УДК 519.8

Ю.І. ХАРКЕВИЧ
Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна,
e-mail: *kharkevich.juriy@gmail.com.*

ТОЧНІ ЗНАЧЕННЯ НАБЛИЖЕНЬ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ ІНТЕГРАЛАМИ ТИПУ ПУАССОНА

Анотація. Досліджено асимптотичні властивості інтегралів типу Пуассона на класах диференційовних функцій з використанням сучасних методів теорії оптимальних рішень та теорії апроксимації функцій. Обчислено точні значення верхньої межі відхилення функцій класів Соболєва від інтегралів типу Пуассона в рівномірний метриці. Застосований метод досліджень дає можливість з наперед заданою точністю оцінити похибку відхилення класів диференційовних функцій від їхніх полігармонійних інтегралів Пуассона. Отримано результати, які в подальшому сприятимуть побудові якісніших математичних моделей природничих і соціальних явищ, а отже, і ефективнішому розв'язуванню багатьох задач прикладної математики.

Ключові слова: полігармонійні рівняння, класи Соболєва, оптимізаційні задачі, асимптотичні оцінки, точні значення відхилень.

ВСТУП

Під час розв'язання конкретних задач прикладної математики іноді доводиться виконувати чимало необхідних допоміжних обчислень, що ускладнює цей процес. Очевидно, що в цій ситуації потрібно застосовувати якісь інші методи, що дадуть змогу знаходити бодай наближені розв'язки цієї задачі. Для цього застосовують методи теорії наближення функцій у поєднанні з принципами оптимальності в теорії прийняття рішень.

Так, останнім часом все більше відслідковується взаємозв'язок теорії наближення із задачами варіаційного числення та методів оптимізації, задачами теорії керування, ігровими задачами динаміки [1–3] тощо. В цьому аспекті (ракурсі) актуальною є оцінка похибок наближення одних математичних об'єктів іншими. Отже, цікавим є питання про апроксимацію функцій класів Соболєва операторами, які є розв'язками полігармонійних рівнянь еліптичного типу [4–6] з відповідними граничним умовами. З одного боку, оператори такого типу мають принципове значення для розв'язання задач математичного моделювання [7–11], з іншого, — класи функцій Соболєва за своєю суттю мають важливе значення як у теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, так і в теорії керування, методах обчислень, теорії функцій, теорії оптимальних рішень тощо. З огляду на викладене не підлягає сумніву актуальність розв'язуваної в цій роботі задачі про наближення класів диференційовних функцій Соболєва полігармонійними операторами Пуассона [12].

У більшості випадків під час розв'язання задач такого типу їхній розв'язок зазвичай записують у вигляді так званих асимптотичних оцінок, які не завжди дають можливість якісно оцінити похибку відхилення побудованої математичної моделі від реального досліджуваного процесу.

У цій роботі пропонується метод, який дає змогу отримати не асимптотичні оцінки, а точні значення наближення функцій класів Соболєва полігармонійними операторами. Цей метод надасть змогу з наперед заданою точністю оцінювати похибку відхилення побудованої математичної моделі від реального досліджуваного процесу.

Позначимо C простір неперервних 2π-періодичних функцій, в якому норму елемента зазвичай визначають за допомогою співвідношення

$$||\varphi||_C = \max_z |\varphi(z)|. \tag{1}$$

У [12] були введені інтеграли типу Пуассона

$$P_{s,q}(r;\varphi;\theta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(z+\theta)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(1+sk(1+r)(1-r)^q)\,r^k\cos kz\right\}dz,$$

$$0 \le r < 1,\ s \le 0 \le 1/2,\ q \ge 1. \tag{2}$$

Інтеграли типу (2) є розв'язками полігармонійних рівнянь (у полярних координатах у середині круга $0 \le r < 1$) за відповідних граничних умов.

Для зручності подальших математичних перетворень у формулі (2) аналогічно до [13, 14] покладемо $r = e^{-\frac{1}{\delta}}$, $\delta > 0$. Тоді інтеграл запишемо у вигляді

$$P_{s,q}(r;\varphi;\theta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta+z)\,K_{s,q}(\delta,z)\,dz, \tag{3}$$

де

$$K_{s,q}(\delta,z) = \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+sk(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})^q\right)e^{-\frac{k}{\delta}}\cos kz \tag{4}$$

є його ядром, $\delta > 0,\ 0 \le s \le 1/2,\ q \ge 1$.

