УДК 519.65

**П.С. МАЛАЧІВСЬКИЙ**
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна, e-mail: *Petro.Malachivskyy@gmail.com*.

**Л.С. МЕЛЬНИЧОК**
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна, e-mail: *levkom@gmail.com*.

**Я.В. ПІЗЮР**
Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна,
e-mail: *yaropolk.v.piziur@lpnu.ua*.

# ЧЕБИШОВСЬКЕ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ЛОГАРИФМІЧНИМ ВИРАЗОМ

**Анотація.** Запропоновано метод побудови чебишовського наближення функцій багатьох змінних логарифмічним виразом з абсолютною похибкою. Його суть полягає в побудові проміжного чебишовського наближення поліномом з відносною похибкою значень експоненти від наближуваної функції. Побудова чебишовського наближення поліномом ґрунтується на обчисленні граничного середньостепеневого наближення за ітераційною схемою з використанням методу найменших квадратів із відповідно сформованими значеннями змінної вагової функції. Представлені результати розв'язування тестових прикладів підтверджують швидку збіжність методу під час обчислення параметрів чебишовського наближення логарифмічним виразом функцій однієї, двох і трьох змінних.

**Ключові слова:** чебишовське наближення функцій багатьох змінних, логарифмічний вираз, середньостепеневе наближення, метод найменших квадратів, змінна вагова функція.

## ВСТУП

Логарифмічні залежності доцільно використовувати для аналізу величин, які експоненційно зростають з часом, або залежностей, що описуються добутками. Застосування логарифмічних перетворень у цьому разі дає можливість звести аналіз цих залежностей до лінійних моделей [1, 2]. Чебишовське наближення нелінійними виразами використовують для опису спеціальних математичних функцій [3, 4], а також у моделюванні спеціальних класів фізичних, хімічних і економічних процесів [5–9]. Наближення логарифмічними виразами використовують під час опрацювання сигналів і зображень у телекомунікаційних і біомедичних системах [10, 11]. Зміна потоку енергії випромінювання у верхній частині атмосфери, що зумовлена деякими парниковими газами, логарифмічно залежить від концентрацій цих газів [12, 13]. Логарифмічну залежність застосовують і для опису характеристик ємнісних сенсорів вологості на полімерній основі за низької вологості [14], а також для встановлення функціональних залежностей початкових умов у задачах із запізненнями, які виникають під час моделювання процесів інфекційних захворювань з урахуванням дифузійних збурень, температурної реакції організму та інших впливів [15, 16].

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай функція $n$ змінних $f(X)$, де $X$ є вектором $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, неперервна в деякій обмеженій області $D$, $D \subset R^n$, де $R^n$ — $n$-вимірний векторний простір. Наблизимо функцію $f(X)$, задану на множині точок $\Omega = \{X_j\}_{j=1}^{s}$, $\Omega \in D$, логарифмічним виразом

$$L_m(a; X) = a_0 + \ln(P_m(a; X)), \ m+1 < s, \tag{1}$$

де $P_m(a;X)$ — узагальнений поліном вигляду

$$P_m(a;X) = 1 + \sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_i(X) \tag{2}$$

за системою лінійно незалежних неперервних на $D$ дійсних функцій $\varphi_i(X)$, $i=\overline{1,m}$, а $a_i$, $i=\overline{0,m}$, — невідомі параметри: $\{a_i\}_{i=0}^{m} \in A$, $A \subseteq R^{m+1}$. Вираз $L_m(a^*;X)$ називатимемо чебишовським наближенням функції $f(X)$ з абсолютною похибкою на множині точок $\Omega$, якщо він задовольняє умову

$$\max_{X \in \Omega} |f(X) - L_m(a^*;X)| = \min_{a \in A} \max_{X \in \Omega} |f(X) - L_m(a;X)|. \tag{3}$$

