтрації. Основна увага приділена науковим ідеям та результатам її лідера — видатного українського вченого академіка НАН України Івана Івановича Ляшка. Журнал «Кібернетика та системний аналіз» систематично публікує роботи учнів І.І. Ляшка, у яких його ідеї і здобутки отримали подальший розвиток.

Ключові слова: теорія фільтрації, прикладна математика, обчислювальна математика, кібернетика, системи з розподіленими параметрами.

ВСТУП

Одним з фундаментальних розділів гідромеханіки є теорія руху рідини в пористому середовищі — теорія фільтрації. Математичні моделі класичної теорії (теорія фільтрації) дотичні до теорії аналітичних та узагальнених аналітичних функцій. Складність задач теорії фільтрації полягала в тому, що область, в якій шукається розв'язок задачі (область фільтрації), зазвичай має складну форму, а крайові умови на частині її межі лише відомі своїм типом (наприклад, лінії рівних потенціалів чи лінії току), але числові значення цих потенціалів невідомі і підлягають подальшому визначенню.

З середини XX століття в Київському державному університеті ім. Т.Г. Шевченка активно досліджуються задачі фільтрації та близькі питання

*Робота виконана за фінансової підтримки МОН України (проєкт «Обчислювальні алгоритми і оптимізація для штучного інтелекту, медицини та оборони», 0122U002026).

математичної фізики. Стимулом до розвитку київської наукової школи математичної теорії фільтрації ґрунтових вод у 1950-х роках став грандіозний проєкт побудови дніпровського каскаду гідроелектростанцій. Проблема меліорації земель південних степів також відіграла важливу роль у стимулюванні прикладних робіт із залученням багатьох молодих науковців.

Засновником київської наукової школи математичної теорії фільтрації вважають професора Георгія Миколайовича Положія (1914–1968). Він є автором методу мажорантних областей та методу сумарних зображень. Перший метод зумовлює обґрунтовано будувати двосторонні оцінки фільтраційних характеристик відповідною деформацією області фільтрації складної форми. Другий метод є дискретним аналогом методів інтегральних зображень. Розв'язок задачі в кожному вузлі сіткової області записується в замкненій формі у вигляді формули сумарних зображень, залежно від крайових умов ці формули або є явними, або містять незначну кількість (порівняно з загальною кількістю вузлів сітки) невідомих параметрів, що визначаються з допоміжних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Метою статті є спроба прослідкувати етапи розвитку київської наукової школи математичної теорії фільтрації через науковий шлях її лідера — учня Г.М. Положія — заслуженого діяча науки України, лауреата Державних премій України у галузі науки і техніки та премії НАН України ім. М.М. Крилова, академіка НАН України, доктора фізико-математичних наук, професора І.І. Ляшка.

Іван Іванович Ляшко народився 9 вересня 1922 року в селі Мацківці Лубенського району Полтавської області. З 1940 року він служив на Чорноморському флоті. Після демобілізації у 1948 році став студентом Київського учительського інституту, який закінчив за один рік. Працюючи вчителем у школі, він заочно навчався у Київському державному педагогічному інституті ім. О.М. Горького. Після його закінчення у 1952 році вступив до аспірантури механіко-математичного факультету Київського університету (науковий керівник — професор Г.М. Положій). Кандидатську дисертацію захистив у 1955 році та був призначений асистентом кафедри математичної фізики механіко-математичного факультету. З цього часу професійне життя І.І. Ляшка пов'язано з Київським національним університетом імені Тараса Шевченка. Він був завідувачем кафедри математичної фізики (1964–1969), деканом механіко-математичного факультету (1965–1969, 1987–1989), деканом факультету кібернетики (1969–1977), проректором з наукової роботи (1977–1985), від 1991 року — головним науковим співробітником факультету кібернетики. Іван Іванович пішов із життя 29 березня 2008 року. Список робіт академіка І.І. Ляшка містить понад 400 публікацій [1, 2].

Іван Іванович Ляшко був лідером наукової школи з математичної теорії фільтрації у Київському державному університеті ім. Т.Г. Шевченка. Йому належать принципові результати в математичній фізиці, теорії узагальнених аналітичних функцій, обчислювальній математиці. У 1969 році разом з академіком В.М. Глушковим він створив у Київському державному університеті ім. Т.Г. Шевченка факультет кібернетики (від 2016 року факультет комп'ютерних наук та кібернетики) і був його першим деканом та завідувачем кафедри обчислювальної математики.

СТАНОВЛЕННЯ

Початковий період становлення школи математичної фільтрації (1952–1960) був присвячений дослідженням чисельно-аналітичних методів розв'язання задач класичної теорії фільтрації. У наукових працях І.І. Ляшка та його колег було встановлено ряд аналітичних залежностей, які дали змогу визначити основні фільтраційні характеристики потоків ґрунтових вод під гідроспорудою.

