УДК 519.872

М.Ю. КУЗНЄЦОВ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
Навчально-науковий фізико-технічний інститут Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна,
e-mail: *kuznetsov2016@icloud.com.*

І.М. КУЗНЄЦОВ
Навчально-науковий фізико-технічний інститут Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», Київ, Україна,
e-mail: *sea_hawk@icloud.com.*

А.А. ШУМСЬКА
Навчально-науковий фізико-технічний інститут Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», Київ, Україна,
e-mail: *shumska-aa@ukr.net.*

ЗНАХОДЖЕННЯ ГРАДІЄНТА ЙМОВІРНОСТІ ВІДМОВИ СИСТЕМИ РАНГОВОЇ СТРУКТУРИ МЕТОДОМ ПРИСКОРЕНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Анотація. Розглянуто модель відновлюваної резервованої системи рангової структури, функціонування якої з погляду надійності визначається розподілами загального вигляду. Для знаходження градієнта ймовірності відмови системи у заданому проміжку часу запропоновано метод прискореного моделювання. Наведено числовий приклад, що ілюструє використання цього методу для оцінювання впливу швидкостей відновлення елементів різного типу на надійність всієї системи в цілому.

Ключові слова: надійність, резервована система з відновленням, ранг, моделювання із забороною, градієнт, незміщена оцінка, дисперсія.

ВСТУП

Однією з найважливіших задач, що виникають під час проєктування складних технічних систем, є дослідження їхньої надійності. Водночас показник надійності є лише деяким функціоналом, який визначає залежність надійності системи від її певних характеристик. При цьому постає задача оптимізації надійності системи за деякими параметрами, що визначають надійність елементів, швидкість відновлення тощо. Саме градієнт є характеристикою, яка дає змогу оцінити швидкість зміни надійності системи залежно від зміни тих чи інших параметрів.

Припустимо, що система функціонує у фіксованому проміжку $[0, T]$. Позначимо $P(T; \overline{\theta})$ ймовірність її відмови у $[0, T]$ для заданого вектора параметрів $\overline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$. Ступінь впливу параметрів $\{\theta_i\}$ на надійність всієї системи дає змогу оцінити градієнт

$$\nabla P = \left(\frac{\partial P(T; \overline{\theta})}{\partial \theta_1}, \ldots, \frac{\partial P(T; \overline{\theta})}{\partial \theta_m} \right).$$

Значимістю параметра θ_i назвемо відношення

$$w_i(T; \overline{\theta}) = \left| \frac{\partial P(T; \overline{\theta})}{\partial \theta_i} \right| \Bigg/ \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{\partial P(T; \overline{\theta})}{\partial \theta_j} \right|.$$

Чим більших значень набуває $w_i(T;\overline{\theta})$, тим більшим є вплив параметра θ_i на надійність системи; якщо значення $w_i(T;\overline{\theta})$ є близьким до нуля, то зміна параметра θ_i майже не впливає на надійність системи.

Знаходження градієнта тісно пов'язано з кількісними оцінками неперервності характеристик резервованих систем. Дійсно,

$$P(T;\theta_1,\ldots,\theta_{i-1},\theta_i+\varepsilon,\theta_{i+1},\ldots,\theta_m)=$$

$$=P(T;\theta_1,\ldots,\theta_{i-1},\theta_i,\theta_{i+1},\ldots,\theta_m)+\varepsilon\,\frac{\partial P(T;\overline{\theta})}{\partial\theta_i}+o(\varepsilon),$$

де $\varepsilon>0$ — деякий малий параметр. Структурна складність сучасних технічних систем не дає можливості знаходити явні аналітичні (чи навіть асимптотичні) формули для обчислення $P(T;\overline{\theta})$. Водночас висока надійність систем не дає змоги ефективно використовувати класичний метод Монте–Карло для оцінювання ймовірності $P(T;\overline{\theta})$ виникнення рідкісної події. До того ж сформульована задача є на порядок складнішою, оскільки потрібно оцінити різницю двох малих величин з точністю $o(\varepsilon)$.

У роботах [1, 2] (див. також [3, 4]) сформульовано принципи побудови кількісних оцінок неперервності характеристик систем, поведінка яких описується ланцюгами Маркова загального вигляду. Також запропоновано аналітико-статистичні методи, які дали змогу побудувати незміщені оцінки поправок для показників систем із близькими характеристиками. Ідея полягала у тому, що для обчислення поправок будували аналітичну формулу, що містила деякі невідомі параметри, для оцінювання яких застосовували статистичне моделювання. Числові приклади підтверджують ефективність цього підходу, зокрема, високу точність отриманих оцінок.

Ідея побудови кількісних оцінок неперервності за допомогою аналітико-статистичного методу виявилась доволі плідною. Дослідження продовжено у роботах [5, 6], де для розв'язання задачі оптимізації надійності системи запропоновано використовувати одночасно метод прискореного моделювання, аналітико-статистичний метод побудови кількісних оцінок неперервності та метод стохастичного програмування. При цьому як критерій, за яким оцінюють ступінь впливу надійності елементів різного типу на ймовірність відмови системи, вибрано градієнт за середніми тривалостями безвідмовної роботи елементів (час безвідмовної роботи вважали експоненційно розподіленим). Задача пошуку градієнта за тими чи іншими параметрами є надзвичайно актуальною. Про це свідчить значна кількість публікацій з описом різноманітних підходів до розв'язання цієї задачі, зокрема роботи [7–13].

У цій статті ідеї, викладені у [2, 5, 6], узагальнено на випадок довільного розподілу, причому градієнт взято за масштабувальним параметром. Наведено загальний метод прискореного моделювання градієнта від математичного сподівання деякого функціонала від траєкторій випадкового процесу. Цей загальний метод застосовується для відновлюваної системи рангової структури. Як метод прискореного моделювання систем цього класу (побудова траєкторій випадкового процесу) вибрано модифікований метод із забороною [14, 15]. Наведено числовий приклад, який не тільки демонструє точність оцінок градієнта від ймовірності відмови системи за масштабувальними параметрами, а й ілюструє оптимальний вибір цих параметрів, який забезпечує досягнення потрібної надійності системи.