Властивості та спосіб обчислення параметрів чебишовського наближення логарифмічним виразом (1) з абсолютною похибкою функцій однієї змінної описано в [5]. У цій праці побудову такого наближення зведено до обчислення параметрів чебишовського наближення поліномом з відносною похибкою. Аналогічно до методу, описаного в [5], чебишовське наближення логарифмічним виразом (1) з абсолютною похибкою зводимо до побудови наближення узагальненим поліномом

$$\overline{P}_m(a;X) = e^{a_0} P_m(a;X) = \overline{a}_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_i(X)\right) \tag{4}$$

функції $f_e(X) = \exp(f(X))$ на множині точок $\Omega$ з відносною похибкою відносно невідомих параметрів $\overline{a}_0$ і $a_i$, $i=\overline{1,m}$. Чебишовське наближення функцій багатьох змінних $f_e(X)$ поліномом (4) обчислюємо як граничне наближення у нормі простору $L^p$ для $p \to \infty$ методом, описаним у [17–19].

### МЕТОД ОБЧИСЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЧЕБИШОВСЬКОГО НАБЛИЖЕННЯ ЛОГАРИФМІЧНИМ ВИРАЗОМ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

У [4] теоретично обґрунтовано можливість зведення чебишовського наближення логарифмічним виразом (1) з абсолютною похибкою функції однієї змінної до побудови чебишовського наближення поліномом значень експоненти цієї функції з відносною похибкою. У випадку наближення функцій багатьох змінних ця особливість чебишовського наближення логарифмічним виразом також справджується.

**Теорема 1.** Нехай функція $n$ змінних $f(X)$, неперервна в деякій обмеженій області $D$, задана на множині точок $\Omega = \{X_j\}_{j=1}^{s}$ $(\Omega \in D)$. Чебишовське наближення логарифмічним виразом (1) функції $f(X)$ з абсолютною похибкою на множині точок $\Omega$ визначається через чебишовське наближення узагальненим поліномом (4) функції $f_e(X) = \exp(f(X))$ на множині точок $\Omega$ з відносною похибкою. Значення параметрів $a_i$, $i=\overline{1,m}$, чебишовського наближення виразом (1) збігаються зі значеннями однойменних параметрів чебишовського наближення узагальненим поліномом $\overline{P}_m(a;X)$ (4) функції $f_e(X)$ на множині точок $\Omega$ з абсолютною похибкою, а значення параметра $a_0$ обчислюється за формулою

$$a_0 = (\mu_{\max} + \mu_{\min})/2, \tag{5}$$

де

$$\mu_{\max} = \max_{X \in \Omega} (f(X) - \overline{L}_m(a;X)), \ \mu_{\min} = \min_{X \in \Omega} (f(X) - \overline{L}_m(a;X)),$$

$$\overline{L}_m(a;X) = \ln(P_m(a;X)).$$

**Доведення.** У праці [20] для функцій багатьох змінних теоретично обґрунтовано, що точки $H$-множини чебишовського наближення узагальненим поліномом (4) збігаються з точками $H$-множини чебишовського наближення виразом $\psi(\overline{P}_m(a;X))$, де $\psi(z)$ — строго монотонна функція. Оскільки логарифм є строго монотонною функцією, то ця властивість справджується для виразу (1). Відповідно до [20] точки $H$-множини чебишовського наближення функцій багатьох змінних є аналогами точок альтернансу чебишовського наближення функцій однієї змінної. У точках $H$-множини похибка наближення функцій набуває найбільшого за модулем значення. Ґрунтуючись на результатах праці [20] щодо згаданої властивості точок $H$-множини чебишовського наближення, припустимо, що $H$-множина точок чебишовського наближення логарифмічним виразом (1) складається з $(m+2)$ точок

$$H=\{H_i^+,\ i=\overline{1,k},\ H_i^-,\ i=\overline{1,l},\ k+l=m+2\}, \tag{6}$$

де $H^+$ — точки, в яких похибка наближення додатна, а $H^-$ — точки, в яких похибка наближення від'ємна. Відповідно до характеристичної властивості чебишовського наближення параметри наближення логарифмічним виразом (1) функції $f(X)$ з абсолютною похибкою задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} f(H_i^+)-a_0-\ln(P_m(a;H_i^+))=|\mu|, & i=\overline{1,k}, \\ f(H_i^-)-a_0-\ln(P_m(a;H_i^-))=-|\mu|, & i=\overline{1,l}, \end{cases} \tag{7}$$