У циклі робіт, що лягли в основу кандидатської дисертації І.І. Ляшка «Решение задачи о фильтрации под многошпунтовой плотиной при произвольном криволинейном подземном водоупоре» [3], доведено низку теорем про узагальнені аналітичні функції. Зокрема, І.І. Ляшку вдалося побудувати залежності вихідних швидкостей фільтрації від форми підземного водоупору, отримати формули для розрахунку витрат рідини, розподілу протитиску на флютбеті, визначити точні верхні та нижні оцінки основних фільтраційних характеристик.

Основним методом, який вдосконалювали та застосовували в роботах цих років, був метод мажорантних областей. Суть методу така. Нехай потрібно оцінити деяку характеристику фільтрації в геометрично складній області. Спираючись на варіаційні теореми Г.М. Положія, будуються шляхом деформації межі вихідної області дві допоміжні (мажорантні) області. В одній з допоміжних областей характеристика оцінюється знизу, а в іншій — зверху. Мажорантні області, звичайно, мають бути простими і разом з тим забезпечувати достатньо точну двосторонню оцінку шуканої характеристики. Якщо не вимагати великої точності оцінки, то цей метод є достатньо ефективним.

Математичним базисом цього методу є теорема Г.М. Положія про збереження області для лінійних еліптичних систем [4]. Сформулюємо важливий частинний випадок теореми Г.М. Положія для p-аналітичних функцій $f=\varphi+i\psi$, що визначаються еліптичною системою

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{1}{p}\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{1}{p}\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

де $p=p(x, y)>0$ — задана функція.

Теорема 1 [4]. Нехай $f=\varphi+i\psi\neq\text{const}$ — p-аналітична функція в області D площини $z=x+iy$ та її характеристика p із своїми частинними похідними є Гельдеровою в D. Тоді множина $f(D)$ є областю.

Ця теорема дала змогу поширити варіаційні теореми теорії фільтрації та метод мажорантних областей на випадок фільтрації у неоднорідному середовищі.

ВІД ЯКІСНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ДО ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ

Протягом 1960–1968 років І.І. Ляшко з колегами отримав принципово нові результати щодо чисельних методів розв’язання задач математичної фізики, зокрема задач теорії фільтрації. Основою для подальших розробок ставали запропоновані професором Г.М. Положієм метод сумарних зображень та варіаційні теореми, а також метод мажорантних областей. І.І. Ляшко оцінив переваги вибіркового рахунку методу сумарних зображень та на цій основі збудував єдину схему розв’язання більшості актуальних на той час практичних задач.

Результати цих робіт стали матеріалом для докторської дисертації та монографії «Решение фильтрационных задач методом суммарных представлений» [5]. Метод сумарних зображень дає змогу для широкого класу задач математичної фізики знаходити розв’язки відповідних скінченно-різницевих задач або в явному вигляді, або у вигляді відносно простих формул з параметрами, які легко знайти, розв’язуючи допоміжну систему лінійних рівнянь. Зазвичай цей метод застосовують для розв’язання диференціальних рівнянь з частинними похідними другого і четвертого порядків. І.І. Ляшко узагальнив його для необмежених областей (смуг та напівсмуг) і застосував його для моделювання фільтраційного потоку в ґрунті під багатошпунтовим флютбетом, флютбетом з перепадами, дренованим флютбетом та під системою флютбетів. Це дало змогу значно спростити математичні розрахунки для конструювання гідротехнічних споруд, адже потужності комп'ютерів на той час були невеликими. Наприклад, початково-крайова задача стаціонарної фільтрації ґрунтових вод в однорідному ґрунті формулюється як рівняння Пуассона

$$\Delta \nu = f$$

в області фільтрації G із крайовими умовами $\nu|_s = \varphi(s)$ на її межі, де φ — задана функція дуги контура S, який обмежує область G. Область фільтрації зазвичай має складну форму, а крайові умови на частині її межі можуть бути задані як функція току або як потенціальна функція, величини яких невідомі і мають бути визначені.