Нехай далі $W^l, l \in N$ (див., наприклад, [15]), — множина 2π-періодичних функцій, які мають абсолютно неперервні похідні до $(l-1)$-го порядку включно і майже скрізь $|\varphi^{(l)}(z)| \le 1$. Класи функцій $W^l, l \in N$, називають класами функцій Соболєва.

Наслідуючи О.І. Степанця, позначимо

$$\mathcal{E}(W^l; P_{s,q}(\delta))_C = \sup_{\varphi \in W^l} ||\varphi(\cdot) - P_{s,q}(\delta;\varphi,\cdot)||_C \tag{5}$$

верхню межу відхилення функцій з класу $W^l, l \in N$, від інтеграла типу Пуассона (3) у рівномірній метриці. Якщо в явному вигляді буде знайдена функція $g(\delta)$ така, що для $\delta \to \infty$

$$\mathcal{E}(W^l; P_{s,q}(\delta))_C = g(\delta) + o(g(\delta)),$$

то згідно з [15] кажуть, що розв'язана задача Колмогорова–Нікольського для класу функцій Соболєва W^l і інтеграла типу Пуассона $P_{s,q}(\delta;\varphi;\theta)$, заданого за допомогою співвідношень (3), (4), у метриці простору C.

Перші дослідження апроксимативних властивостей інтегралів типу Пуассона були зроблені М.П. Тіманом [12]. Пізніше його дослідження були продовжені в [16, 17], де розв'язувалась задача Колмогорова–Нікольського для інтегралів типу Пуассона на різних класах періодичних функцій. Що ж до обчислення точних значень для величини (5), то вони досі не знайдені.

Саме тому основною метою запропонованої роботи є отримання точних значень для верхніх меж відхилень функції класу Соболєва $W^l, l \in N$, від інтеграла типу Пуассона в рівномірній метриці.

За прийнятих позначень мають місце твердження.

Теорема 1. Якщо $l=2i+1,\ i\in N$, то для всіх $\delta>0$ для величини (5) буде справедливою точна рівність

$$\mathcal{E}(W^{2i+1};P_{s,q}(\delta))_C=\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{(2j-1)!}\widetilde{K}_{2(i-j+1)}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2j-1}-$$

$$-\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{(2j)!}K_{2(i-j)+1}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2j}+s(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})\times$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{(2j-1)!}K_{2(i-j)+1}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2j-1}-\sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{(2j)!}\widetilde{K}_{2(i-j)}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2j}\right)+$$

$$+\gamma_{\delta}^{2i+1}-s(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})^{q}\gamma_{\delta}^{2i},\tag{6}$$

де

$$\gamma_{\delta}^{n}=\frac{2}{\pi}\int_{e^{-1/\delta}}^{1}\int_{x_1}^{1}\int_{x_2}^{1}\ldots\int_{x_{n-2}}^{1}\int_{x_{n-1}}^{1}\frac{1}{x_1x_2\ldots x_n}\ln\frac{1+x_1}{1-x_1}dx_1dx_2\ldots dx_n,\tag{7}$$

$$K_n=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m(n+1)}}{(2m+1)^{n+1}},\quad n=0,1,2,\ldots,\tag{8}$$

$$\widetilde{K}_n=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{mn}}{(2m+1)^{n+1}},\quad n\in N,\tag{9}$$

є константами Ахієзера–Крейна–Фавара [18].

Доведення. Оскільки згідно з (4) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_{s,q}(\delta,z)=1$ та $K_{s,q}(\delta,z)>0$ (див., наприклад, [19]), із формул (1), (3)–(5) випливає, що

$$\mathcal{E}(W^{l};P_{s,q}(\delta))_C=$$

$$=\sup_{\varphi\in W^l}\max_{-\pi\le z\le\pi}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta+z)\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1+sk(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})^{q}\right)e^{-\frac{k}{\delta}}\right)\cos kzdz\right|.\tag{10}$$

Використовуючи методи з [20], із (10) отримуємо

$$\mathcal{E}(W^{l};P_{s,q}(\delta))_C=$$

$$=\sup_{\varphi\in W^l}\max_{-\pi\le z\le\pi}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi^{l}(\theta+z)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{l}}\left(1-\left(1+sk(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})^{q}\right)\right)\right.\times$$

$$\times\cos\left(kz+\frac{l\pi}{2}\right)dz\ \Bigg| = \frac{2}{\pi}\Bigg|\int_0^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^l}\left(1-\left(1+sk(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})^q\right)\right)\times$$

$$\times\cos\left(kz+\frac{l\pi}{2}\right)dz\ \Bigg| =$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(l+1)}}{(2k+1)^{l+1}}\left(1-\left(1+s(2k+1)(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})^q\right)\right)e^{-\frac{2k+1}{\delta}}. \qquad (11)$$