де $|\mu|$ — похибка чебишовського наближення. Послідовно віднімаючи від $k$-го рівняння системи (7) $(k-1)$-е, від $(k-1)$-го — $(k-2)$-е тощо і аналогічно від $l$-го рівняння — $(l-1)$-е тощо, вилучаємо з системи рівнянь (7) невідомі $a_0$ і $\mu$:

$$\begin{cases} \ln(P(a;H_{i+1}^+))-\ln(P(a;H_i^+))=f(H_{i+1}^+)-f(H_i^+), & i=\overline{1,k-1}, \\ \ln(P(a;H_{i+1}^-))-\ln(P(a;H_i^-))=f(H_{i+1}^-)-f(H_i^-), & i=\overline{1,l-1}. \end{cases} \tag{8}$$

Позбувшись логарифмів у лівих частинах системи рівнянь (8), отримаємо

$$\begin{cases} P(a;H_{i+1}^+)f_e(H_i^+)=P(a;H_i^+)f_e(H_{i+1}^+), & i=\overline{1,k-1}, \\ P(a;H_{i+1}^-)f_e(H_i^-)=P(a;H_i^-)f_e(H_{i+1}^-), & i=\overline{1,l-1}, \end{cases} \tag{9}$$

де $f_e(X)=\exp(f(X))$.

Система рівнянь (9) збігається із системою рівнянь для визначення параметрів $a_i$, $i=\overline{1,m}$, чебишовського наближення узагальненим поліномом (4) функції $f(X)$ з відносною похибкою. Справді, виходячи з того, що точки $H$-множини чебишовського наближення логарифмічним виразом (1) збігаються з точками $H$-множини чебишовського наближення узагальненим поліномом (4), параметри чебишовського наближення узагальненим поліномом (4) функції $f(X)$ з відносною похибкою задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} 1-\overline{a}_0P(a;H_i^+)/f_e(H_i^+)=|\overline{\mu}|, & i=\overline{1,k}, \\ 1-\overline{a}_0P(a;H_i^-)/f_e(H_i^-)=-|\overline{\mu}|, & i=\overline{1,l}, \end{cases} \tag{10}$$

де $|\overline{\mu}|$ — похибка чебишовського наближення, а $\overline{a}_0=e^{a_0}$. Аналогічно до вилучення невідомих $a_0$ і $\mu$ з системи рівнянь (7) вилучимо невідомі $\overline{a}_0$ і $\overline{\mu}$ із системи рівнянь (10) і отримаємо систему рівнянь, яка збігається із системою рівнянь (9).

Оскільки система рівнянь для визначення значень параметрів $a_i$, $i=\overline{1,m}$, чебишовського наближення логарифмічним виразом (1) функції $f(X)$ на множині точок $\Omega$ з абсолютною похибкою збігається із системою рівнянь відносно значень однойменних параметрів чебишовського наближення функції $f_e(X)$ поліномом (4) на множині точок $\Omega$ з відносною похибкою, це означає, що обчислення значень параметрів $a_i$, $i=\overline{1,m}$, чебишовського наближення логарифмічним виразом (1) можна звести до обчислення значень однойменних параметрів чебишовського наближення поліномом (4).

Значення параметра $a_0$ можна визначити як розв'язок однопараметричної задачі чебишовського наближення функції $f(X)$ виразом $a_0+\bar{L}_m(a;X)$ на множині точок $\Omega$ з абсолютною похибкою

$$\max_{X\in\Omega}|f(X)-a_0+\bar{L}_m(a;X)|\xrightarrow[a_0]{}\min. \qquad (11)$$

Розв'язок задачі (11) відносно значення параметра $a_0$ обчислюється за формулою (5).