За формулою методу сумарних зображень розв'язок дискретизованої задачі в кожній внутрішній точці (x_i, y_k) сіткового прямокутника

$$G_h = \{x_i = x_0 + ih_x,\ y_k = y_0 + kh_y,\ i = 0, 1, \ldots, m+1,\ l = 0, 1, \ldots, n+1\}$$

визначається так:

$$u(x_i, y_k) = \sum_{j=1}^{n} a_{ik} \left\{ A_j \mu_i^j + B_j \nu_i^j + \sum_{p=1}^{i-1} \frac{\mu_j^{i-p} - \nu_j^{i-p}}{\mu_j - \nu_j} [h_x^2 \hat{f}_i(x_p) - \gamma^2 \hat{\omega}_i(x_p)] \right\},$$

$$i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n,$$

де a_{ij} — елементи матриці:

$$\{a_{ik}\}_{i,k=1}^{n} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left\{ \sin i \frac{k\pi}{n+1} \right\}_{i,k=1}^{n},$$

A_k і B_j — сталі, які визначаються за допоміжною системою рівнянь; μ_k і ν_k — сталі, які дорівнюють $\mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}$, $\eta_k = 1 + \gamma^2 - \gamma^2 \cos \frac{k\pi}{n+1}$, $\gamma = \frac{h_x}{h_y}$, $k = 1, 2, \ldots, n$; $\hat{f}_j(x_p)$ та $\hat{\omega}_j(x_p)$ — вектори, $\hat{f}_j(x_p) = \sum_{l=1}^{n} a_{lj} f_l(x_p)$, $\hat{\omega}_j(x_p) = a_{1j} u_0(x_p) + a_{nj} u_{n+1}(x_p)$.

МАСШТАБНІ ЗАДАЧІ

Період з 1969 по 1975 роки характеризується розвитком чисельно-аналітичних методів, їхнім застосуванням у теорії фільтрації та розширенням спектру задач математичної фізики. Це зацікавило І.І. Ляшка. Роботи, виконувані у цей період, містять фундаментальні теоретичні результати з розв'язання багатовимірних задач математичної фізики в дискретній постановці. До того ж, ці результати отримують застосування під час розрахунку Дніпровських намивних гребель, фільтраційних характеристик гребель Київської та Канівської ГЕС і багатьох інших гідротехнічних об'єктів. Для підготовки спеціалістів у галузі математичного моделювання та обчислювальної техніки в 1969 р. разом з академіком В.М. Глушковим Іван Іванович створив у Київському державному університеті ім. Т.Г. Шевченка факультет кібернетики (з 2016 року факультет комп'ютерних наук та кібернетики), ставши його першим деканом та завідувачем кафедри обчислювальної математики.

Використовуючи метод мажорантних областей, І.І. Ляшко із співавторами отримали алгоритми з мажорантною оцінкою для фільтраційних задач з суттєво непрямолінійними межами. Ці результати викладено у монографіях «Численно-аналитическое решение задач теории фильтрации» [6] і «Метод мажорантных областей в теории фильтрации» [7]. Чисельно-аналітичний метод P-трансформацій, розвинений І.І. Ляшком та його учнями, дає змогу розв'язувати скінченнорізницеві задачі у замкненому вигляді і записувати їх формулами сумарних зображень. Залежно від крайових умов ці формули мають явний характер або містять невелику кількість невідомих параметрів, що можна знайти, розв'язавши систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Разом із методами мажорантних областей та руху межових точок метод P-трансформацій надав згоду розв'язати задачі математичної фізики у довільних областях.

ЗОЛОТИЙ ВІК

Період з 1976 по 1991 роки став етапом подальшого розвитку теоретичних досліджень у галузі теорії фільтрації, автоматизації чисельних розрахунків та математичного забезпечення складного есперименту.

Теоретичні дослідження супроводжувалися розробленням відповідних програмних продуктів. З метою підвищення якості та удосконалення програмного забезпечення керівництвом І.І. Ляшка та І.В. Сергієнка було створено окрему групу молодих вчених, які зайнялися цими проблемами. У результаті було розроблено низку пакетів прикладних програм, які мали широке використання для розв'язання практичних задач.

Результати розробок наукового колективу, очолюваного І.І. Ляшком, було викладено у монографіях «Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ» [8], «Расчет фильтрации в зоне гидросооружений» [9] та «Алгоритмизация и численный расчет фильтрационных схем» [10].

У 1981 р. за цикл робіт з методів розв'язання крайових задач математичної фізики та їхнє застосування в теорії фільтрації колектив вчених під керівництвом І.І. Ляшка отримав Державну премію УРСР у галузі науки і техніки.

У 1991 р. І.І. Ляшко підсумував результати досліджень з теорії фільтрації у монографії «Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах» [11]. У цій роботі побудовано фізико-математичну модель перенесення тепла, вологи та солей у пористому середовищі. Особливу увагу приділено узагальненим формулюванням задач у неоднорідних середовищах із прошарками із урахуванням зосереджених факторів різного виду. Побудовано різницеві схеми для апроксимації узагальнених розв'язків, а також досліджено їхню точність та методи реалізації на комп'ютерах.