Тоді з (11) для $l=2i+1,\ i\in N,$ випливає

$$\mathcal{E}(W^{2i+1};P_{s,q}(\delta))_C =$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^{2i+2}}+\frac{4}{\pi}s(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})^q\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^{2i+1}}-$$

$$-\frac{4}{\pi}s(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})^q\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{2i+1}}. \qquad (12)$$

Якщо покласти

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^{n+1}}=\xi_n\left(\frac{1}{\delta}\right), \qquad (13)$$

то із (12) отримаємо

$$\mathcal{E}(W^{2i+1};P_{s,q}(\delta))_C=\xi_{2i+1}\left(\frac{1}{\delta}\right)+s(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})^q\left(\xi_{2i}\left(\frac{1}{\delta}\right)-\xi_{2i}(0)\right). \qquad (14)$$

Аналогічно до [21] легко показати, що

$$\xi_n\left(\frac{1}{\delta}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\xi_{n-k}(0)\left(\frac{1}{\delta}\right)^k+\gamma_\delta^n, \qquad (15)$$

де γ_δ^n визначена за допомогою співвідношення (7).

Тоді з використанням (14) і (15) матимемо

$$\mathcal{E}(W^{2i+1};P_{s,q}(\delta))_C =$$

$$=\sum_{k=1}^{2i}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\xi_{2i-k+1}(0)\left(\frac{1}{\delta}\right)^k+\gamma_\delta^{2i+1}+s(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})^q\times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{2i-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\xi_{2i-k}(0)\left(\frac{1}{\delta}\right)^k-\xi_{2i}(0)-\gamma_\delta^{2i}\right)=\sum_{k=1}^{2i}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\xi_{2i-k+1}(0)\left(\frac{1}{\delta}\right)^k+$$

$$+s(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})^q\sum_{k=0}^{2i-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\xi_{2i-k}(0)\left(\frac{1}{\delta}\right)^k+\gamma_\delta^{2i+1}-$$

$$-s(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})^q\gamma_\delta^{2i}=\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{(2j-1)!}\xi_{2(i-j+1)}(0)\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2j-1}-$$

$$-\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{(2j)!}\xi_{2(i-j)+1}(0)\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2j}+s(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})^q\times$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{(2j-1)!}\xi_{2(i-j)+1}(0)\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2j-1}-\sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{(2j)!}\xi_{2(i-j)}(0)\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2j}\right)+$$

$$+\gamma_\delta^{2i+1}-s(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})^q\gamma_\delta^{2i}. \tag{16}$$

Повертаючись до констант Ахієзера–Крейна–Фавара (8) і (9), із (13) будемо мати

$$\xi_n(0)=\begin{cases}K_n, & n=2i-1,\\ \widetilde{K}_n, & n=2i.\end{cases} \tag{17}$$

І насамкінець, застосувавши співвідношення (17) до правої частини (16), отримаємо рівність (6). Теорему 1 доведено.

Зауваження до теореми 1. Зазначимо, що рівність (6) не містить випадку для $i=0$ (тобто з рівності (6) не випливає результат для класу Соболєва W^1). Річ у тім, що цей випадок був раніше розглянутий у [19, теорема 1].

Теорема 2. Якщо $l=2i,\ i\in N$, то для всіх $\delta>0$ для величини (5) буде справедлива точна рівність

$$\mathcal{E}(W^{2i};P_{s,q}(\delta))_C=$$

$$\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{(2j-1)!}\widetilde{K}_{2(i-j)+1}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2j-1}-\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{(2j)!}K_{2(i-j)}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2j}+s(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})^q\times$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{(2j-1)!}K_{2(i-j)}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2j-1}-\sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{(2j)!}\widetilde{K}_{2(i-j)-1}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2j}\right)-$$

$$-\zeta_\delta^{2i}+s(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})^q\zeta_\delta^{2i-1}, \tag{18}$$

де

$$\zeta_\delta^n=\frac{4}{\pi}\int_{e^{-1/\delta}}^{1}\int_{x_1}^{1}\int_{x_2}^{1}\ldots\int_{x_{n-2}}^{1}\int_{x_{n-1}}^{1}\frac{1}{x_1x_2\ldots x_n}\ \text{arctg}\,x_1dx_1dx_2\ldots dx_n, \tag{19}$$

а K_n та $\widetilde{K}_n$ — константи Ахієзера–Крейна–Фавара, задані за допомогою співвідношень (8) і (9) відповідно.

