УДК 519.6

В.А. СТОЯН
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *v_a_stoyan@ukr.net*.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВО-РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМ, ПОЛІНОМІАЛЬНО ЗАЛЕЖНИХ ВІД ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУНКЦІЇ СТАНУ

Анотація. Поставлено і за середньоквадратичним критерієм розв'язано початково-крайові задачі динаміки нелінійних просторово-розподілених систем. Розглянуто системи, лінійна математична модель яких доповнена поліноміально визначеною залежністю від диференціальних перетворень їхньої функції стану. Будуються аналітичні залежності цієї функції за наявності дискретно і неперервно визначених початково-крайових спостережень за ними без обмежень на кількість та якість останніх. Оцінено точність множин отриманих розв'язків та досліджено їхню однозначність.

Ключові слова: нелінійні динамічні системи, системи з невизначеностями, системи з розподіленими параметрами, просторово-розподілені системи, псевдорозв'язки, некоректні початково-крайові задачі.

ВСТУП

Ця наукова робота є продовженням досліджень автора, анонсованого в [1] та опублікованого в [2–4], стосовно таких складних [5] і практично потрібних [6] нелінійних динамічних просторово-розподілених систем, які функціонують в умовах невизначеності за кількістю та якістю початково-крайових спостережень за ними. З цих причин задачі побудови функції стану таких систем є надзвичайно складною проблемою і методами аналітичної та обчислювальної математики розв'язаними бути не можуть.

У розвиток викладених в [4] наукових результатів стосовно дослідження стану мультиплікативно нелінійних систем будуватимемо функції стану просторово-розподілених динамічних систем, математичні моделі функціонування яких описуються лінійними диференціальними рівняннями, доповненими нелінійностями, визначеними в [4].

Для розв'язання початково-крайових задач динаміки розглядуваних систем в обмежених просторово-часових областях згідно з [1,7] запропоноване математичне моделювання дискретно та неперервно спостережливого гранично-початкового стану системи відповідно до інтегрального еквіваленту її диференціальної моделі, побудованого в [8] за середньоквадратичним критерієм. З використанням методик, запропонованих в [9] щодо псевдообернення лінійних алгебраїчних, інтегральних і функціональних перетворень, буде побудовано та досліджено за точністю та однозначністю множини функцій і векторів, якими моделюються спостереження за системою, а з їхнім використанням — і множини псевдорозв'язків відповідних початково-крайових задач.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ОСОБЛИВОСТІ ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Поширимо викладені в [4] математичні результати моделювання мультиплікативних нелінійних динамічних систем за їхнім узагальненням — нелінійні системи, математична модель яких є лінійною комбінацією лінійних диференціальних перетворень функції стану $y(s)$. Динаміку таких систем у необмеженій просторовій області розглянуто нами в [8]. При цьому вважатимемо, що

$$L_1^{(1)}(\partial_s)\,y(s)+\sum_{i=2}^{N}\prod_{j=1}^{i}L_j^{(i)}(\partial_s)\,y(s)=u(s). \tag{1}$$

У роботі [8] побудовано псевдообернення системи (1) для деяких окремих випадків стосовно визначення функції стану $y(s)$ та розподіленого зовнішньо-динамічного збурення $u(s)$, яке цей стан супроводжує. Зокрема, розглядалися випадки неперервного та дискретного визначення функції $u(s)$. Задача побудови середньоквадратичного наближення до функції $y(s)$ для неперервно визначеного $u(s)$ виявилася складною і була розв'язана для випадку $N=2$. При цьому

$$y(s) = y^{(1)}(s) + y^{(2)}(s), \tag{2}$$

де

$$y^{(1)}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1^{(1)}(s-s')u_1^{(1)}(s')ds', \tag{3}$$

$$y^{(2)}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_j^{(2)}(s-s')u_j^{(2)}(s')ds' \tag{4}$$

для оптимально за точністю псевдообернення визначеному $j \in \{1, 2\}$, передаточних функцій $G_j^{(i)}(s-s')$ $(j=\overline{1,i},\ i=\overline{1,N})$, які є функціями Гріна (у необмеженій просторово-часовій області) для систем

$$L_j^{(i)}(\partial_s)\, y(s) = u_j^{(i)}(s)$$

та функцій $u_i^{(j)}(s)$ $(j=\overline{1,i},\ i=\overline{1,N})$, які нелінійно визначаються через функцію $u(s)$ розподілених просторово-часових збурень системи (1). За дискретно (у точках $s'_m \in R^{\nu+1}$ $(m=\overline{1,M})$) визначеної функції $u(s)$ для довільного порядку нелінійності N через вектор