ОСНОВНЕ СПІВВІДНОШЕННЯ

Нехай η_c — невід'ємна випадкова величина (ВВ), що має функцію розподілу (ФР) $G(c\,x)$, де $c>0$ — деяка константа (масштабувальний множник). Припустимо, що виконується співвідношення

$$\eta_{c+\varepsilon} = \min(\eta_c, \delta_{c,\varepsilon}), \tag{1}$$

де $\varepsilon>0$ — деякий малий параметр, а η_c та $\delta_{c,\varepsilon}$ — незалежні ВВ, причому

$$D_{c,\varepsilon}(x) = \mathbf{P}\{\delta_{c,\varepsilon} < x\} = 1 - \frac{1 - G((c+\varepsilon)\,x)}{1 - G(c\,x)},\ x \ge 0, \tag{2}$$

є ФР для будь-яких значень $c>0$ та $\varepsilon>0$ (розподіл $D_{c,\varepsilon}(x)$ необов'язково є власним, тобто не виключається випадок, коли $D_{c,\varepsilon}(+\infty)<1$). При цьому для будь-яких скінченних $c>0$ та $w>0$ існує $a(c,w)$ таке, що

$$D_{c,\varepsilon}(w) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} a(c,w)\,\varepsilon\,. \tag{3}$$

Приклади розподілів, які задовольняють співвідношення (1)–(3).

A. Розподіл Вейбулла: $\eta_c \sim Wei(c,\alpha)$, тобто $G(c\,x) = 1 - \exp\{-(c\,x)^\alpha\}$, $x \ge 0, c>0, \alpha>0$. У цьому випадку

$$D_{c,\varepsilon}(x) = 1 - \frac{\exp\{-[(c+\varepsilon)\,x]^\alpha\}}{\exp\{-(c\,x)^\alpha} = 1 - \exp\{-[(c+\varepsilon)^\alpha - c^\alpha]\,x^\alpha\},$$

тобто $\delta_{c,\varepsilon} \sim Wei\left([(c+\varepsilon)^\alpha - c^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}}, \alpha\right)$. При цьому

$$D_{c,\varepsilon}(w) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \alpha\, c^{\alpha-1}\, w^\alpha\, \varepsilon\,,$$

тобто виконуються умови (2) та (3) з $a(c,w) = \alpha\, c^{\alpha-1}\, w^\alpha$.

B. Розподіл Парето: $G(c\,x) = 1 - \dfrac{1}{(1+c\,x)^\alpha}$, $x \ge 0, c>0, \alpha>0$. Зі співвідношення (2) випливає, що

$$D_{c,\varepsilon}(x) = 1 - \left[\frac{1+c\,x}{1+(c+\varepsilon)\,x}\right]^\alpha.$$

Очевидно, що ця функція є неперервною та монотонно зростаючою, $D_{c,\varepsilon}(0) = 0$, тобто $D_{c,\varepsilon}(x)$ — це ФР. Водночас $D_{c,\varepsilon}(+\infty) = 1 - \left[\dfrac{c}{(c+\varepsilon)}\right]^\alpha < 1$, тобто ця ФР є невласною. При цьому

$$D_{c,\varepsilon}(w) = 1 - \left[\frac{1+c\,w}{1+(c+\varepsilon)\,w}\right]^\alpha \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \frac{\alpha\, w}{1+c\,w}\,\varepsilon\,.$$

Отже, і для розподілу Парето виконуються умови (2) та (3) з $a(c,w) = \dfrac{\alpha\, w}{1+c\,w}$.

C. Гамма-розподіл: $G(cx)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{cx} u^{\alpha-1}e^{-u}\,du,\ x\ge 0,\ c>0,\ \alpha>0$, де $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} u^{\alpha-1}e^{-u}\,du$. У цьому випадку

$$D_{c,\varepsilon}(x)=\mathbf{P}\{\delta_{c,\varepsilon}<x\}=1-\frac{\int_{(c+\varepsilon)x}^{\infty} u^{\alpha-1}e^{-u}\,du}{\int_{cx}^{\infty} u^{\alpha-1}e^{-u}\,du},\ x\ge 0,$$

є монотонно зростаючою функцією, $D_{c,\varepsilon}(0)=0,\ D_{c,\varepsilon}(\infty)=1$, отже $D_{c,\varepsilon}(x)$ — це ФР. До того ж

$$D_{c,\varepsilon}(w)\underset{\varepsilon\to 0}{\sim}\frac{w(cw)^{\alpha-1}e^{-cw}}{\int_{cw}^{\infty} u^{\alpha-1}e^{-u}\,du}\varepsilon=\frac{1}{c\int_0^{\infty}(u+1)^{\alpha-1}e^{-cwu}\,du}\varepsilon,$$

тобто і для гамма-розподілу виконується умова (3).

МАРКОВСЬКИЙ ПРОЦЕС ЗАГАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Нехай $\xi(t;\theta_0),\ t\ge 0$, — неперервний справа марковський процес, що набуває значень у вимірному просторі $(X,\mathfrak{I})$ з відомим початковим станом $\xi(0;\theta_0)=\theta_0\in X$. Позначимо $U\in\mathfrak{I}$ деяку фіксовану множину, $\tau(\theta_0)=$ $=\inf\{t:\xi(t;\theta_0)\in U\}$. Якщо $\{\xi^{(k)}(t;\theta_0^{(k)}),0\le t<\tau^{(k)}(\theta_0^{(k)}),\ k=1,2,\dots\}$ є послідовністю незалежних процесів цього типу, то неперервний справа марковський процес $\zeta(t),\ t\ge 0$, що описує поведінку системи, можна задати у такий спосіб:

$$\zeta(t)=\xi^{(k)}(t-s^{(k-1)};\theta_0^{(k)}),\ s^{(k-1)}\le t<s^{(k)},\ k\ge 1,$$

де $s^{(k)}=\tau^{(1)}(\theta_0^{(1)})+\ldots+\tau^{(k)}(\theta_0^{(k)}),\ s^{(0)}=0$. Початковий стан $\zeta(0)=\theta_0^{(1)}\in X$ визначається згідно з розподілом $Q_0(\cdot)$. Припустимо, що $\zeta(s^{(k)}-0)=\zeta^{(k)}\ (k\ge 1)$. Тоді початковий стан $\theta_0^{(k+1)}\in X$ визначається згідно з розподілом $Q(\cdot\,;\zeta^{(k)},\eta_c^{(k)})$. Тут $\{\eta_c^{(k)},\ k\ge 1\}$ — послідовність незалежних однаково розподілених ВВ з відомою ФР $G(cx)$, де $c>0$ —деякий параметр. Залежність процесу $\zeta(t),\ t\ge 0$, від параметра c позначатимемо відповідним нижнім індексом. Ефективність функціонування системи у заданому проміжку $[0,T]$ задамо функціоналом $\Psi(\zeta_c(t),\ t\in[0,T])$. Дослідимо характеристику системи $\Phi(c)=\mathbf{M}\Psi(\zeta_c(t),\ t\in[0,T])$ (оскільки момент T є фіксованим, то далі у позначеннях вказувати його не будемо).