Отже, значення параметрів $a_i$, $i=\overline{1,m}$, чебишовського наближення виразом (1) з відносною похибкою збігаються зі значеннями однойменних параметрів чебишовського наближення узагальненим поліномом $\bar{P}_m(a;X)$ функції $f_e(X)$ на множині точок $\Omega$ з абсолютною похибкою, а значення параметра $a_0$ обчислюється за формулою (5). Теорему доведено.

Відповідно до теореми 1 побудова чебишовського наближення логарифмічним виразом (1) зводиться до обчислення параметрів чебишовського наближення поліномом (4) функції $f_e(X)$. Обчислення параметрів чебишовського наближення поліномом (4) функції багатьох змінних $f_e(X)$ можна реалізувати методом, описаним у праці [18]. Цей метод полягає в послідовній побудові середньостепеневих наближень з використанням ітераційного процесу на основі методу найменших квадратів

$$\sum_{X\in\Omega}\rho_r(X)(f_e(X)-\bar{P}_m(a;X))^2\xrightarrow[a\in A]{}\min,\ r=0,1,\dots, \qquad (12)$$

з ваговою функцією

$$\rho_r(X)=\rho_{r-1}(X)|\Delta_r(X)|=\rho_0(X)\prod_{i=1}^{r}|\Delta_i(X)|,\ r=1,\dots,p-2,\ p=3,4,\dots, \qquad (13)$$

де

$$\rho_0(X)=\frac{1}{f_e^2(X)},\ \Delta_k(X)=\frac{f_e(X)-\bar{P}_{m,k-1}(a;X)}{f_e(X)},\ k=\overline{1,r},$$

а $\bar{P}_{m,k}(a;X)$ — наближення функції $f_e(X)$ за методом найменших квадратів з ваговою функцією $\rho_k(X)$, яке відповідає середньостепеневому наближенню степеня $k+2$.

Завершення побудови середньостепеневих наближень за ітераціями (12) можна контролювати досягненням деякої заданої точності $\varepsilon$

$$|\mu_{r-1}-\mu_r|\le\varepsilon\mu_r, \qquad (14)$$

де $\mu_r=\max_{X\in\Omega}|f_e(X)-\bar{P}_{m,r}(a;X)|$.

Відповідно до теореми 1 значення параметрів $a_i$, $i=\overline{1,m}$, чебишовського наближення логарифмічним виразом (1) функції $f(X)$ на множині точок $\Omega$ з абсолютною похибкою збігаються зі значеннями однойменних параметрів отриманого наближення $\bar{P}_{m,r}(a;X)$. Значення параметра $a_0$ визначаємо за формулою (5).

Результати обчислення параметрів чебишовського наближення логарифмічним виразом (1) з абсолютною похибкою для тестових прикладів підтверджують швидку збіжність у випадку наближення функцій однієї, двох та трьох змінних.

**Приклад 1.** Знайдемо чебишовське наближення з абсолютною похибкою логарифмічним виразом $L_2(a;x) = a_0 + \ln(1 + a_1 + a_2 x^2)$ функції однієї змінної $y(x) = \sqrt{1 + 2x + 0.3x^3}$, заданої в точках $x_i$, $i = \overline{0, 20}$, де $x_i = 0.1i$.

З використанням запропонованого методу для $\varepsilon = 0.003$ в умові (14) для функції $y_e(x) = \exp(y(x))$ отримано чебишовське наближення поліномом

$$\overline{P}_2(a;x) = 2.351184246x^2 + 1.112030207x + 2.842810617 \qquad (15)$$

за шість ітерацій (12), (13). Цей поліном забезпечує відносну похибку наближення 4.9115 %. Відповідно чебишовське наближення функції $y(x)$ логарифмічним виразом

$$L_2(a;x) = 0.0011628185 + \ln(2.351184246x^2 + 1.112030207x + 2.842810617) \qquad (16)$$

забезпечує абсолютну похибку наближення 0.049110222.