$$\bar{u} = \mathrm{col}(u(s'_m),\ m=\overline{1,M}) \tag{5}$$

побудовано залежності функції стану $y(s)$ та вектора

$$\bar{y} = \mathrm{col}(y(s_l),\ l=\overline{1,L}) \tag{6}$$

її значень від нелінійних перетворень $u_i^{(j)}$ $(j=\overline{1,i},\ i=\overline{1,N})$ вектора $\bar{u}$ значень зовнішньо-динамічного збурювального фактора $u(s)$. За оптимальною точністю псевдообернення системи (1) визначених значеннях індексів $j \in \{1, \dots, i\}$ та $j_k \in \{1, \dots, i\}$ $(i=\overline{1,N})$ залежності ці мали вигляд

$$\bar{y} = \sum_{k=1}^{N} A_{j_k}^{(k)} \bar{u}_{j_k}^{(k)} \quad (j_k = \overline{1,i};\ k=\overline{1,N}) \tag{7}$$

та

$$y(s) = \sum_{k=1}^{N} \overline{G}_{j_k}^{(k)} \bar{u}_{j_k}^{(k)}. \tag{8}$$

Тут, аналогічно наведеному в [4],

$$A_j^{(i)} = \| G_j^{(i)}(s_l - s'_m) \sqrt[i]{(\Delta s'_m)^{i-1}} \|_{l,m=1}^{l=L,m=M}, \tag{9}$$

$$\overline{G}_j^{(i)}(s) = \mathrm{str}(G_j^{(i)}(s_l - s'_m) \sqrt[i]{(\Delta s'_m)^{i-1}},\ m=\overline{1,M}), \tag{10}$$

де $\Delta s'_m$ — крок дискретизації функції $u(s)$.

З використанням результатів (2), (7), (8) псевдообернення системи (1) в необмеженій просторово-часовій області, як і в [4], побудуємо функцію $y(s)$ (або вектор $\bar{y}$ її значень) стану системи (1) в обмеженій просторово-часовій області S_0^T. Початково-крайовий стан досліджуваної системи визначатимемо неперервно та дискретно заданими спостереженнями:

$$L_r^0(\partial_t)\, y(s)|_{t=0} = Y_r^0(x) \quad (x \in S_0,\ r = \overline{1, R_0}), \tag{11}$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_t)\, y(s)|_{x=x^\Gamma \in \Gamma} = Y_\rho^\Gamma(x^\Gamma, t) \quad (t \in [0, T],\ \rho = \overline{1, R_\Gamma}), \tag{12}$$

$$L_r^0(\partial_t)\, y(s)|_{\substack{t=0 \\ x=x_0^l}} = Y_{rl}^0 \quad (x_l^0 \in S_0,\ l = \overline{1, L_0},\ r = \overline{1, R_0}), \tag{13}$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_t)\, y(s)|_{s=s_l^\Gamma} = Y_{\rho l}^\Gamma \quad (s_l^\Gamma \in \Gamma \times [0, T],\ l = \overline{1, L_\Gamma},\ \rho = \overline{1, R_\Gamma}). \tag{14}$$

Як і вище, для розв'язання задач (1), (11), (12) та (1), (13), (14) будемо виходити з умов середньоквадратичного виконання спостережень (11), (12) та (13), (14) відповідно. Вплив визначених цими умовами початково-крайових зовнішньо-динамічних збурювальних факторів $Y_r^0(x)$ $(x \in S_0,\ r = \overline{1, R_0})$ та $Y_\rho^\Gamma(x, t)$ $(x \in \Gamma,\ t \in [0, T],\ \rho = \overline{1, R_\Gamma})$ будемо моделювати нелінійно (аналогічно $\bar{u}_i^{(j)}$ $(j = \overline{1, i},\ i = \overline{1, N})$ та $\bar{u}_{j_k}^{(k)}$ $(j_k \in \{1, \ldots, i\},\ i = \overline{1, N})$) перетвореними дискретно визначеними за межами області S_0^T моделювальними факторами. Для цього використаємо співвідношення (8) (для довільного N) та (2) (для $N = 2$). Зауважимо, що за наявності залежностей (2), (7) та (8) моделювання дискретно визначених початково-крайових збурювальних факторів Y_{rl}^0 $(l = \overline{1, L_0},\ r = \overline{1, R_0})$ та $Y_{\rho l}^\Gamma$ $(l = \overline{1, L_\Gamma},\ \rho = \overline{1, R_\Gamma})$ можна виконувати нелінійно перетвореними як дискретно (співвідношення (7), (8)), так і неперервно (співвідношення (2)) визначеними зовнішньо-динамічними факторами.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕПЕРЕРВНО ВИЗНАЧЕНИХ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ УМОВ