Нехай $\{\eta_{c+\varepsilon}^{(k)},\ k\ge 1\}$ — послідовність незалежних однаково розподілених ВВ з ФР $G((c+\varepsilon)x)$, де $\varepsilon>0$ — деякий малий параметр. Відповідний випадковий процес, у якому ВВ $\{\eta_c^{(k)},\ k\ge 1\}$ замінюють на $\{\eta_{c+\varepsilon}^{(k)},\ k\ge 1\}$, позначимо $\zeta_{c+\varepsilon}(t),\ t\ge 0$, $\Phi(c+\varepsilon)=\mathbf{M}\Psi(\zeta_{c+\varepsilon}(t),\ t\in[0,T])$.

Припустимо, що послідовність ВВ $\{\eta_{c+\varepsilon}^{(k)},\ k\ge 1\}$ задовольняє умову (1) та при цьому виконуються співвідношення (2), (3). Метою цього розділу є знаходження $\Phi'(c)$ методом Монте-Карло. Інакше кажучи, шукаємо

$$\Phi'(c)=\mathbf{M}\alpha(c), \tag{4}$$

де $\alpha(c)$ — деяка ВВ. Шляхом моделювання цієї ВВ можна побудувати оцінку для $\Phi'(c)$ із заданою достовірністю та відносною похибкою.

Введемо допоміжні ВВ $\beta(c)$ і $\gamma(c)$ та сформулюємо алгоритми їхнього моделювання методом Монте-Карло. Моделювання випадкової величини $\beta(c)$ здійснюють за таким алгоритмом.

1. Будують вибіркову траєкторію $z_c(t), t \in [0, T]$, процесу $\zeta_c(t)$ у проміжку $[0, T]$:

$$z_c(t) = \xi^{(k)}(t - s^{(k-1)}; \theta_0^{(k)}), s^{(k-1)} \le t < s^{(k)}, k = 1, 2, \ldots, \kappa_c, \tag{5}$$

де $s^{(k)} = \tau^{(1)}(\theta_0^{(1)}) + \ldots + \tau^{(k)}(\theta_0^{(k)})$, $s^{(0)} = 0$, $\kappa_c = \min\{k : s^{(k)} \ge T\}$. Початкові стани $\{\theta_0^{(k)}\}$ визначають згідно з алгоритмом, наведеним вище. При цьому моделюють значення ВВ $\eta_c^{(k)} = w^{(k)}, k = 1, \ldots, \kappa_c - 1$.

2. Обчислюють

$$\beta(c) = \Psi(z_c(t), t \in [0, T])\, A(c, \overline{w}), \tag{6}$$

де $\overline{w} = (w_1, \ldots, w_{\kappa_c - 1})$,

$$A(c, \overline{w}) = \sum_{k=1}^{\kappa_c - 1} a(c, w_k), \tag{7}$$

а $\{a(c, w_k)\}$ визначають згідно з (3).

Моделювання випадкової величини $\gamma(c)$ здійснюють за таким алгоритмом.

1. Будують вибіркову траєкторію $z_c(t), t \in [0, T]$, процесу $\zeta_c(t)$ у проміжку $[0, T]$ (див. (5)).

2. Згідно з (7) обчислюють $A(c, \overline{w})$.

3. Будують реалізацію ВВ σ, яка дорівнює $k \in \{1, \ldots, \kappa_c - 1\}$ з імовірністю $a(c, w_k) / A(c, \overline{w})$. Нехай $\sigma = k$.

4. Будують нову вибіркову траєкторію $z_c^*(t), t \in [0, T]$, процесу $\zeta(t)$ у проміжку $[0, T]$ за таким правилом:

a) $z_c^*(t) = z_c(t), 0 \le t < s^{(k)}$;

b) у момент $s^{(k)}$ будують реалізацію ВВ $\delta_c(w_k)$ з ФР $a(c, x) / a(c, w_k)$, $x \in [0, w_k]$ (це є ФР, оскільки $a(c, x)$ є монотонно неспадною функцією);

c) згідно з розподілом $Q(\cdot; z_c(s^{(k)} - 0), \delta_c(w_k))$ знаходять новий початковий стан $\theta_0^* \in X$;

d) для початкового стану θ_0^* в момент $s^{(k)}$ будують нову траєкторію $z_c^*(t), s^{(k)} \le t \le T$, процесу $\zeta_c(t)$.

5. Обчислюють

$$\gamma(c) = \Psi(z_c^*(t), t \in [0, T])\, A(c, \overline{w}). \tag{8}$$

Справджується таке твердження.

Теорема 1. Якщо виконані умови (1)–(3), то $\Phi'(c) = H(c) - B(c)$, де $B(c) = \mathbf{M}\beta(c), H(c) = \mathbf{M}\gamma(c)$; алгоритми моделювання ВВ $\beta(c)$ та $\gamma(c)$ наведено вище, $\alpha(c) = \gamma(c) - \beta(c)$ (див. (4)).

Доведення. Виконуються такі співвідношення:

$$\Phi(c + \varepsilon) = \mathbf{M}\Psi(\zeta_{c+\varepsilon}(t), t \in [0, T]) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\{\Psi(\zeta_{c+\varepsilon}(t), t \in [0, T]); \kappa_{c+\varepsilon} = n\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\left\{\Psi(\zeta_{c+\varepsilon}(t), t \in [0, T]); \{\kappa_{c+\varepsilon} = n\} \cap \bigcap_{j=1}^{n-1} \{\eta_{c+\varepsilon}^{(j)} = \eta_c^{(j)}\}\right\} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\left\{\Psi(\zeta_{c+\varepsilon}(t), t \in [0, T]); \{\kappa_{c+\varepsilon} = n\} \cap \bigcup_{j=1}^{n-1} \{\delta_{c,\varepsilon}^{(j)} < \eta_c^{(j)}\}\right\}.$$

Позначимо $H_\varepsilon(c)$ другий доданок у правій частині останнього співвідношення. Маємо

$$\Phi(c+\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\{\Psi(\zeta_c(t),\, t\in[0,T]);\, \kappa_c = n\} -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\left\{\Psi(\zeta_c(t),\, t\in[0,T]);\, \{\kappa_c = n\} \cap \bigcup_{j=1}^{n-1} \{\delta_{c,\varepsilon}^{(j)} < \eta_c^{(j)}\}\right\} + H_\varepsilon(c).$$

Позначимо $B_\varepsilon(c)$ другу суму у правій частині останньої рівності. Тоді

$$\Phi(c+\varepsilon) = \Phi(c) + H_\varepsilon(c) - B_\varepsilon(c). \tag{9}$$

Для фіксованої траєкторії $z_c(t),\, t\in[0,T]$, процесу $\zeta_c(t)$ в $[0,T]$ маємо

$$\mathbf{P}\left\{\bigcup_{j=1}^{n-1} \{\delta_{c,\varepsilon}^{(j)} < w_j\}\right\} = \varepsilon \sum_{j=1}^{n-1} a(c, w_j) + o(\varepsilon) = \varepsilon\, A(c, \overline{w}) + o(\varepsilon), \tag{10}$$

де $\{w_j\}$ — реалізації ВВ $\eta_c^{(j)}$, $\overline{w} = (w_1, \ldots, w_{n-1})$.