Так, розроблення заходів для очищення пористих середовищ від хімічних забруднень часто залежить від прогнозування динаміки сумісного руху кількох рідин, які не змішуються між собою. Для кожної окремої фази швидкість фільтрації $\vec{v}_i$ визначається узагальненим законом Дарсі:

$$\vec{v}_i = -k_i \mu_i^{-1} \mathrm{grad}\, p_i ,$$

де μ_i — в'язкість, p_i — парціальний тиск фази, k_i — ефективне проникнення. Закон збереження маси i-ї фази запишемо у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_i S_i) + \mathrm{div}(\rho_{\mathrm{i}} \vec{v}_{\mathrm{i}}) = f_i ,\ (x, y, z) \in \Omega ,$$

де m — пористість середовища, f_i — об'ємна продуктивність джерела, S_i — об'ємна частка, ρ_i — щільність i-ї фази. Об'ємні частки фаз задовольняють умову $S_1 + S_2 = 1$, а проникнення фаз нелінійно залежить від цих об'ємних часток. Розглянемо тривимірну задачу фільтрації двохфазної рідини — води (i=1) та забруднювача (i=2) для таких функціональних залежностей k_i від S_i:

$$k_i = k_0 S_e^{(2+3\lambda)/\lambda}, \; k_2 = k_0 (1 - S_e)^2 (1 - S_e^{(2+\lambda)/\lambda}), \; S_e = \frac{S_1 - S_r}{S_m - S_r},$$

де S_r — залишкова насиченість; S_m — насиченість рівноваги; k_0, λ — додатні сталі. Система рівнянь балансу маси замикається нелінійним алгебраїчним рівнянням, що поєднує капілярний тиск $p_c = p_2 - p_1$ з об'ємними частками фаз:

$$P_c = P_0 S_e^{-\frac{1}{\lambda}}.$$

Нехай у початковий момент часу $t = 0$ забруднювач локалізований в області $\Omega_1 \subset \Omega$ за концентрацією, яка відповідає насиченості рівноваги, а область $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$ для $t = 0$ заповнена двофазною рідиною, в якій частка забруднювача відповідає його залишковій насиченості. Визначимо початкові умови:

$$S_1^{(0)}(x, y, z) = \begin{cases} S_m, & (x, y, z) \in \Omega_1, \\ S_r, & (x, y, z) \in \Omega_2, \end{cases} \qquad S_2^{(0)} = 1 - S_1^{(0)}.$$

Рух двофазної рідини в області Ω відбувається унаслідок заданого перепаду парціального тиску водної компоненти на межах $x_1 = 0$ і $x_1 = L_1$. Інші межі області Ω вважаються непроникливими. Дискретизуючи закон збереження маси

$$(\overline{m}\,\overline{\rho}_i \overline{S}_i) = (k_{i,1} \overline{p}_{\bar{x}})_x + (\overline{k}_{i,2} \overline{p}_{\bar{y}})_y + (\overline{k}_{i,3} \overline{p}_{\bar{z}})_z, \quad i = 1, 2,$$

і враховуючи початкові та крайові умови, отримуємо нелінійну систему різницевих рівнянь для знаходження трьох невідомих сіткових функцій $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{S}_1$. Для розв'язання системи сіткових рівнянь розроблено спеціальну ітеративну процедуру із використанням модифікацій методу спряжених градієнтів. Особливістю цієї задачі є великий її розмір (десятки тисяч рівнянь) та великий інтервал прогнозування, який вимірюється роками.

Водночас І.І. Ляшко отримав значні результати щодо некоректних задач. У циклі робіт, написаних у співавторстві із професором В.П. Діденком, зокрема у монографіях «Динамические системы с разрывными коэффициентами» [12] і «Фильтрация шумов» [13], розроблено нові стійкі алгоритми розв'язання задач фільтрації випадкових процесів за допомогою регуляризації та оснащених просторів Гільберта. Розроблений авторами апарат просторів з негативними нормами та апріорних оцінок виявився ефективним для дослідження багатьох еволюційних задач математичної фізики.

Ідеї І.І. Ляшка та В.П. Діденка були розвинені в подальшому в монографії «Математическое обеспечение сложного эксперимента» [14–18]. У цій монографії розглянуто питання розроблення та обгрунтування стійких алгоритмів оцінювання адекватності моделей, розвинено математичні моделі, що використовуються в радіотехніці, а також відновлення апріорних характеристик динамічних систем у задачах оцінювання.