Розглянемо задачу побудови функції стану $y(s)$ системи (1) за умов середньоквадратичного виконання початково-крайових спостережень (11), (12), тобто згідно з критерієм

$$\Phi_1 = \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} (L_r^0(\partial_t)\, y(s)\Big|_{t=0} - Y_r^0)^2 dx + \\ + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{\Gamma \times [0, T]} (L_\rho^\Gamma(\partial_t)\, y(s) - Y_\rho^\Gamma(s))^2 ds \to \min_{y(s)}. \tag{15}$$

За наявності початково-крайових зовнішньо-динамічних збурень (11), (12), як і вище, розшукувану згідно з (13) функцію стану $y(s)$ розглядуваної системи подамо сумою

$$y(s) = \bar{y}_\infty(s) + \bar{y}_0(s) + \bar{y}_\Gamma(s), \tag{16}$$

складові якої відповідно до розв'язку (8) системи (1) визначимо співвідношеннями

$$\bar{y}_{\infty}(s) = \sum_{k=1}^{N} \bar{G}_{j_k}^{(k)}(s) \bar{u}_{j_k}^{(k)}, \tag{17}$$

$$\bar{y}_0(s) = \sum_{k=1}^{N} \bar{G}_{j_k 0}^{(k)}(s) \bar{u}_{j_k 0}^{(k)}, \tag{18}$$

$$\bar{y}_{\Gamma}(s) = \sum_{k=1}^{N} \bar{G}_{j_k \Gamma}^{(k)}(s) \bar{u}_{j_k \Gamma}^{(k)}. \tag{19}$$

Тут, як і вище, для визначеного згідно з [8] значення індекса $j_k \in \{1, \ldots, k\}$ маємо $\bar{u}_{j_k}^{(k)}$— вектор значень нелінійно перетвореної функції $u(s)$ $(s \in S_0^T)$ розподіленого зовнішньо-динамічного збурення, $\bar{u}_{j_k 0}^{(k)}$ та $\bar{u}_{j_k \Gamma}^{(k)}$ — вектори значень за цим же нелінійним законом перетворених моделювальних функцій $u_0(s)$ $(s \in S^0 = S_0 \times (-\infty, 0])$ та $u_{\Gamma}(s)$ $(s \in S^{\Gamma} = (R^{\nu} \setminus S_0) \times [0, T])$. Вибираючи для визначення значень цих функцій точки $\sigma_m^0 \in S^0$ $(m = \overline{1, M_0})$ та $\sigma_m^{\Gamma} \in S^{\Gamma}$ $(m = \overline{1, M_{\Gamma}})$, за аналогією з визначенням (10) функції $\bar{G}_{j_k}^{(k)}(s)$ та отримуємо передаточні функції $\bar{G}_{j_k 0}^{(k)}(s)$ та $\bar{G}_{j_k \Gamma}^{(k)}(s)$ співвідношеннями

$$\bar{G}_{j_k 0}^{(k)}(s) = \mathrm{str}(G_{j_k}^{(k)}(s - \sigma_m^0) \sqrt[k]{(\Delta s_m^0)^{k-1}}, \ m = \overline{1, M_0}),$$

$$\bar{G}_{j_k \Gamma}^{(k)}(s) = \mathrm{str}(G_{j_k}^{(k)}(s - \sigma_m^{\Gamma}) \sqrt[k]{(\Delta s_m^{\Gamma})^{k-1}}, \ m = \overline{1, M_{\Gamma}}),$$

де Δs_m^0 $(m = \overline{1, M_0})$ та Δs_m^{Γ} $(m = \overline{1, M_{\Gamma}})$ — кроки дискретизації моделювальних функцій $u_0(s)$ та $u_{\Gamma}(s)$ точками σ_m^0 $(m = \overline{1, M_0})$ та σ_m^{Γ} $(m = \overline{1, M_{\Gamma}})$ відповідно.

Для визначення моделювальних векторів $\bar{u}_{j_k 0}^{(k)}$, $\bar{u}_{j_k \Gamma}^{(k)}$ $(j_k \in \{1, \ldots, k\}, \ k = \overline{1, N})$ співвідношення (16) з урахуванням (17)–(19) підставимо у (11), (12), у результаті отримаємо

$$\sum_{k=1}^{N} L_r^0(\partial_t) \bar{G}_{j_k 0}^{(k)}(s)|_{t=0} \, \bar{u}_{j_k 0}^{(k)} + \sum_{k=1}^{N} L_r^0(\partial_t) \bar{G}_{j_k \Gamma}^{(k)}(s)|_{t=0} \, \bar{u}_{j_k \Gamma}^{(k)} = \bar{Y}_r^0(x) \tag{20}$$