Ймовірність (10) обчислюють як під час моделювання $B_\varepsilon(c)$, так і під час моделювання $H_\varepsilon(c)$. У випадку $B_\varepsilon(c)$ оцінюють імовірність виникнення однієї з $\kappa_c - 1$ малоймовірних подій, однак сама траєкторія при цьому не змінюється (див. алгоритм моделювання $\beta(c)$) і тому $B_\varepsilon(c) = \varepsilon\, B(c) + o(\varepsilon)$, де $B(c) = \mathbf{M}\beta(c)$. Аналогічно, $H_\varepsilon(c) = \varepsilon\, H(c) + o(\varepsilon)$, де $H(c) = \mathbf{M}\gamma(c)$. При цьому додатково з'ясовують, яка з $\kappa_c - 1$ малоймовірних подій відбулася (для фіксованої траєкторії $z_c(t),\, t\in[0,T]$). Для цього будують реалізацію ВВ σ, яка дорівнює $k \in \{1, \ldots, \kappa_c - 1\}$ з імовірністю $a(c, w_k) / A(c, \overline{w})$. Якщо $\sigma = k$, то w_k замінюють на реалізацію ВВ $\delta_c(w_k)$ з ФР $a(c, x) / a(c, w_k),\, x\in[0, w_k]$ (це асимптотичний розподіл ВВ $\delta_{c,\varepsilon}^{(k)}$ за умови, що $\delta_{c,\varepsilon}^{(k)} < w_k$). Починаючи з моменту $s^{(k)}$, будують нову траєкторію $z_c^*(t),\, s^{(k)} \le t \le T$, процесу $\zeta_c(t)$. Твердження теореми 1 випливає зі співвідношень (9), (10) та наведених алгоритмів моделювання ВВ $\beta(c)$ і $\gamma(c)$. Теорему доведено.

РЕЗЕРВОВАНА СИСТЕМА З ВІДНОВЛЕННЯМ РАНГОВОЇ СТРУКТУРИ

Проілюструємо запропонований метод прискореного моделювання похідної від $\Phi(c)$ прикладом резервованої системи з відновленням, яка має рангову структуру. Підвищення надійності системи досягають за рахунок збільшення швидкості відновлення несправних елементів. Наведений метод дає змогу оцінити градієнт від ймовірності відмови системи у заданому проміжку $[0,T]$ відносно швидкостей відновлення елементів того чи іншого типу, що дає можливість раціонально підвищувати швидкість відновлення окремих груп елементів заради досягнення бажаної надійності системи.

Система складається з m елементів різних типів. Нехай V — множина допустимих типів, відображення $v(\cdot): \{1, \ldots, m\} \to V$ визначає тип елемента. Тривалість безвідмовної роботи i-го елемента типу $v(i)$ має ФР $F_{v(i)}(x)$. Відмови миттєво встановлюються, відновлення починається в момент відмови. Величина роботи, яку потрібно витратити на відновлення i-го елемента типу $v(i)$, має ФР $G_{v(i)}(x)$. Якщо ця робота виконується зі швидкістю $c_{v(i)}$, то тривалість відновлення має ФР $G_{v(i)}(c_{v(i)}\, x)$.

Структура системи з погляду надійності визначається множиною $M=(k;i_1,\ldots,i_k)$ мінімальних перерізів відмов, де k — кількість елементів у перерізі, а $i_1,\ldots,i_k$ — їхні номери (якщо таких перерізів надмірна кількість, то найбільш малоймовірними з них нехтують). Система функціонує протягом фіксованого часу T, у початковий момент $t=0$ всі елементи знаходяться у робочому стані. Позначимо $q(\bar{c})$ ймовірність відмови системи у проміжку $[0,T]$ для фіксованого вектора швидкостей відновлення $\bar{c}=(c_j,\, j\in V)$. Метою дослідження є вибір такого вектора $\bar{c}$, щоб $q(\bar{c})\le q$, де q — порогове значення ймовірності відмови.

Для того, щоб оцінити вплив швидкостей відновлення елементів на надійність усієї системи, потрібно володіти методом оцінювання градієнта

$$\nabla q(\bar{c})=\left(\frac{\partial q(\bar{c})}{\partial c_j},\, j\in V\right).$$

Саме це дає змогу реалізувати запропонований вище загальний метод прискореного моделювання.

Поведінка системи з погляду надійності визначається неперервним справа марковским процесом

$$\zeta_c(t)=(\bar{\nu}(t);\bar{\gamma}(t))=(\nu_1(t),\ldots,\nu_m(t);\ \gamma_1(t),\ldots,\gamma_m(t)),\ \ t\ge 0,$$

з початковим станом $\zeta(0)=(0,\ldots,0;\ 0,\ldots,0)$, де

$$\nu_i(t)=\begin{cases}0, & \text{якщо } i\text{- й елемент знаходиться у робочому стані у момент } t,\\ 1, & \text{якщо } i\text{- й елемент знаходиться на відновленні у момент } t,\end{cases}$$
$$i=1,\ldots,m,$$

якщо $\nu_i(t)=0$, то $\gamma_i(t)=\sup\colon \nu_i(s)=0$ для будь-якого $s\in(t-u,t)$ ($\gamma_i(t)$ — час неперервного перебування елемента у робочому стані до моменту t); якщо ж $\nu_i(t)=1$, то $\gamma_i(t)$ є величиною роботи, яку потрібно виконати для завершення відновлення i-го елемента.

Дискретна змінна $\bar{\nu}$ визначає «якісний» стан системи. Позначимо S дискретну множину значень, яких може набувати вектор $\bar{\nu}$. Підмножину E станів відмови системи задають у такий спосіб:

$$E=\{\bar{\nu}=(\nu_1,\ldots,\nu_m)\colon \text{існує переріз } (k;i_1,\ldots,i_k)\in M \text{ такий, що } \nu_{i_j}=1,\ j=1,\ldots,k\}.$$

Позначимо $\bar{e}_j=(e_1,\ldots,e_m)$ m-вимірний одиничний вектор, $e_j=1, e_l=0$, $l\ne j$. Введемо множини станів:

$E_r=\{\bar{\nu}=(\nu_1,\ldots,\nu_m)\notin E_0\cup\ldots\cup E_{r-1}\colon$ існує j таке, що $\nu_j=0$ і $\bar{\nu}+\bar{e}_j\in E_{r-1}\}$, $r=1,\ldots,R$, де $R=\max\{r\colon E_r\ne\varnothing\}$. Очевидно, що $S=E_0\cup\ldots\cup E_R$. Число R називають рангом системи, а множина E_r містить стани рангу r. Якщо стан системи $\bar{\nu}$ має ранг r, то це означає, що існують r елементів у робочому стані, відмова яких призводить до відмови системи, а відмова меншої кількості елементів не може призвести до відмови системи.