Чебишовське наближення функції $y(x)$ логарифмічним виразом

$$L_2(a;x) = 0.001161662 + \ln(2.849228545 + 1.10539099x + 2.34832149x^2), \qquad (17)$$

отримане за ітераційною схемою Ремеза [5, 21] з уточненням точок альтернансу за алгоритмом Валле–Пуссена, забезпечує похибку апроксимації 0.04821. Перевищення похибки наближення логарифмічним виразом (16) порівняно з похибкою чебишовського наближення, отриманого за схемою Ремеза, дорівнює 0.000900285. Похибка наближення логарифмічним виразом (16) перевищує на 1.23 % похибку чебишовського наближення (17), отриманого за схемою Ремеза.

Наведена на рис. 1 крива похибки апроксимації відповідає характеристичній властивості чебишовського наближення та має чотири екстремальні точки

$$\begin{gathered}(0,\ -0.045956036),\ (0.4,\ 0.049110222),\\ (1.4,\ -0.049110221),\ (2.0,\ 0.046942622),\end{gathered} \qquad (18)$$

в яких значення похибки наближення за модулем збігаються у межах заданої точності та знак відхилення у цих точках чергується [5, 21]. Ці екстремальні точки збігаються з точками альтернансу, отриманими для наближення за схемою Ремеза (17). До того ж, відповідно до твердження [20] щодо точок $H$-множини чебишовського наближення поліномом (4), ці точки збігаються також з екстремальними точками похибки наближення (15).

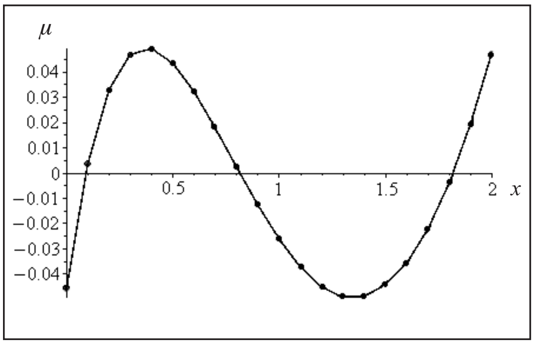

*Рис. 1.* Крива похибки наближення функції $y(x)$ логарифмічним виразом (16) з абсолютною похибкою

Розбіжність значень похибки наближення в екстремальних точках (18) можна зменшити, підвищивши точність обчислення чебишовського наближення $\varepsilon$ в умові (14). Чебишовське наближення функції $y(x)$ логарифмічним виразом $L_2(a;x)$ для $\varepsilon = 0.00003$

$$L_2(a;x) = 0.001168037 + \ln(2.348419563x^2 + 1.105368579x + 2.849149494) \quad (19)$$

забезпечує абсолютну похибку відтворення значень функції $y(x)$ на рівні 0.04822. Наближення (19) отримано за 79 ітерацій. В екстремальних точках абсолютна похибка наближення (19) набула таких значень:

$$\begin{gathered}(0,\ -0.048188564),\ (0.4,\ 0.048223284),\\ (1.4,\ -0.048181811),\ (2.0,\ 0.048184975).\end{gathered} \quad (20)$$

З (18) і (20) випливає, що екстремальні точки похибки наближення функції $y(x)$ логарифмічним виразом не змінилися, а розбіжність значень похибки наближення за модулем у цих точках зменшилась.

**Приклад 2.** Для функції двох змінних

$$z_2(x, y) = \sqrt{2 + 2.9(x^2 + y^2) + 1.3(x^3 + y^3)}, \quad (21)$$

заданої в точках $(x_i, y_j)$, $i = \overline{0, 20}$, $j = \overline{0, 20}$, де $x_i = 0.1i$, $y_j = 0.1j$, знайдемо чебишовське наближення логарифмічним виразом

$$L_{2,2}(a; x, y) = a_0 + \ln(1 + a_1(x + y) + a_2(x^2 + y^2)) \quad (22)$$

з абсолютною похибкою.