$$(x \in S_0, \ r = \overline{1, R_0}),$$

$$\sum_{k=1}^{N} L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_x) \bar{G}_{j_k 0}^{(k)}(s)|_{x \in \Gamma} \, \bar{u}_{j_k 0}^{(k)} + \sum_{k=1}^{N} L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_x) \bar{G}_{j_k \Gamma}^{(k)}(s)|_{x \in \Gamma} \, \bar{u}_{j_k \Gamma}^{(k)} = \bar{Y}_{\rho}^{\Gamma}(s) \tag{21}$$

$$(s \in \Gamma \times [0, T], \ \rho = \overline{1, R_{\Gamma}}),$$

де

$$\bar{Y}_r^0(x) = Y_r^0(x) - L_r^0(\partial_t) y_{\infty}(s)|_{t=0},$$

$$\bar{Y}_{\rho}^{\Gamma}(s) = Y_{\rho}^{\Gamma}(s) - L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_x) y_{\infty}(s)|_{x \in \Gamma}.$$

Уведемо позначення:

$$B_{11}(x) = \mathrm{col}(\mathrm{str}(L_r^0(\partial_t) \bar{G}_{j_k 0}^{(k)}(s)|_{t=0}, \quad k = \overline{1, N}), \ r = \overline{1, R_0}),$$

$$B_{12}(x)=\mathrm{col}(\mathrm{str}(L_r^0(\partial_t)\overline{G}_{j_k\Gamma}^{(k)}(s)|_{t=0},\quad k=\overline{1,N}),\ r=\overline{1,R_0}),$$

$$B_{21}(x)=\mathrm{col}(\mathrm{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)\overline{G}_{j_k0}^{(k)}(s),\quad k=\overline{1,N}),\ \rho=\overline{1,R_\Gamma}),$$

$$B_{22}(x)=\mathrm{col}(\mathrm{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)\overline{G}_{j_k\Gamma}^{(k)}(s),\quad k=\overline{1,N}),\ \rho=\overline{1,R_\Gamma}),$$

$$\overline{u}_0=\mathrm{col}(\overline{u}_{j_k0}^{(k)},\ k=\overline{1,N}),$$

$$\overline{u}_\Gamma=\mathrm{col}(\overline{u}_{j_k\Gamma}^{(k)},\ k=\overline{1,N}),$$

$$\overline{Y}^0(x)=\mathrm{col}(\overline{Y}_r^0(x),\ r=\overline{1,R_0}),$$

$$\overline{Y}^\Gamma(s)=\mathrm{col}(\overline{Y}_\rho^\Gamma(s),\rho=\overline{1,R_\Gamma})$$

та запишемо рівняння (20), (21) у вигляді

$$B_{11}(x)\overline{u}_0+B_{12}(x)\overline{u}_\Gamma=\overline{Y}^0(x),\ (x\in S_0),\tag{22}$$

$$B_{21}(s)\overline{u}_0+B_{22}(s)\overline{u}_\Gamma=\overline{Y}^\Gamma(s),\ (x\in\Gamma\times[0,\mathrm{T}])$$

або (що еквівалентно)

$$B(s)\overline{u}=\overline{Y}(s),\tag{23}$$

де

$$B(s)=\begin{pmatrix}(B_{11}(x)(x\in S_0)) & (B_{12}(x)(x\in S_0))\\ (B_{21}(s)(s\in\Gamma\times[0,T])) & (B_{22}(s)(s\in\Gamma\times[0,T]))\end{pmatrix},$$

$$\overline{u}=\begin{pmatrix}\overline{u}_0\\ \overline{u}_\Gamma\end{pmatrix},\qquad \overline{Y}(s)=\begin{pmatrix}\overline{Y}^0(x) & (x\in S_0)\\ \overline{Y}^\Gamma(s) & (s\in\Gamma\times[0,T])\end{pmatrix}.$$

Останнє означає, що задача (15) звелася до знаходження

$$\overline{u}=\arg\min_{u\in R^{M_0+M_\Gamma}}\left\|\int(B(s)\overline{u}-\overline{Y}(s))ds\right\|^2\tag{24}$$

(тут інтегрування виконується згідно визначення аргументу s).

Розв’язком (23), знайденим згідно з (24), буде вектор [9]

$$\overline{u}=P_2^+B_Y+\overline{v}-P_2^+P_2\overline{v}\quad\forall\overline{v}\in R^{M_0+M_\Gamma},\tag{25}$$