АЛГОРИТМ ПРИСКОРЕНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЙМОВІРНОСТІ $q(\bar{c})$ МЕТОДОМ ЗАБОРОНИ

Загальна ідея побудови асимптотично незміщених оцінок надійності систем, поведінку яких не можна описати регенерувальним процесом, належить І.М. Коваленку [16]. Цей метод ґрунтується на забороні переходів системи у певні класи станів із наступним моделюванням моментів цих переходів. Через це він має назву «метод заборони». У роботі [14] цей метод був узагальнений, що дало змогу будувати незміщені оцінки. У цьому розділі наведено останню модифіковану версію [15] методу заборони, яка далі буде застосована для оцінювання градієнта $\nabla q(\bar{c})$.

Нехай $\bar{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_m) \in E_k$ $(1 \le k \le R)$ — довільний стан системи. Елемент j назвемо основним, якщо $\nu_j = 0$ і $\bar{\nu} + \bar{e}_j \in E_{k-1}$, тобто відмова цього елемента зменшує ранг стану. Множину основних елементів для стану системи $\bar{\nu}$ позначимо $W(\bar{\nu})$.

Алгоритм побудови незміщеної оцінки $\hat{q}_1(\bar{c})$ в одній реалізації для ймовірності $q(\bar{c})$ має такий вигляд.

1. Задаємо стан системи у початковий момент $t_0 = 0$: $\zeta_{\bar{c}}(t_0) = (\bar{\nu}, \bar{\gamma}) = (0, \ldots, 0;\ 0, \ldots, 0)$, $\bar{\nu} \in E_R$.

2. Припустимо, що в деякий момент $t_k \in [0, T]$ $(0 \le k < R)$ система вперше потрапила у множину станів E_{R-k}:

$$\zeta_{\bar{c}}(t_k) = (\bar{\nu}; \bar{\gamma}) = (\nu_1, \ldots, \nu_m;\ \gamma_1, \ldots, \gamma_m), \bar{\nu} \in E_{R-k}.$$

Знайдемо ймовірність переходу і момент переходу системи у множину станів E_{R-k-1}. Для цього моделюємо траєкторію процесу $\zeta_{\bar{c}}(t)$, $t \in [t_k, T]$, за умови, що у $[t_k, T]$ не відмовить жоден елемент. Нехай $n = \sum\limits_{i:\ \nu_i = 1, \gamma_i < T - t_k} 1$ — кількість елементів, відновлення яких завершиться до моменту T. При цьому визначаємо такі величини:

$t_k = u^{(0)} < u^{(1)} < \ldots < u^{(n)} < u^{(n+1)} = T$ — моменти завершення відновлень елементів;

$\zeta_{\bar{c}}(u^{(j)}) = (\bar{\nu}^{(j)}; \bar{\gamma}^{(j)}) = (\nu_1^{(j)}, \ldots, \nu_m^{(j)};\ \gamma_1^{(j)}, \ldots, \gamma_m^{(j)})$, $j = 0, \ldots, n$, — стани процесу у відповідні моменти.

3. Для всіх $n+1$ проміжків знаходимо ймовірність відмови кожного елемента:

$$q_i^{(j)} = \frac{F_{\nu(i)}(u^{(j+1)} - u^{(j)} + \gamma_i^{(j)}) - F_{\nu(i)}(\gamma_i^{(j)})}{1 - F_{\nu(i)}(\gamma_i^{(j)})}, \quad i\colon \nu_i^{(j)} = 0, \quad j = 0, \ldots, n. \tag{11}$$

4. У проміжку $[t_k, T]$ забороняємо відмову основних елементів, тобто тих елементів, відмова яких переводить систему у множину станів E_{R-k-1}. Можливою є реалізація одного з двох сценаріїв: або у $[t_k, T]$ не буде відмови жодного елемента, або відбудеться щонайменше одна відмова неосновного елемента. Обчислюємо цю ймовірність. У кожному з $n+1$ проміжків обчислюємо ймовірність відмови одного з неосновних елементів:

$$q^{(j)} = 1 - \prod_{i:\ \nu_i^{(j)} = 0,\ i \notin W(\bar{\nu}^{(j)})} (1 - q_i^{(j)}), \ \ j = 0, \ldots, n. \tag{12}$$

5. Обчислюємо ймовірність відмови одного з неосновних елементів:

$$q = \sum_{j=0}^{n} q^{(j)} \prod_{l=0}^{j-1} [1 - q^{(l)}] = 1 - \prod_{j=0}^{n} [1 - q^{(j)}]. \tag{13}$$

6. Якщо не було відмов неосновних елементів (відповідна ймовірність дорівнює $1 - q$), то траєкторію із забороною відмов основних елементів вже побудовано; вона визначається моментами $u^{(j)}$. В іншому випадку (відповідна ймовірність дорівнює q), потрібно промоделювати траєкторію системи за умови щонайменше однієї відмови неосновного елемента. Для цього моделюємо номер проміжку $\kappa \in \{0, \ldots, n\}$, в якому відмовляє один з неосновних елементів, тобто $\kappa = j$ з імовірністю $q^{(j)} \prod\limits_{l=0}^{j-1} [1 - q^{(l)}] \big/ q$. Припустимо, що $\kappa = j$.

7. Моделюємо номер елемента μ та момент τ його відмови у $[u^{(j)}, u^{(j+1)}]$ за умови, що у цьому проміжку відмовив один з неосновних елементів. Для цього моделюємо ВВ ρ, яка набуває значень з множини $\{i\colon \nu_i^{(j)} = 0,\ i \notin W(\overline{\nu}^{(j)})\}$ з імовірністю $q_i^{(j)} \prod\limits_{0 \le l < i,\, \nu_l^{(j)} = 0,\, l \notin W(\overline{\nu}^{(j)})} [1 - q_l^{(j)}] \Big/ q^{(j)}$. Нехай $\rho = i$. Окрім того, моделюємо ВВ ξ_i^* та ξ_l^*, $i < l \le n, \nu_l^{(j)} = 0, l \notin W(\overline{\nu}^{(j)})$, які мають відповідно ФР

$$\frac{F_{\nu(i)}(z + \gamma_i^{(j)}) - F_{\nu(i)}(\gamma_i^{(j)})}{F_{\nu(i)}(u^{(j+1)} - u^{(j)} + \gamma_i^{(j)}) - F_{\nu(i)}(\gamma_i^{(j)})},\ z \in [0,\ u^{(j+1)} - u^{(j)}],$$

та

$$\frac{F_{\nu(l)}(z + \gamma_l^{(j)}) - F_{\nu(l)}(\gamma_l^{(j)})}{1 - F_{\nu(l)}(\gamma_l^{(j)})},\ z \ge 0.$$

Тоді

$$\tau = u^{(j)} + \min\{\xi_i^*,\ \xi_l^*, i < l \le n, \nu_l^{(j)} = 0, l \notin W(\overline{\nu}^{(j)})\},$$

$$\mu = \arg\min\{\xi_i^*,\ \xi_l^*, i < l \le n, \nu_l^{(j)} = 0, l \notin W(\overline{\nu}^{(j)})\}.$$

8. Моделюємо тривалість відновлення μ-го елемента і знаходимо стан системи у момент τ, якщо відомо, що в цей момент відмовив μ-й елемент.