Доведення. Для випадку $l=2i,\ i\in N$, аналогічно до доведення рівності (12) можна показати, що

$$\mathcal{E}(W^{2i};P_{s,q}(\delta))_C=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1-e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^{2i+1}}+\frac{4s}{\pi}(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})^q\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1-e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^{2i}}-$$

$$-\frac{4s}{\pi}(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})^q\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2i}}. \tag{20}$$

Якщо покласти

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{1-e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^{n+1}}=\tau_n\left(\frac{1}{\delta}\right),\quad n\ge 1,\tag{21}$$

то із (20) отримаємо рівність

$$\mathcal{E}(W^{2i};P_{s,q}(\delta))_C=\tau_{2i}\left(\frac{1}{\delta}\right)+s(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})^q\left(\tau_{2i-1}\left(\frac{1}{\delta}\right)-\tau_{2i-1}(0)\right).\tag{22}$$

Для подальших перетворень правої частини (22) розглянемо величину

$$\frac{4}{\pi}\int_{e^{-1/\delta}}^{1}\int_0^{x_n}\dots\int_0^{x_2}\frac{\operatorname{arctg}x_1}{x_1x_2\dots x_n}dx_1dx_2\dots dx_n=$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_{e^{-1/\delta}}^{1}\int_0^{x_n}\dots\int_0^{x_2}\frac{1}{x_1x_2\dots x_n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x_1^{2k+1}}{2k+1}dx_1dx_2\dots dx_n=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_{e^{-1/\delta}}^{1}\int_0^{x_n}\dots\int_0^{x_3}\frac{1}{x_1x_2\dots x_n}\,\frac{x_2^{2k+1}}{(2k+1)^2}dx_2dx_3\dots dx_n=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_{e^{-1/\delta}}^{1}\int_0^{x_n}\dots\int_0^{x_4}\frac{1}{x_3x_4\dots x_n}\,\frac{x_3^{2k+1}}{(2k+1)^3}dx_3dx_4\dots dx_n=\dots=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_{e^{-1/\delta}}^{1}\frac{1}{x_n}\frac{x_n^{2k+1}}{(2k+1)^n}dx_n=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left.\frac{x_n^{2k+1}}{(2k+1)^{n+1}}\right|_{e^{-1/\delta}}^{1}=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{1-e^{-\frac{2k+1}{\delta}}}{(2k+1)^{n+1}}.\tag{23}$$

Таким чином, беручи до уваги співвідношення (23) і (21), приходимо до висновку, що

$$\tau_n\left(\frac{1}{\delta}\right)=\frac{4}{\pi}\int_{e^{-1/\delta}}^{1}\int_0^{x_n}\dots\int_0^{x_2}\frac{\operatorname{arctg}x_1}{x_1x_2\dots x_n}dx_1dx_2\dots dx_n.\tag{24}$$

Далі, зробивши деякі перетворення для функції $\tau_n\left(\frac{1}{\delta}\right)$, заданої за допомогою співвідношення (24), будемо мати, що для всіх $n>1$

$$\tau_n\left(\frac{1}{\delta}\right)=\frac{4}{\pi}\int_{e^{-1/\delta}}^{1}\int_0^{1}\int_0^{x_{n-1}}\dots\int_0^{x_2}\frac{1}{x_1x_2\dots x_n}\operatorname{arctg}x_1dx_1dx_2\dots dx_{n-1}dx_n-$$

$$-\frac{4}{\pi}\int_{e^{-1/\delta}}^{1}\int_{x_n}^{1}\int_0^{x_{n-1}}\dots\int_0^{x_2}\frac{1}{x_1x_2\dots x_n}\operatorname{arctg}x_1dx_1dx_2\dots dx_{n-1}dx_n=$$

$$=\tau_{n-1}(0)\int_{e^{-1/\delta}}^{1}\frac{1}{x_n}dx_n-\int_{e^{-1/\delta}}^{1}\frac{1}{x_n}\tau_{n-1}(x_n)\,dx_n.\tag{25}$$