де

$$P_2=\int B^T(s)B(s)ds=\begin{pmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{pmatrix},$$

$$B_Y=\int B^T(s)\overline{Y}(s)ds=\begin{pmatrix}B_{Y1}\\ B_{Y2}\end{pmatrix}$$

для

$$P_{11}=\int_{S_0}B_{11}^T(x)B_{11}(x)\,dx,$$

$$P_{21}=\int_{\Gamma\times[0,\mathrm{T}]}B_{21}^T(s)B_{21}(s)\,ds,$$

$$P_{12} = \int_{S_0} B_{12}^T(x) B_{12}(x)\, dx\,,$$

$$\mathrm{P}_{22} = \int_{\Gamma\times[0,\mathrm{T}]} \mathrm{B}_{22}^T(\mathrm{s}) \mathrm{B}_{22}(\mathrm{s}) \mathrm{ds}\,,$$

$$B_{Y1} = \int_{S_0} B_{11}^T(x) \bar{Y}^0(x)\, dx + \int_{\Gamma\times[0,\mathrm{T}]} B_{21}^T(s) \bar{Y}^\Gamma(s)\, ds,$$

$$B_{Y2} = \int_{S_0} B_{12}^T(x) \bar{Y}^0(x)\, dx + \int_{\Gamma\times[0,\mathrm{T}]} B_{22}^T(s) \bar{Y}^\Gamma(s)\, ds.$$

З (25) маємо

$$\mathrm{col}(\bar{u}_{j_k 0}^{(k)},\ k = \overline{1, N}) = (Q_{11}, Q_{12})(B_Y - P_2 \bar{v}) + \bar{v}_0\,; \tag{26}$$

$$\mathrm{col}(\bar{u}_{j_k \Gamma}^{(k)},\ k = \overline{1, N}) = (Q_{21}, Q_{22})(B_Y - P_2 \bar{v}) + \bar{v}_\Gamma \tag{27}$$

для

$$\begin{pmatrix} \bar{v}_0 \\ \bar{v}_\Gamma \end{pmatrix} = \bar{v}, \qquad \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} = P_2^+ .$$

Знайдені згідно з (26), (27) вектори $\bar{u}_{j_k 0}^{(k)}$ та $\bar{u}_{j_k \Gamma}^{(k)}$ ($j_k \in \{1, \ldots, k\}, k = \overline{1, N}$) дають змогу відповідно до (18), (19) знайти складові $y_0(s)$ та $y_\Gamma(s)$ функції (16) стану розглядуваної системи, а з урахуванням, що складова $y_\infty(s)$ відома, — і всю функцію $y(s)$. Останнє завершує розв'язання задачі (1), (11), (12) згідно з критерєм (15).

Точність математичного моделювання початково-крайових умов (11), (12) визначатиметься величиною

$$\varepsilon^2 = \min_{y(s)} \Phi_1 = \min_{\bar{u}} \left\| \int (B(s)\bar{u} - \bar{Y}(s)) ds \right\|^2 = Y^2 - B_Y^T P_2^+ B_Y$$

для

$$Y^2 = \int_{S_0} (\bar{Y}^0(x))^T \bar{Y}^0(x) dx + \int_{\Gamma\times[0,\mathrm{T}]} (\bar{Y}^\Gamma(s))^T \bar{Y}^\Gamma(s)\, ds$$

та P_2 і B_Y, визначених вище. Це моделювання може бути однозначним ($v \equiv 0$), якщо $\det P_2 > 0$.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИСКРЕТНО ВИЗНАЧЕНИХ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ УМОВ

Розглянемо особливості дослідження динаміки системи (1) за умов, коли початково-крайовий стан системи спостерігається дискретно згідно з (13), (14).

За результатами псевдообернення системи (1), отриманими в [8], побудуємо функцію $y(s)$ ($s \in S_0^T$) стану системи (1) згідно з критерієм

$$\Phi_2 = \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} (L_r^0(\partial_t) y(s)|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0}} - Y_{rl}^0)^2 + \\ + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} (L_\rho^\Gamma(\partial_x) y(s)|_{s=s_l^\Gamma} - Y_{\rho l}^\Gamma)^2 \to \min_{y_s}. \tag{28}$$

Як і у разі розв'язання попереднього варіанта задачі, функцію $y(s)$ подамо співвідношеннями (16)–(19), моделюючі вектори $\bar{u}_{j_k 0}^{(k)}$ та $\bar{u}_{j_k \Gamma}^{(k)}$ $(j_k = \overline{1, k}, k = \overline{1, N})$ яких отримаємо з (13), (14) після підстановки туди (16). У цьому випадку система (22), що розв'язує задачу, замінилася би такою:

$$
\begin{aligned}
A_{11}\bar{u}_0 + A_{12}\bar{u}_\Gamma &= Y^0, \\
A_{21}\bar{u}_0 + A_{22}\bar{u}_\Gamma &= Y^\Gamma.
\end{aligned} \tag{29}
$$