Багато уваги приділялось підготовці спеціалістів, озброєних сучасними математичними методами. Це потребувало удосконалення навчального процесу та забезпечення студентів новою навчально-методичною літературою. На факультеті кібернетики Київського державного університету кафедра обчислювальної математики стала відповідальною за деякі фундаментальні математичні курси, зокрема за курс математичного аналізу. Колектив у складі І.І. Ляшка, О.К. Боярчука та інших викладачів створив оригінальну методичну базу цього курсу [19–22]. Довідники [19, 20] досі не втратили популярності серед студентів та викладачів університетів України та інших країн. У двотомному підручнику [21, 22] вдало реалізовано паралельне викладення дійсного та комплексного аналізу. На думку І.І. Ляшка, сучасний математичний аналіз є аналізом функцій у скінченновимірному просторі. Така точка зору усувала розрив між класичним математичним і функціональним аналізом, що існував у навчальній літературі в недалекому минулому. Родзинкою курсу була побудова теорії узагальнених функцій на базі секвенційного підходу Мікусінського–Сікорського. Також за участі І.І. Ляшка видано підручники з обчислювальної математики та дослідження операцій [23, 24], що більше 40 років не втрачають актуальності. Наприклад, підручник [23] містить ґрунтовний огляд ідей та алгоритмів стохастичної оптимізації. Загалом, І.І. Ляшко був співавтором більше, ніж 20 підручників та навчальних посібників, які перекладалися в багатьох країнах.

КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

З 1992 року І.І. Ляшко розпочав розроблення чисельних методів узагальненого керування системами з розподіленими параметрами. До таких систем зводяться задачі теорії фільтрації, такі як вологоперенос на фоні горизонтального дренажу або зрощення із точкових та лінійних джерел у тріщинуватому ґрунті.

У цьому напрямку І.І. Ляшко та його колеги побудували теорію чисельних методів імпульсно-точкового керування псевдопараболічними та псевдогіперболічними системами з розподіленими параметрами [25–27].

Наприклад, у роботах [26, 27] для псевдогіперболічних задач розвинуто теорію узагальненої розв'язності. Розглянуто лінійне рівняння

$$Lu = u_{tt} + (Au)_t + Bu = f(t,x) \tag{1}$$

у циліндричній області $Q = (0,T)\times\Omega$, $\Omega \subset R^n$ — обмежена область з регулярною межею $\partial\Omega$. Диференціальні вирази A та B мають вигляд

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(t,x)u_{x_j})_{x_i} + a(t,x)u, \quad Bu = -\sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}(t,x)u_{x_j})_{x_i} + b(t,x)u,$$

їхні коефіцієнти достатньо гладкі та задовольняють умови типу диференціальних нерівностей

$$\frac{1}{\alpha_A}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \ge \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \ge \alpha_A \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \quad \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}(t,x)}{\partial t}\xi_i\xi_j \ge 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 a_{ij}(t,x)}{\partial t^2}\xi_i\xi_j \le 0, \quad \frac{1}{\alpha_B}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \ge \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \ge \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial b_{ij}(t,x)}{\partial t}\xi_i\xi_j \ge 0,$$

$$a(t,x) \ge \alpha_A > 0,\ a_t(t,x) \ge 0,\ a_{tt}(t,x) \le 0,\ b(t,x) \ge b_t(t,x) \ge 0,$$

де α_A, α_B — додатні сталі. Межа $\partial\Omega$ складається з трьох частин: γ_1, γ_2 та γ_3, які є кусками гладких поверхонь. Нехай $D(L)$ — множина функцій з класу $C^\infty(\overline{Q})$, що задовольняють граничні умови

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0,\ u|_{\Gamma_1} = \left(\frac{\partial u}{\partial \mu_A}\right)_t + \frac{\partial u}{\partial \mu_B}|_{\Gamma_2} =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial \mu_A}\right)_t + \frac{\partial u}{\partial \mu_B} + cu|_{\Gamma_3} = 0, \tag{2}$$

де $\Gamma_i = (0,T)\times\gamma_i$ $(i=1,2,3)$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $\dfrac{\partial u}{\partial \mu_A} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \nu_{x_j}$, $\dfrac{\partial u}{\partial \mu_B} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij} u_{x_i} \nu_{x_j}$ — конормальні похідні, $\nu_{x_j} = \cos(\bar{\nu}, x_j)$ — j-а компонента одиничного вектора $\vec{\nu}$ зовнішньої нормалі до поверхні $\partial\Omega$ в точці $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $c = c(t,x)$ — функція з класу $C^{1,0}(\overline{\Gamma}_3)$, яка задовольняє умови