Отримана таким чином рекурентна формула (25) може бути записана у вигляді

$$\tau_n\left(\frac{1}{\delta}\right)=\tau_{n-1}(0)\int\limits_{e^{-1/\delta}}^{1}\frac{dx_1}{x_1}-\int\limits_{e^{-1/\delta}}^{1}\frac{1}{x_1}\left(\tau_{n-2}(0)\int\limits_{x_1}^{1}\frac{dx_2}{x_2}-\int\limits_{x_1}^{1}\frac{1}{x_2}\tau_{n-2}(x_2)dx_2\right)=$$

$$=\tau_{n-1}(0)\int\limits_{e^{-1/\delta}}^{1}\frac{dx_1}{x_1}-\tau_{n-2}(0)\int\limits_{e^{-1/\delta}}^{1}\int\limits_{x_1}^{1}\frac{dx_2dx_1}{x_2x_1}+\int\limits_{e^{-1/\delta}}^{1}\int\limits_{x_1}^{1}\frac{1}{x_1x_2}\tau_{n-2}(x_2)\,dx_1dx_2=\ldots$$

$$\ldots=\tau_{n-1}(0)\frac{1}{\delta}-\tau_{n-2}(0)\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{\delta}\right)^2+\tau_{n-3}(0)\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{\delta}\right)^3-\ldots+(-1)^{n-1}\times$$

$$\times\int\limits_{e^{-1/\delta}}^{1}\int\limits_{x_1}^{1}\int\limits_{x_2}^{1}\ldots\int\limits_{x_{n-2}}^{1}\frac{1}{x_1x_2\ldots x_{n-1}}\tau_1(x_{n-1})dx_1\ldots dx_{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\tau_{n-k}(0)\left(\frac{1}{\delta}\right)^k+$$

$$+4\pi(-1)^{n-1}\int\limits_{e^{-1/\delta}}^{1}\int\limits_{x_1}^{1}\int\limits_{x_2}^{1}\ldots\int\limits_{x_{n-1}}^{1}\frac{\operatorname{arctg}x_1}{x_1x_2\ldots x_n}dx_1dx_2\ldots dx_n. \qquad (26)$$

Застосувавши до другого доданка правої частини (26) позначення (21) і (19), матимемо

$$\tau_n\left(\frac{1}{\delta}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\tau_{n-k}(0)\left(\frac{1}{\delta}\right)^k+(-1)^{n-1}\zeta_\delta^n. \qquad (27)$$

Переходячи до кінцевої фази доведення теореми, із співвідношень (22) і (27) отримуємо

$$\mathcal{E}(W^{2i};P_{s,q}(\delta))_C=$$

$$=\sum_{k=1}^{2i-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\tau_{2i-k}(0)\left(\frac{1}{\delta}\right)^k-\zeta_\delta^{2i}+s(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})^q\times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{2i-2}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\tau_{2i-k-1}(0)\left(\frac{1}{\delta}\right)^k-\zeta_\delta^{2i}-\tau_{2i-1}(0)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{2i-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\tau_{2i-k}(0)\left(\frac{1}{\delta}\right)^k+s(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})^q\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{2i-2}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\tau_{2i-k-1}(0)\left(\frac{1}{\delta}\right)^k-\zeta_\delta^{2i}+s(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})^q\zeta_\delta^{2i-1}=$$

$$=\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{(2j-1)!}\tau_{2(i-j)+1}(0)\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2j-1}-\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{(2j)!}\tau_{2(i-j)}(0)\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2j}+$$

$$+s(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})^q\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{(2j-1)!}\tau_{2(i-j)}(0)\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2j-1}-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{(2j)!}\tau_{2(i-j)-1}(0)\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2j}\right)-\zeta_\delta^{2i}+s(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})^q\zeta_\delta^{2i-1}. \qquad (28)$$

Насамкінець, із правої частини (28) за використання позначень (8), (9) і з урахуванням, що

$$\tau_n(0) = \begin{cases} K_n, & n = 2i, \\ \widetilde{K}_n, & n = 2i+1, \end{cases} \qquad i \in N, \tag{29}$$

маємо справедливість рівності (18). Теорему 2 доведено.

Наслідок 1. Очевидно, що для $s = 0$ інтеграл $P_{s,q}(\delta;\varphi;\theta)$, який був заданий за допомогою співвідношень (3) і (4), перетворюється в інтеграл Абеля–Пуассона [22, 23] або Пуассона [24]. Тому з теорем 1 та 2 для $s = 0$ випливають раніше отримані в [25] результати.