Тут $\bar{u}_0$ та $\bar{u}_\Gamma$ — вектори, визначені вище, а також

$$A_{11} = \mathrm{col}((\mathrm{str}\,(L_r^0(\partial_t)\bar{G}_{j_k 0}^{(k)}(s)|_{\substack{t=0\\ x=x_l^0}}, \quad k=\overline{1,N}), \; l=\overline{1,L_0}), \; r=\overline{1,R_0}),$$

$$A_{12} = \mathrm{col}((\mathrm{str}\,(L_r^0(\partial_t)\bar{G}_{j_k \Gamma}^{(k)}(s)|_{\substack{t=0\\ x=x_l^0}}, \quad k=\overline{1,N}), \; l=\overline{1,L_0}), \; r=\overline{1,R_0}),$$

$$A_{21} = \mathrm{col}((\mathrm{str}\,(L_\rho^\Gamma(\partial_x)\bar{G}_{j_k 0}^{(k)}(s)|_{s=s_l^\Gamma}, \quad k=\overline{1,N}), \; l=\overline{1,L_\Gamma}), \; \rho=\overline{1,R_\Gamma}),$$

$$A_{22} = \mathrm{col}((\mathrm{str}\,(L_\rho^\Gamma(\partial_x)\bar{G}_{j_k \Gamma}^{(k)}(s)|_{s=s_l^\Gamma}, \quad k=\overline{1,N}), \; l=\overline{1,L_\Gamma}), \; \rho=\overline{1,R_\Gamma}),$$

$$Y^0 = \mathrm{col}((Y_{rl}^0, \, l=\overline{1,L_0}), \, r=\overline{1,R_0}),$$

$$Y^\Gamma = \mathrm{col}((Y_{\rho l}^\Gamma, \, l=\overline{1,L_\Gamma}), \, \rho=\overline{1,R_\Gamma}).$$

Уведемо до розгляду

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} \bar{u}_0 \\ \bar{u}_\Gamma \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_\Gamma \end{pmatrix}$$

і систему (29) запишемо у вигляді

$$A\bar{u} = Y. \tag{30}$$

З урахування того, що функція $y(s)$ співвідношеннями (18), (19) визначається через компоненти вектора $\bar{u}$, критерій (28) розв'язання розглядуваної задачі замінимо таким чином:

$$\Phi_2 \to \min_{\bar{u}}$$

або (що еквівалентно)

$$\| A\bar{u} - Y \|^2 \to \min_{\bar{u}}. \tag{31}$$

Враховуючи, що розв'язком задачі (30), (31) буде [9]

$$\bar{u} = A^T P_2^+ Y + \bar{v} - A^T P_2^+ A_Y \tag{32}$$

за довільного $(M_0 + M_\Gamma)$-вимірного вектора v та для $P_1 = AA^{\mathrm{T}}$, $A_Y = AY$. Звідси співвідношеннями

$$
\begin{aligned}
\mathrm{col}(\bar{u}_{j_k 0}^{(k)}, \; k=\overline{1,N}) &= (A_{11}^T, A_{21}^T)P_1^+(Y - A_Y) + v_0 \quad \forall v_0 \in R^{M_0}, \\
\mathrm{col}(\bar{u}_{j_k \Gamma}^{(k)}, \; k=\overline{1,N}) &= (A_{12}^T, A_{22}^T)P_1^+(Y - A_Y) + v_\Gamma \quad \forall v_\Gamma \in R^{M_\Gamma}
\end{aligned} \tag{33}
$$

знаходимо вектори $\bar{u}^{(k)}_{j_k 0}$ та $\bar{u}^{(k)}_{j_k \Gamma}$ $(j_k = \overline{\{1, k\}}, k = \overline{1, N})$, якими згідно з (28) моделюються початково-крайові зовнішньо-динамічні збурення (13), (14) і через які згідно з (18) та (19) знаходяться складові $y_0(s)$ та $y_\Gamma(s)$ функціїї стану $y(s)$.

Точність, з якою знайдене таким чином $y(s)$, задовольнятиме початково-крайовим співвідношенням, визначатиметься величиною

$$\varepsilon^2 = \min_{y(s)} \Phi_2 = \min_{\bar{u}} \Phi_2 = \min_{\bar{u}} || A\bar{u} - Y ||^2 = Y^T Y - Y^T P_1 P_1^+ Y. \quad (34)$$

Умовою однозначності $(v \equiv 0)$ отриманого таким чином розв'язку розглядуваної задачі буде нерівність

$$\det(A^T A) > 0. \quad (35)$$

Зауважимо, що процедура розв'язання розглядуваної задачі може спроститися у разі, коли за дискретно спостережуваного початково-крайового стану

$$y(s_l^0) = Y_l^0 \quad (s_l^0 \in S_0 \times 0, l = \overline{1, L_0}), \quad (36)$$

$$y(s_l^\Gamma) = Y_l^\Gamma \quad (s_l^\Gamma \in \Gamma \times [0, \mathrm{T}], l = \overline{1, L_\Gamma}) \quad (37)$$

динаміка досліджуваної системи визначається в окремих точках просторово-часової області S_0^T. Розглянемо особливості розв'язання цієї задачі за умови, що такими точками є $x_1, x_2, \ldots, x_L$.