$$\forall (t,x) \in \overline{\Gamma}_3 \quad c(t,x) \geq c_t(t,x) \geq 0.$$

Нехай W^+, W_+^+ — позитивні простори — поповнення множин $D(L)$, $D(L^+)$ (область визначення формально спряженого оператора L^+) за нормою $\| u \|_{W^+} = \left(\int_Q u_t^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i t}^2 dQ \right)^{1/2}$, W^-, W_+^- — відповідні негативні відносно $L_2(Q)$ простори. Уведемо пару Гільбертових просторів H, H_+ як поповнення $D(L)$, $D(L^+)$ за такими нормами:

$$| u |_H = \left(\int_Q u^2 + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 \, dQ + \int_\Omega u^2 |_{t=T} \, d\Omega \right)^{1/2},$$

$$| \nu |_{H_+} = \left(\int_Q \nu^2 + \sum_{i=1}^{n} \nu_{x_i}^2 \, dQ + \int_\Omega \nu^2 |_{t=0} \, d\Omega \right)^{1/2}.$$

Вочевідь, що H– ізометрично ізоморфний $W^{0,1}(Q) \oplus L_2(\Omega)$; отже, простір H містить елементи простору $W^{0,1}(Q)$, для яких відомо значення $u|_{t=T} \in L_2(\Omega)$. Простір $W^{0,1}(Q)$ — це поповнення множини $D(L)$ за нормою

$$\| u \|_{W^{0,1}(Q)} = \left(\int_Q u^2 + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 \, dQ \right)^{1/2}.$$

Мають місце щільні алгебраїчні та топологічні вкладення $W^+ \subset H$, $W_+^+ \subset H_+$. Зауважимо, що для H, H_+ вкладення $H \subset L_2(Q)$, $H_+ \subset L_2(Q)$ відсутні. Для операторів L, L^+ отримано апріорні нерівності

$$| u |_H \leq c_1 \| Lu \|_{W_+^-} \leq c_2 \| Lu \|_{W^+} \quad \forall u \in D(L),$$

$$| \nu |_{H_+} \leq c_1 \| L^+ \nu \|_{W^-} \leq c_2 \| \nu \|_{W_+^+} \quad \forall \nu \in D(L^+).$$

Нехай $W_+^{0,-1}(Q)$ — негативний простір, побудований за $L_2(Q)$ та позитивним простором $W_+^{0,1}(Q)$ — замиканням $D(L^+)$ в нормі $W_+^{0,1}(Q)$. З апріорних нерівностей випливає, що для довільної функції $f \in W_+^{0,-1}(Q)$ існує єдина функція $u \in W^+$: $Lu = f$.

Для розв'язності задачі (1), (2) за довільними правими частинами з простору W_+^- розширено клас узагальнених розв'язків.

Означення 1. Узагальненим розв'язком задачі (1), (2) з правою частиною $f \in W_+^-$ назвемо таку функцію $u = (u, u|_{t=T}) \in W^{0,1}(Q) \oplus L_2(\Omega)$, що для всіх функцій $v \in C^\infty(\overline{Q})$:

$$v|_{t=T} = 0, \quad v|_{\Gamma_1} = -\frac{\partial v_t}{\partial \mu_A} + \frac{\partial v}{\partial \mu_B}|_{\Gamma_2} = -\frac{\partial v_t}{\partial \mu_A} + \frac{\partial v}{\partial \mu_B} + cv|_{\Gamma_3} = 0$$

має місце рівність

$$(u, L^+ v)_{L_2(Q)} - (u|_{t=T}, v_t|_{t=T})_{L_2(\Omega)} = \langle f, v \rangle_{W_+},$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W_+}$ — білінійна форма, побудована розширенням за неперервністю скалярного добутку $(\cdot\,,\cdot)_{L_2(Q)}$ на $W_+^- \times W_+^+$.

Має місце таке твердження.

Теорема 2 [26, 27]. Для довільної функції $f \in W_+^-$ існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1), (2) у розумінні означення 1.

Спираючись на якісні результати такого типу, можна коректно формулювати задачі оптимального імпульсно-точкового керування лінійними системами з розподіленими параметрами та отримувати теоретично обґрунтовані результати про збіжність алгоритмів.

З використанням цього підходу виконано роботи, що присвячені дослідженням таких фундаментальних проблем, як розроблення теорії узагальнених розв'язків граничних задач з гладкими та розривними коефіцієнтами і сингулярними правими частинами [28, 29]; умови точної та асимптотичної керованості розподілених систем (траєкторної, фінальної, траєкторно-фінальної) [30–32]; теорія та алгоритми оптимізації розподілених систем з сингулярними керуваннями [33–35]; коректність математичних моделей та обчислювальних процесів [36–38].