Наслідок 2. Оскільки для $s = 1$ та $q = 1/2$ заданий за допомогою співвідношень (3) та (4), інтеграл $P_{s,q}(\delta;\varphi;\theta)$ перетворюється в бігармонійний інтеграл Пуассона [26], з доведених теорем 1 та 2 випливають результати, отримані в [27].

ВИСНОВКИ

У процесі наведених у роботі досліджень були отримані апроксимативні властивості інтегралів типу Пуассона на класах функцій Соболєва в рівномірній метриці. Доведені в роботі теореми дають можливість записати точні значення наближення диференційовних функцій $W^l, l \in N$, полігармонійними інтегралами Пуассона. Оскільки інтеграл типу Пуассона (інтеграли з так званими дельта-подібними ядрами [28–30]) є розв'язками полігармонійних рівнянь з відповідними граничними умовами, а класи функцій Соболєва мають важливе значення для розв'язування різних оптимізаційних задач [31–33], то отримані результати в подальшому сприятимуть розвитку сучасної прикладної математики.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Chikrii A.A., Chikrii G.Ts. Matrix resolving functions in game problems of dynamics. *Proc. of the Steklov Institute of Mathematics.* 2015. Vol. 291. P. 56–65. https://doi.org/10.1134/S0081543815090047.
2. Chikrii A.A., Matychyn I.I. Game problems for fractional-order linear systems. *Proc. of the Steklov Institute of Mathematics.* 2010. Vol. 268. P. 54–70. https://doi.org/10.1134/S0081543810050056.
3. Chikrii A.A., Eidelman S.D. Game problems of control for quasilinear systems with fractional Riemann–Liouville derivatives. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2001. Vol. 37, N 6. P. 836–864. https://doi.org/10.1023/A:1014529914874.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. 4-е изд. Москва: Наука, 1981. 512 с.
5. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by triharmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. J.* 2001. Vol. 53, N 6. P. 1012–1018. https://doi.org/10.1023/A:1013364321249.
6. Kal'chuk I.V. Hrabova U.Z., Filozof L.I. Approximation of the classes $W_\beta^r H^\alpha$ by three-harmonic Poisson integrals. *J. Math. Sci. (N.Y.).* 2021. Vol. 254, N 3. P. 397–405. https://doi.org/10.1007/s10958-021-05311-8.
7. Bushev D.N., Kharkevich Y.I. Finding solution subspaces of the Laplace and heat equations isometric to spaces of real functions, and some of their applications. *Math. Notes.* 2018. Vol. 103, N 5–6. P. 869–880. https://doi.org/10.1134/S0001434618050231.

8. Pilipenko Yu.V., Chikrii A.A. The oscillation processes of conflict control. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika.* 1993. Vol. 57, N 3. P. 3–14.

9. Chikrii A.A., Rappoport I.S. Method of resolving functions in the theory of conflict-controlled processes. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2012. Vol. 48, N 4. P. 512–531. https://doi.org/10.1007/s10559-012-9430-y.

10. Kharkevych Yu.I. On some asymptotic properties of solutions to biharmonic equations. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2022. Vol. 58, N 2. P. 251–258. https://doi.org/10.1007/s10559-022-00457-y.

11. Chikrii A.A., Prokopovich P.V. Simple pursuit of one evader by a group. *Cybernetics and Systems Analysis.* 1992. Vol. 28, N 3. P. 438–444. https://doi.org/10.1007/BF01125424.

12. Тиман М.Ф. Аппроксимация и свойства периодических функций. Киев: Наук. думка, 2009. 375 с.

13. Kal'chuk I., Kharkevych Y. Approximation properties of the generalized Abel–Poisson integrals on the weyl-nagy classes. *Axioms.* 2022. Vol. 11, N 4. P. 161. https://doi.org/10.3390/axioms11040161.

14. Abdullayev F.G., Kharkevych Yu.I. Approximation of the classes $C_{\beta}^{\psi}H^{\alpha}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. J.* 2020. Vol. 72, N 1. P. 21–38. https://doi.org/10.1007/s11253-020-01761-6.

15. Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций. Киев: Наук. думка, 1987. 268 с.

16. Kharkevych Yu.I. On approximation of the quasi-smooth functions by their Poisson type integrals. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2017. Vol. 49, N 10. P. 74–81. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v49.i10.80.