Для побудови вектора

$$\bar{y} = \mathrm{col}(y_l, l = \overline{1, L})$$

значень $y(s_l) = y_l$ функції $y(s)$ стану системи (1) такого, щоб

$$\overline{\Phi}_2 = \sum_{l=1}^{L_0} (y(s_l^0) - Y_l^0)^2 + \sum_{l=1}^{L_\Gamma} (y(s_l^\Gamma) - Y_l^\Gamma)^2 \to \min_{\bar{y}}, \quad (38)$$

замість використовуваного нами псевдорозв'язку (8) рівняння (1) скористаємося його дискретним аналогом (7). Останнє є виправданим, оскільки в такому випадку $R_0 = R_\Gamma = 1$, $L_1^0(\partial_t) \equiv 1$, $L_1^\Gamma(\partial_x) \equiv 1$ і нема особливої потреби у явних аналітичних залежностях складових $y_0(s)$ та $y_\Gamma(s)$ від просторово-часової змінної s.

З урахуванням сказаного розшукуваний згідно з (38) вектор $\bar{y}$ подамо співвідношенням

$$\bar{y} = \bar{y}_\infty + \bar{y}_0 + \bar{y}_\Gamma, \quad (39)$$

в якому для $j_k \in \{1, \ldots, k\}$ $(k = \overline{1, N})$

$$\bar{y}_\infty = \sum_{k=1}^{N} A_{j_k}^{(k)} \bar{u}_{j_k}^{(k)}, \quad (40)$$

$$\bar{y}_0 = \sum_{k=1}^{N} A_{j_k 0}^{(k)} \bar{u}_{j_k 0}^{(k)}, \quad (41)$$

$$\bar{y}_\Gamma = \sum_{k=1}^{N} A_{j_k \Gamma}^{(k)} \bar{u}_{j_k \Gamma}^{(k)} \quad (42)$$

за визначеної у (9) матриці $A_{j_k}^{(k)}$ та прийнятих до розгляду вище векторів $\bar{u}_{j_k}^{(k)}$, $\bar{u}_{j_k 0}^{(k)}$ та $\bar{u}_{j_k \Gamma}^{(k)}$ значень нелінійно перетворених функції $u(s)$ розподілених просторово-часових збурень та функцій $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$, якими згідно з (38) моделюються початково-крайові спостереження (36), (37). Крім того, тут

$$A_{j_k 0}^{(k)} = || G_{j_k}^{(k)} (s_l - \sigma_m^0) \sqrt[k]{(\Delta s_m^0)^{k-1}} ||_{l,m=1}^{l=L, m=M_0}, \tag{43}$$

$$A_{j_k \Gamma}^{(k)} = || G_{j_k}^{(k)} (s_l - \sigma_m^\Gamma) \sqrt[k]{(\Delta s_m^\Gamma)^{k-1}} ||_{l,m=1}^{l=L, m=M_\Gamma} \tag{44}$$

за визначених вище σ_m^0 $(m = \overline{1, M_0})$, σ_m^Γ $(m = \overline{1, M_\Gamma})$, Δs_m^0 $(m = \overline{1, M_0})$ та Δs_m^Γ $(m = \overline{1, M_\Gamma})$.

Вектор

$$\bar{u} = \mathrm{col}((\bar{u}_{j_k 0}^{(k)},\ k = \overline{1, N}),\ (\bar{u}_{j_k \Gamma}^{(k)},\ k = \overline{1, N})) \tag{45}$$

значень $\bar{u}_{j_k 0}^{(k)}$ $(k = \overline{1, N})$ та $\bar{u}_{j_k \Gamma}^{(k)}$ $(k = \overline{1, N})$ знайдемо із системи лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду (30), в яких тепер

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_\Gamma \end{pmatrix} \tag{46}$$