9. У проміжку $[\tau, T]$ будуємо траєкторію процесу $\zeta_{\overline{c}}(t)$ із забороною основним елементам на відмову. Отже, маємо дві траєкторії із забороною основним елементам на відмову: $\zeta_{\overline{c}}^{(1)}(t),\ t \in [t_k, T]$, відповідає випадку, коли відсутні відмови неосновних елементів, та $\zeta_{\overline{c}}^{(2)}(t),\ t \in [t_k, T]$, яка є траєкторією зі щонайменше однією відмовою неосновного елемента.

10. Для кожної траєкторії обчислюємо ймовірності P_1 і P_2 відмови одного з основних елементів (формули подібні до (11)–(13)).

11. Обчислюємо $\Lambda_k = P_1\,(1 - q) + P_2\, q$.

12. Якщо $k = R - 1$, то алгоритм завершено і як оцінку в одній реалізації вибираємо

$$\hat{q}_1(\overline{c}) = \prod_{j=0}^{R-1} \Lambda_j. \tag{14}$$

13. Нехай $k < R - 1$. Тоді з імовірністю $P_1\,(1 - q) / \Lambda_k$ вибираємо траєкторію $\zeta_c^{(1)}(t),\ t \in [t_k, T]$, а з імовірністю $P_2\, q / \Lambda_k$ – траєкторію $\zeta_c^{(2)}(t),\ t \in [t_k, T]$.

14. На вибраній траєкторії моделюємо момент t_{k+1} відмови основного елемента, його номер та час відновлення.

15. Знаходимо новий стан процесу в момент t_{k+1}, збільшуємо k на одиницю та повертаємося до кроку 2.

Наведений алгоритм дає змогу будувати незміщені оцінки ймовірності $q(\overline{c})$ для будь-яких значень характеристик надійності елементів. Оскільки $\hat{q}_1(\overline{c}) < 1$ з імовірністю 1 (див. (11)–(14)), цей метод гарантує дисперсію оцінки, меншу за відповідну дисперсію, отриману методом Монте-Карло. Застосування методу для конкретних систем демонструє обмеженість відносної середньоквадратичної похибки $\sqrt{D\, \hat{q}_1(\overline{c})} \,/\, q(\overline{c})$, коли $q(\overline{c}) \to 0$. Це свідчить про стійкість обчислень у випадку високонадійної системи.

ВИКОРИСТАННЯ ПРИСКОРЕНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ $\dfrac{\partial q(\bar{c})}{\partial c_l}$

В одному з попередніх розділів наведено загальний алгоритм обчислення $\Phi'(c)$ методом Монте-Карло, де $\Phi(c) = \mathbf{M}\,\Psi(\zeta_c(t),\, t \in [0, T])$, а $\Psi(\cdot)$ — деякий функціонал від траєкторії процесу $\zeta_c(t)$ в $[0, T]$. Якщо $\Psi(\cdot)$ набуває лише двох значень (1 у разі відмови системи і 0, якщо така відмова не відбулася), то поєднання цього алгоритму з алгоритмом прискореного моделювання ймовірності $q(\bar{c})$ відмови системи дає змогу сформулювати алгоритм обчислення $\dfrac{\partial q(\bar{c})}{\partial c_l}$ методом Монте-Карло для будь-якого фіксованого $l \in V$. Інакше кажучи, $\dfrac{\partial q(\bar{c})}{\partial c_l} = \mathbf{M}\alpha(\bar{c})$, де моделювання ВВ $\alpha(\bar{c})$ здійснюється згідно з алгоритмом, викладеним у сформульованій вище теоремі 1.

Переформулюємо умови (2), (3) так: для будь-яких скінченних $c > 0$ та $w > 0$ існує функція $a_l(c, w)$ така, що виконується асимптотична рівність

$$1 - \frac{1 - G_l((c+\varepsilon)\, w)}{1 - G_l(c\, w)} \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} a_l(c, w)\, \varepsilon. \tag{15}$$

У наведеному нижче алгоритмі для зменшення дисперсії оцінки скористаємося методом спільних випадкових чисел (method of common random numbers). Це означає, що у моделюванні ВВ $\beta(c)$ та $\gamma(c)$ застосовується одна й та сама послідовність рівномірно розподілених на $[0,1]$ ВВ (лише під час моделювання ВВ $\delta_c(w)$ з ФР $a(c, x) / a(c, w),\, x \in [0, w]$, використовується незалежна рівномірно розподілена ВВ). Як послідовність $\{s^{(k)},\, k = 1, 2, \ldots, \kappa(T)\}$ вибираємо ті моменти, у які здійснювалося моделювання часу відновлення елементів l-го типу. Алгоритм побудови незміщеної оцінки $\hat{\alpha}_l(\bar{c})$ в одній реалізації для $\dfrac{\partial q(\bar{c})}{\partial c_l}$ має такий вигляд.

1. Згідно з алгоритмом, наведеним у попередньому розділі, моделюємо траєкторію процесу $\zeta_{\bar{c}}(t)$ до моменту потрапляння системи у стан відмови. При цьому знаходимо:

- $\hat{q}_1(\bar{c})$ — оцінку ймовірності відмови системи;
- κ_l — кількість моментів, коли моделювався час відновлення елементів l-го типу;
- $w^{(k)},\, k = 1, \ldots, \kappa_l,$ — тривалості відновлення елементів l-го типу;
- μ — кількість використаних рівномірно розподілених на $[0,1]$ ВВ;
- $\omega_k,\, k = 1, \ldots, \mu,$ — послідовність використаних рівномірно розподілених ВВ;
- $p_k = \prod_{j=0}^{k-1} \Lambda_j,\, k = 0, \ldots, R,$ — оцінку ймовірності відмови системи на момент першого потрапляння у множину станів E_{R-k}, $p_0 = 1$;
- $t_k,\, k = 0, \ldots, R-1,$ — момент першого потрапляння системи у множину станів E_{R-k}, $t_0 = 0$;
- $m_k,\, k = 0, \ldots, R-1,$ — кількість моделювань часу відновлення елементів l-го типу в інтервалі $(0, t_k)$, $m_0 = 0$;
- $n_k,\, k = 0, \ldots, R-1,$ — кількість рівномірно розподілених ВВ, які було використано в інтервалі $(0, t_k)$, $n_0 = 0$;
- $\zeta_{\bar{c}}^{(k)} = \zeta_{\bar{c}}(t_k - 0) = (\bar{\nu}^{(k)}; \bar{\gamma}^{(k)}) = (\nu_1^{(k)}, \ldots, \nu_m^{(k)};\ \gamma_1^{(k)}, \ldots, \gamma_m^{(k)}),$ $k = 0, \ldots, R-1$;