17. Kharkevych Yu.I. Approximative properties of the generalized Poisson integrals on the classes of functions determined by a modulus of continuity. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2019. Vol. 51, N 4. P. 43–54. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i4.40.

18. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. Vol. 54, N 1. P. 51–63. https://doi.org/10.1023/A:1019789402502.

19. Kharkevych Yu.I. Asymptotic expansions of upper bounds of deviations of functions of class W^r from their generalized Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. Vol. 50, N 8. P. 38–49. https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v50.i8.40.

20. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu. . Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. Vol. 54, N 9. P. 1462–1470. https://doi.org/10.1023/A:1023463801914.

21. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. Vol. 61, N 3. P. 399–413. https://doi.org/10.1007/s11253-009-0217-x.

22. Kal'chuk I.V., Kharkevych Y.I. Approximation of the classes $W_{\beta,\infty}^{r}$ by generalized Abel–Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2022. Vol. 74, N 9. P. 575–585. https://doi.org/10.1007/s11253-022-02084-4.

23. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. On approximation of functions from the class $L_{\beta,1}^{\psi}$ by the Abel–Poisson integrals in the integral metric. *Carpathian Math. Publ.* 2022. Vol. 14, N 1. P. 223–229. https://doi.org/10.15330/cmp.14.1.223-229.

24. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of functions by conjugate Poisson integrals. *Carpathian Math. Publ.* 2020. Vol. 12, N 1. P. 138–147. https://doi.org/10.15330/cmp.12.1.138-147.

25. Тиман А.Ф. Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона. *Докл. АН СССР.* 1950. Т. 74, № 1. С. 17–20.

26. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Holder class by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2000. Vol. 52, N 7. P. 1113–1117. https://doi.org/10.1023/A:1005285818550.

27. Каниев С. Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений. *Докл. АН СССР.* 1963. Т. 153, № 5. С. 995–998.

28. Bushev D.M., Kharkevych Y.I. Conditions of convergence almost everywhere for the convolution of a function with delta-shaped kernel to this function. *Ukrainian Math. J.* 2016. Vol. 67, N 11. P. 1643–1661. https://doi.org/10.1007/s11253-016-1180-y.

29. Kal'chuk I.V. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions defined on the real axis by Weierstrass operators. *Ukrainian Math. J.* 2007. Vol. 59, N 9. P. 1342–1363. https://doi.org/10.1007/s11253-007-0091-3.

30. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions from the class $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson biharmonic operators in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2008. Vol. 60, N 5. P. 769–798. https://doi.org/10.1007/s11253-008-0093-9.

31. Chikrii A.A., Matichin I.I. Riemann–Liouville, Caputo, and sequential fractional derivatives in differential games. Breton M., Szajowski K. (Eds.). *Advances in Dynamic Games. Annals of the International Society of Dynamic Games.* Boston: Birkhäuser, 2011. Vol. 11. P. 61–81. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8089-3_4.

32. Chikrii A.A., Eidel'man S.D. Generalized Mittag-Leffler matrix functions in game problems for evolution equations of fractional order. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2000. Vol. 36, N 3. P. 315–338. https://doi.org/10.1007/BF02732983.

33. Albus J., Meystel A., Chikrii A.A., Belousov A.A., Kozlov A.I. Analytical method for solution of the game problem of soft landing for moving objects. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2001. Vol. 37, N 1. P. 75–91. https://doi.org/10.1023/A:1016620201241.

Yu.I. Kharkevych

EXACT VALUES OF THE APPROXIMATIONS OF DIFFERENTIABLE FUNCTIONS BY INTEGRALS OF THE POISSON TYPE

Abstract. The asymptotic properties of integrals of the Poisson type on the classes of differentiable functions are analyzed with the use of modern methods of the theory of optimal solutions and the theory of approximation of functions. Namely, the exact values of the upper bound of the deviation of the functions of the Sobolev classes from integrals of the Poisson type in the uniform metric are found. The research method used in the study makes it possible to estimate the deviation error of the classes of differentiable functions from their polyharmonic Poisson integrals with predetermined accuracy. The results obtained in the study will further contribute to the construction of higher-quality mathematical models of natural and social phenomena and therefore to more efficient solution of many problems of applied mathematics.

Keywords: polyharmonic equations, the Sobolev classes, optimization problems, asymptotic estimates, exact values of deviations.

Надійшла до редакції 03.10.2022