для

$$A_{11} = || G_{j_k}^{(k)} (s_l^0 - \sigma_m^0) \sqrt[k]{(\Delta s_m^0)^{k-1}} ||_{l,m=1}^{l=L_0,\, m=M_0},$$

$$A_{12} = || G_{j_k}^{(k)} (s_l^0 - \sigma_m^\Gamma) \sqrt[k]{(\Delta s_m^\Gamma)^{k-1}} ||_{l,\, m=1}^{l=L_0,\, m=M_\Gamma},$$

$$A_{21} = || G_{j_k}^{(k)} (s_l^\Gamma - \sigma_m^0) \sqrt[k]{(\Delta s_m^0)^{k-1}} ||_{l,m=1}^{l=L_\Gamma,\, m=M_0},$$

$$A_{22} = || G_{j_k}^{(k)} (s_l^\Gamma - \sigma_m^\Gamma) \sqrt[k]{(\Delta s_m^\Gamma)^{k-1}} ||_{l,\, m=1}^{l=L_\Gamma,\, m=M_\Gamma}, \tag{47}$$

$$Y^0 = \mathrm{col}(Y_l^0,\ l = \overline{1, L_0}),$$

$$Y^\Gamma = \mathrm{col}(Y_l^\Gamma,\ l = \overline{1, L_\Gamma}). \tag{48}$$

Розв'язок цієї системи, знайдений згідно з (31), як і вище, буде визначатися співвідношенням (32). Співвідношеннями (33), (46)–(48) будуть визначатися значення прийнятих до розгляду в (39)–(42) векторів $\bar{u}_{j_k 0}^{(k)}$ та $\bar{u}_{j_k \Gamma}^{(k)}$ $(j_k \in \{1, \ldots, k\}, k = \overline{1, N})$. Точність та однозначність отриманого згідно з (39)–(42) розв'язку задачі, як і раніше, буде визначатися величиною ε^2 та умовою (35).

ВИСНОВКИ

Розв'язано задачі дослідження динаміки нелінійних просторово-розподілених систем, лінійна математична модель яких доповнена поліноміально визначеною залежністю від диференціальних перетворень їхньої функції стану. Задачі розв'язано для дискретно та неперервно заданих значень гранично-початкових зовнішньо-динамічних збурювальних факторів, узгодження розв'язку з якими визначається за середньоквадратичним критерієм. Виконання цих вимог досягається у разі псевдообернених непростих розв'язувальних рівнянь, які отримують за початково-крайових умов функціонування системи.

Проблеми узгодженості розв’язку з нелініайною математичною моделлю системи вирішуються [8] на етапі переходу від диференціальної форми моделі до її інтегрального еквівалента.

Результатом цього наукового дослідження є прості і доступні для практичної реалізації розрахункові формули, які для цих складних і в загальному випадку некоректно сформульованих початково-крайових задач методами класичної та обчислювальної математики побудувати неможна.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Стоян В.А. Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2011. 320 с.
2. Стоян В.А. Математичне моделювання квадратично нелінійних просторово розподілених систем. I. Випадок дискретно визначених початково-крайових зовнішньо-динамічних збурень. *Кібернетика та системний аналіз.* 2021. Т. 57, № 5. С. 84–97.
3. Стоян В.А. Математичне моделювання квадратично нелінійних просторово розподілених систем. II. Випадок неперервно визначених початково-крайових зовнішньо-динамічних збурень. *Кібернетика та системний аналіз.* 2021. Т. 57, № 6. С. 72–83.
4. Стоян В.А. Математичне моделювання стану динамічних мультиплікативно нелінійних систем. *Кібернетика та системний аналіз.* 2022. Т. 58, № 4. С. 117–128.
5. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. Киев: Наук. думка, 1991. 432 с.
6. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецький В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. Київ: Наук. думка, 2005. 282 с.
7. Стоян В.А. Об одном подходе к исследованию начально-краевых задач матфизики. *Проблемы управления и информатики.* 1998. № 1. С. 79–86.
8. Стоян В.А. Псевдообращение математических моделей распределенных дифференциальных систем с адитивно определенной нелинейностью. *Кібернетика та системний аналіз*. 2021. Т. 57, № 1. С. 77–93.
9. Кириченко Н.Ф., Стоян В.А. Аналитическое представление матричных и интегральных линейных преобразований. *Кибернетика и системный анализ.* 1998. № 3. С. 90–104.

V.A. Stoyan

MATHEMATICAL MODELING OF SPATIALLY DISTRIBUTED SYSTEMS, POLYNOMIALLY DEPENDENT ON LINEAR DIFFERENTIAL TRANSFORMATIONS OF THE STATE FUNCTION

Abstract. Initial–boundary-value problems of the dynamics of nonlinear spatially distributed systems are formulates and solved according to the root-mean-square criterion. Systems whose linear mathematical model is supplemented by the polynomially defined dependence on the differential transformation of their state function are considered. Analytical dependences of this function are generated under the presence of their discretely and continuously defined initialboundary-value observations, without constraints on the number and quality of the latter. The accuracy of the sets of the obtained solutions is evaluated, and their uniqueness is analyzed.

Keywords: nonlinear dynamical systems, systems with uncertainties, distributed-parameter systems, spatially distributed systems, pseudosolutions, ill-posed initial–boundary-value problems.

Надійшла до редакції 14.04.2022