• $L^{(k)}, k=1,\ldots,\kappa(T)$, — рівень, на якому знаходиться система у момент k-го моделювання тр(ивалості відновлення елемента l-го типу; якщо $s^{(k)}$ — момент початку цього відновлення, то $t_{L^{(k)}} \le s^{(k)} < t_{L^{(k)}+1}$.

2. Якщо $\kappa_l = 0$, то алгоритм завершено і як оцінку вибираємо $\hat{\alpha}_1(\bar{c}) = 0$. Якщо $\kappa_l \ge 1$, то обчислюють $a_l(c_l, w^{(k)}), k=1,\ldots,\kappa_l$, які визначаємо згідно з (15).

3. Обчислюємо

$$A_l(c_l, \bar{w}) = \sum_{k=1}^{\kappa_l} a_l(c_l, w^{(k)}),$$

де $\bar{w} = (w^{(1)}, \ldots, w^{(\kappa_l)})$.

4. Будуємо реалізацію ВВ σ, яка дорівнює $k \in \{1,\ldots,\kappa_l\}$ з імовірністю $a_l(c_l, w^{(k)}) / A_l(c_l, \bar{w})$. Нехай $\sigma = k$.

5. Будуємо реалізацію ВВ $\delta_l(c_l, w^{(k)})$ з ФР $a_l(c_l, u) / a_l(c_l, w^{(k)})$, $u \in [0, w^{(k)}]$.

6. У проміжку $[t_{L^{(k)}}, T]$ згідно з наведеним алгоритмом будуємо траєкторію відмови системи, якщо є відомими: а) стан $\xi_{\bar{c}}(L^{(k)})$ процесу в момент $t_{L^{(k)}}$; б) $m_{L^{(k)}}$ — кількість моделювань часу відновлення елементів l-го типу в інтервалі $(0, t_{L^{(k)}})$; в) $n_{L^{(k)}}$ — кількість рівномірно розподілених ВВ, які було використано в інтервалі $(0, t_{L^{(k)}})$. Час $w^{(k)}$ відновлення елемента l-го типу замінюємо на $\delta_l(c_l, w^{(k)})$ (оскільки використовується) одна й та сама послідовність рівномірно розподілених ВВ, то всі інші ВВ зберігають свої значення). При цьому обчислюємо добуток нормувальних множників $q^*_{L^{(k)}}$, пов'язаний з переходом системи з рівня $L^{(k)}$ на рівень R ($R - L^{(k)}$ множників).

7. Як оцінку вибираємо

$$\hat{\alpha}_l(\bar{c}) = A_l(c_l, \bar{w})\,[p_{L^{(k)}}\, q^*_{L^{(k)}} - \hat{q}_1(\bar{c})].$$

ЧИСЛОВИЙ ПРИКЛАД

Проілюструємо використання запропонованого методу прискореного моделювання градієнта $\nabla q(\bar{c})$ прикладом корабельної енергетичної системи [17, 15]. Система складається з $m=15$ елементів, серед яких три генератори однакової потужності (перший тип: елементи 1, 2, 3), три головних розподільних щити (другий тип: елементи 4, 6, 9), допоміжні елементи (третій тип: елементи 5, 7, 8), шість вторинних розподільних щитів (четвертий тип: елементи 10–15). Метою системи є одночасне забезпечення електроенергією трьох відповідальних споживачів C_1, C_2, C_3 (див. рис. 1, [15]). Потужності одного генератора вистачає для живлення усіх трьох споживачів. Структура системи з погляду надійності визначається множиною M, яка містить 31 мінімальний переріз: M ={(2; 4, 6), (2; 4, 9), (2; 4, 12), (2; 4, 14), (2; 6, 9), (2; 6, 10), (2; 6, 15), (2; 9, 11), (2; 9, 13), (2; 10, 12), (2; 11, 14), (2; 13, 15), (3; 1, 2, 3), (3; 1, 2, 9), (3; 1, 3, 6), (3; 1, 5, 9), (3; 1, 6, 8), (3; 2, 3, 4), (3; 2, 4, 7), (3; 2, 5, 9), (3; 3, 4, 7), (3; 3, 6, 8), (4; 1, 2, 7, 8), (4; 1, 3, 5, 7), (4; 1, 5, 8, 12), (4; 1, 5, 8, 14), (4; 2, 3, 5, 8), (4; 2, 5, 7, 10), (4; 2, 5, 7, 15), (4; 3, 7, 8, 11), (4; 3, 7, 8, 13)}, де перше число вказує кількість елементів у перерізі, а наступні числа є номерами цих елементів.

Припустимо, що тривалості безвідмовної роботи елементів кожного типу і час їхнього відновлення мають розподіл Вейбулла:

$$F_j(x) = 1 - \exp\{-(\varepsilon^{\delta_j} x)^{\beta_j}\},\ G_j(x) = 1 - \exp\{-(c_j\, x)^2\},\ x \ge 0,\ j = 1, 2, 3, 4,$$

де $\varepsilon = 0.5$, $\overline{\delta} = (4, 2, 1, 3)$ і $\overline{\beta} = (1, 3, 4, 2)$. Як початкові значення швидкостей відновлення виберемо $\overline{c} = (50, 50, 50, 50)$.

Припустимо, що система функціонує у проміжку $[0, 1]$, тобто $T = 1$. Усі наведені нижче оцінки побудовано з достовірністю 0.99 та відносною похибкою 1%. Уведемо такі позначення:

$\hat{q}(\overline{c})$ — оцінка ймовірності відмови $q(\overline{c})$;

$\hat{\alpha}_l(\overline{c})$, $l = 1, 2, 3, 4,$ — оцінка для $\dfrac{\partial q(\overline{c})}{\partial c_l}$, побудована методом прискореного моделювання;

$\mu_l(\overline{c}) = \hat{\alpha}_l(\overline{c}) \Big/ \sum\limits_{j=1}^{4} \hat{\alpha}_j(\overline{c})$, $l = 1, 2, 3, 4,$ — оцінка відносного впливу швидкості відновлення елементів l-го типу на ймовірність відмови системи.