ВИСНОВКИ

Із цього короткого огляду, можна зробити висновок, що мотивовані практичними потребами численні роботи представників київської школи теорії фільтрації виконувались з використанням потужної математичної техніки та сучасних алгоритмів обчислювальної математики. Напрямки, визначені академіком І.І. Ляшком, під керівництвом якого захищено більше 40 кандидатських та докторських дисертацій, стали орієнтирами для роботи його численних послідовників в Україні та за кордоном.

Тематика теорії фільтрації регулярно знаходить відображення на сторінках журналу «Кібернетика та системний аналіз». Публікації учнів І.І. Ляшка різних років [30–32, 35], у яких його ідеї і здобутки отримали подальший розвиток, також надруковано у журналі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Крашенинникова О.Е., Мистецкий Г.Е. Иван Иванович Ляшко. Библиография ученых Украинской ССР. Київ: Наук. думка, 1982. 56 с.
2. Александрович І.М., Прохур Ю.З., Склеповий В.М. Видатні постаті Київського університету: Ляшко Іван Іванович. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2002. 103 с.
3. Ляшко И.И. Решение задачи о фильтрации под многошпунтовой плотиной при произвольном криволинейном подземном водоупоре. *Автореф. дис. ...канд. физ.-мат. наук*. Киев, 1955. 7 с.
4. Положий Г.Н. Теорема о сохранении области для некоторых эллиптических систем дифференциальных уравнений и ее применение. *Мат. сб.* 1953. Т. 32. № 3. С. 485–492.

5. Ляшко И.И. Решение фильтрационных задач методом суммарных представлений. Київ: Изд-во Киевского университета, 1963. 175 с.

6. Ляшко И.И., Великоиваненко И.М. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации. Київ: Наук. думка, 1973. 264 с.

7. Ляшко И.И., Великоиваненко И.М., Лаврик В.И., Мистецкий Г.Е. Метод мажорантных областей в теории фильтрации. Київ: Наук. думка, 1974. 200 с.

8. Ляшко И.И., Мистецкий Г.Е., Олейник А.Я. Расчет фильтрации в зоне гидросооружений. Київ: Будівельник, 1977. 152 с.

9. Ляшко И.И., Сергиенко И.В., Мистецкий Г.Е., Скопецкий В.В. Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ. Київ: Наук. думка, 1977. 295 с.

10. Гладкий А.В., Ляшко И.И., Мистецкий Г.Е. Алгоритмизация и численный расчет фильтрационных схем. Київ: Вища шк., 1981. 287 с.

11. Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. Київ: Наук. думка, 1991. 261 с.

12. Ляшко И.И., Диденко В.П. Динамические системы с разрывными коэффициентами. Київ: Наук. думка, 1977. 82 с.

13. Ляшко И.И., Диденко В.П., Цитрицкий О.Е. Фильтрация шумов. Київ: Наук. думка, 1979. 232 с.

14. Белов Ю.А., Диденко В.П., Козлов Н.Н., Ляшко И.И., Макаров В.Л., Цитрицкий О.Е. Математическое обеспечение сложного эксперимента. Т. 1. Обработка измерений при исследовании сложных систем. Київ: Наук. думка, 1982. 304 с.

15. Белов Ю.А., Диденко В.П., Козлов Н.Н., Ляшко И.И., Макаров В.Л., Цитрицкий О.Е. Математическое обеспечение сложного эксперимента. Т. 2. Математические модели при измерениях. Київ: Наук. думка, 1983. 264 с.

16. Белов Ю.А., Диденко В.П., Козлов Н.Н., Ляшко И.И., Макаров В.Л., Цитрицкий О.Е. Математическое обеспечение сложного эксперимента. Т. 3. Основы теории математического моделирования сложных радиотехнических систем Київ: Наук. думка, 1985. 272 с.

17. Белов Ю.А., Диденко В.П., Козлов Н.Н., Ляшко И.И., Макаров В.Л., Цитрицкий О.Е. Математическое обеспечение сложного эксперимента. Т. 4. Приближенные методы решения задач математического моделирования сложных радиотехнических систем. Київ: Наук. думка, 1986. 264 с.

18. Белов Ю.А., Диденко В.П., Козлов Н.Н., Ляшко И.И., Макаров В.Л., Цитрицкий О.Е. Математическое обеспечение сложного эксперимента. Т. 5. Проблемы построения математического и программного обеспечения измерительно-вычислительных комплексов. Київ: Наук. думка, 1990. 368 с.

19. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Математический анализ в примерах и задачах. Ч. 1. Введение в анализ, производная, интеграл. Київ: Вища шк., 1974. 680 с.

20. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Математический анализ в примерах и задачах. Ч. 2. Ряды, функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы. Київ: Вища шк., 1977. 672 с.

21. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К. Математичний аналіз. Ч. 1. Київ: Вища шк., 1992. 495 с.

22. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К. Математичний аналіз. Ч. 2. Київ: Вища шк., 1993. 375 с.

23. Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробогатько А.А. Методы вычислений. Численный анализ. Методы решения задач математической физики. Київ: Вища шк., 1977. 408 с.

24. Ермольев Ю.М., Ляшко И.И., Михалевич В.С., Тюптя В.И. Математические методы исследования операций. Київ: Вища шк., 1979. 312 с.

25. Ляшко И.И., Ляшко С.И., Клюшин Д.А., Спивак А.Ю. Численное решение псевдопараболических уравнений. *Доповіді НАН України.* 1998. № 5. С. 29–34.

26. Ляшко И.И., Ляшко С.И., Номировский Д.А. Управляемость гиперболических и псевдогиперболических систем в классе сингулярных воздействий. *Доповіді НАН України*. 2000. № 11. С. 131–134.

27. Lyashko I.I., Lyashko S.I., Semenov V.V. Control of pseudo-hyperbolic systems by concentrated impacts. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2000. Vol. 32, Iss. 12. P. 23–36. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v32.i12.40.

28. Petunin Yu.I., Klyushin D.A., Lyashko S.I., Nomirovskii D.A., Semenov V.V. Generalized solutions of operator equations and extreme elements. New York: Springer, 2012. 200 p.

29. Lyashko S.I. Generalized optimal control of linear systems with distributed parameters. Boston–Dordrecht–London: *Kluwer Academic Publishers*, 2002. 466 p.

30. Lyashko S.I., Semenov V.V. Controllability of linear distributed systems in classes of generalized actions. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2001. Vol. 37, Iss. 1. P. 13–32. https://doi.org/10.1023/A:10166078312/84.

31. Lyashko S.I., Nomirovskii D.A., Sergienko T.I. Trajectory and final controllability in hyperbolic and pseudohyperbolic systems with generalized actions. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2001. Vol. 37, N 5. P. 756–763. https://doi.org/10.1023/A:1013871026026.

32. Lyashko S.I., Semenov V.V., Sergienko T.I. Controllability and optimization of systems of pseudohyperbolic type. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2002. Vol. 38, N 4. P. 586–596. https://doi.org/10.1023/A:1021162303764.

33. Tymoshenko A., Klyushin D., Lyashko S. Optimal control of point sources in Richards–Klute equation. *Advances in Intelligent Systems and Computing.* 2019. Vol. 754. P. 194–203. https://doi.org/10.1007/978-3-319-91008-6_20.

34. Lyashko S.I., Klyushin D.A., Timoshenko A.A., Lyashko N.I., Bondar E.S. Optimal control of intensity of water point sources in unsaturated porous medium. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. Vol. 51, Iss. 7. P. 24–33. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i7.20.

35. Lyashko S.I. Numerical solution of pseudoparabolic equations. *Cybernetics and Systems Analysis.* 1995. Vol. 31, N 5. P. 718–722. https://doi.org/10.1007/BF02366321.

36. Semenov V.V. Modified extragradient method with Bregman divergence for variational inequalities. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. Vol. 50, Iss. 8. P. 26–37. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i8.30.

37. Бондар О.С., Ведель Я.І., Гончаренко Ю.В., Клюшин Д.А., Ляшко С.І., Номіровський Д.А., Семенов В.В., Тимошенко А.А., Чабак Л.М. Математичні моделі та обчислювальні процеси. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2019. 209 с.

38. Ведель Я.І., Григоренко В.А., Денисов С.В., Клюшин Д.А., Ляшко С.І., Сандраков Г.В., Семенов В.В. Математичне моделювання та обчислювальна математика. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2020. 222 с.

I.V. Sergienko, O.M. Khimich, D.A. Klyushin, V.I. Lyashko, S.I. Lyashko, V.V. Semenov

FORMATION AND DEVELOPMENT OF THE SCIENTIFIC SCHOOL OF THE MATHEMATICAL THEORY OF FILTRATION
To the 100th anniversary of the birth of I.I. Lyashko

Abstract. The review describes the main stages of the formation and development of the Kyiv School of the mathematical filtration theory. The main attention is paid to the scientific ideas and results of its leader, an outstanding Ukrainian scientist, Academician of the National Academy of Sciences of Ukraine, Ivan Ivanovich Lyashko. The journal “Kibernetyka ta Systemnyi analiz” systematically publishes the works of I. I. Lyashko’s students, in which his ideas and achievements were further developed.

Keywords: theory of filtration, applied mathematics, computational mathematics, cybernetics, systems with distributed parameters.