Для початкового вектора швидкостей $\overline{c}$ маємо $\hat{q}(\overline{c}) = 1.54 \cdot 10^{-4}$. Потрібно підвищити швидкість відновлення елементів у такий спосіб, щоб $\hat{q}(\overline{c}) \leq 10^{-6}$. Результати обчислень наведено у табл. 1.

Обчислення показали, що всі оцінки $\hat{\alpha}_l(\overline{c})$ є від'ємними величинами, що повністю відповідає очікуванням: із підвищенням швидкості відновлення ймовірність відмови зменшується. Найбільший вплив на $q(\overline{c})$ мають елементи другого та четвертого типу, найменший — елементи третього типу. Заначимо, що ефективність процедури оптимізації можна суттєво підвищити, якщо скористатися методами стохастичного програмування [18, 5].

Таблиця 1. Результати аналізу впливу швидкостей відновлення на ймовірність відмови системи

c_1	c_2	c_3	c_4	$\hat{q}(\overline{c})$	$\mu_1(\overline{c})$	$\mu_2(\overline{c})$	$\mu_3(\overline{c})$	$\mu_4(\overline{c})$
50	50	50	50	$1.54 \cdot 10^{-4}$	0.007	0.536	0.003	0.454
50	100	50	100	$7.88 \cdot 10^{-5}$	0.02	0.53	0.01	0.44
50	200	50	200	$3.96 \cdot 10^{-5}$	0.08	0.48	0.03	0.41
50	400	50	400	$2.01 \cdot 10^{-5}$	0.24	0.38	0.07	0.31
100	800	50	800	$9.91 \cdot 10^{-6}$	0.16	0.38	0.14	0.32
100	1600	50	1600	$5.11 \cdot 10^{-6}$	0.33	0.21	0.29	0.17
200	3200	100	3200	$2.51 \cdot 10^{-6}$	0.24	0.30	0.22	0.24
400	6400	200	6400	$1.24 \cdot 10^{-6}$	0.16	0.38	0.15	0.31
400	8200	200	7700	$9.99 \cdot 10^{-7}$	0.21	0.31	0.19	0.29

ВИСНОВКИ

Для марковського процесу загального вигляду запропоновано метод побудови стохастичного градієнта функціонала від траєкторії процесу за певним масштабувальним параметром. Застосування цього методу для аналізу надійності відновлюваної системи рангової структури продемонструвало його ефективність під час розв'язання задачі пошуку оптимальних значень швидкостей відновлення елементів системи, які забезпечують досягнення потрібної надійності системи в цілому.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Коваленко И.Н. Расчет поправок к характеристикам СМО. Проблемы устойчивости стохастических моделей. Москва: ВНИИСИ, 1986. С. 45–48.
2. Кузнецов Н.Ю. Аналитико-статистический метод построения количественных оценок непрерывности характеристик систем массового обслуживания и резервированных систем. Москва: ВНИИСИ, 1986. С. 54–62.
3. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю. Методы расчета высоконадежных систем. Москва: Радио и связь, 1988. 176 с.

4. Kovalenko I.N., Kuznetsov N.Yu., Pegg Ph.A. Mathematical theory of reliability of time dependent systems with practical applications. Chichester: Wiley, 1997. 303 p.
5. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю., Наконечный А.Н. Оптимизация характеристик надежности систем на основе использования количественных оценок непрерывности и методов ускоренного моделирования. Москва: ВНИИСИ, 1988. С. 79–84.
6. Кузнецов Н.Ю. Об оценке влияния надежности различных групп элементов на надежность всей системы в целом. *Кибернетика и системный анализ.* 1989. Т. 25, № 5. С. 110–119.
7. Glasserman P. Gradient estimation via perturbation analysis. New York: Springer, 1990. 222 p.
8. Glynn P.W. Likelihood ratio gradient estimation for stochastic systems. *Communications of the ACM.* 1990. Vol. 33, N 10. P. 75–84.
9. Fu M.C. Gradient estimation. In: Handbooks in Operations Research and Management Science. Henderson S., Nelson B. (Eds.). Elsevier, 2006. Vol. 13. P. 575–616.
10. Heidergott B., Vazquez-Abad F.J., Pflug G., Farenhorst-Yuan T. Gradient estimation for discrete-event systems by measure-valued differentiation. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation* . 2010. Vol. 20, Iss. 1. P. 1–28.
11. Li J., Mosleh A., Kang R. Likelihood ratio gradient estimation for dynamic reliability applications. *Reliab. Engin. and System Safet*y. 2011. Vol. 96, N 12. P. 1667–1679.
12. Lam H., Li H., Zhang X. Minimax efficient finite-difference gradient estimators. *Proc. 2019 Winter Simulation Conference (WSC'19)* (8-12 December 2019, National Harbor, Maryland, USA). National Harbor, 2019. P. 392–403.
13. Chen G. Unbiased gradient simulation for zeroth-order optimization. *Proc. 2020 Winter Simulation Conference (WSC 2020)* (14-18- December 2020, Orlando, Florida, USA). Orlando, 2020. P. 2947–2959.
14. Кузнецов Н.Ю. Общий подход к нахождению вероятности безотказной работы структурно-сложных систем аналитико-статистическим методом. *Кибернетика* . 1985. Т. 21, № 3. С. 86–94.
15. Кузнєцов М.Ю., Кузнєцов І.М., Шумська А.А. Порівняльний аналіз двох модифікованих методів прискореного моделювання ймовірності відмови системи рангової структури. *Кібернетика та системний аналіз.* 2022. Т. 58, № 5. С. 25–36.
16. Коваленко И.Н. К расчету характеристик высоконадежных систем аналитико-статистическим методом. *Электронное моделирование.* 1980. Т. 2, № 4. С. 5–8.
17. Рябинин И.А., Черкесов Г.Н. Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно сложных систем. Москва: Радио и связь, 1981. 264 с.
18. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. Москва: Наука, 1975. 239 с.

M.Yu. Kuznetsov, I.M. Kuznetsov, A.A. Shumska

EVALUATION OF THE GRADIENT OF THE PROBABILITY OF FAILURE OF A RANK STRUCTURE SYSTEM BY THE FAST SIMULATION METHOD

Abstract. A model of a redundant repairable system of the rank structure is considered. Its time operation is determined by distributions of a general form. In order to evaluate the gradient of the probability of system failure in a given time interval, a fast simulation method is proposed. A numerical example illustrates the application of this method to assess how the repair rates of different components types affect the reliability of the entire system as a whole.

Keywords: reliability, redundant repairable system, rank, simulation with prohibition, gradient, estimate, variance.

Надійшла до редакції 22.05.2022