З використанням запропонованого методу для функції $z_2(x, y)$ за десять ітерацій (12), (13) для $\varepsilon = 0.003$ отримано проміжне наближення функції $\exp(z_2(x, y))$ поліномом

$$P_{2,2}(a; x, y) = 2.128112043 - 1.212702233(x + y) + 5.701012697(x^2 + y^2), \quad (23)$$

з відносною похибкою 6.8365 %. Відповідно логарифмічний вираз

$$\begin{gathered}L_{2,2}(a; x, y) = 0.0022649401 + \ln(P_{2,2}(a; x, y)) = 0.0022649401 + \\ + \ln(2.128112043 - 1.212702233(x + y) + 5.701012697(x^2 + y^2))\end{gathered} \quad (24)$$

забезпечує наближення функції $z_2(x, y)$ з абсолютною похибкою 0.06839447.

Вигляд поверхонь похибок наближень, наведених на рис. 2, підтверджує теоретичнй вислід [20]. Відповідно до цього висліду екстремальні точки (точки $H$-множини) похибки відтворення значень функції $\exp(z_2(x, y))$ поліномом (23) з відносною похибкою збігаються з екстремальними точками похибки відтворення значень функції $z_2(x, y)$ логарифмічним виразом (24) з абсолютною похибкою.

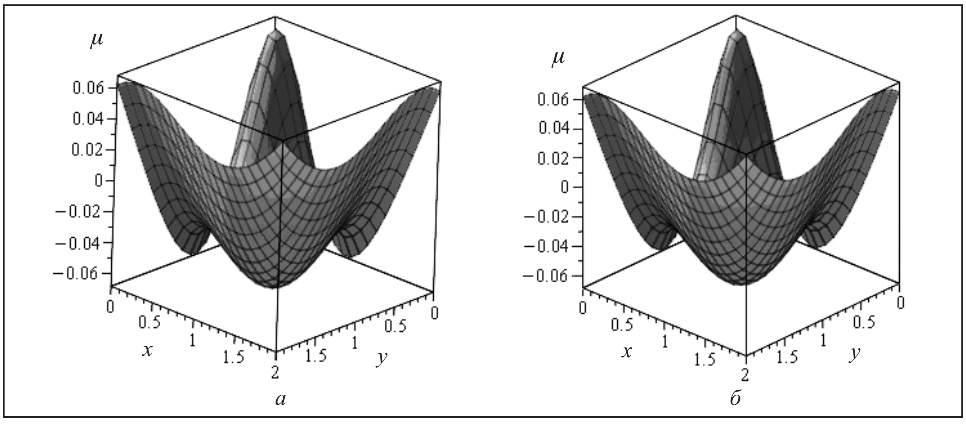


*Рис. 2.* Поверхні похибки апроксимації: наближення функції $\exp(z_2(x, y))$ поліномом (23) з відносною похибкою (*а*), функції $z_2(x, y)$ логарифмічним виразом (24) з абсолютною похибкою (*б*)

**Приклад 3.** Побудуємо чебишовське наближення функції трьох змінних

$$z_3(x, y, t) = \ln(4.7 + 2.567(x^2 + y^2 + t^2)),$$

заданої в точках $(x_i, y_j, t_r)$, $i = \overline{0,10}$, $j = \overline{0,10}$, $r = \overline{0,10}$, де $x_i = 0.1i$, $y_j = 0.1j$, $t_r = 0.1r$, логарифмічним виразом

$$L_{3,1}(a; x, t) = a_0 + \ln(1 + a_1(x + y + t))$$

з абсолютною похибкою.

З використанням запропонованого методу для $\varepsilon = 0.003$ за 11 ітерацій отримано для функції $z_3(x, y, t)$ наближення логарифмічним виразом

$$L_{3,1}(a; x, t) = 0.009280081 + \ln(4.081427175 + 2.212641011(x + y + t)),$$

який забезпечує абсолютну похибку наближення 0.136446495.

## ВИСНОВКИ

Метод побудови чебишовського наближення таблично заданих функцій багатьох змінних $f(X)$ логарифмічним виразом (1) з абсолютною похибкою реалізовано із застосуванням проміжного чебишовського наближення узагальненим поліномом (4) функції $f_e(X) = \exp(f(X))$ з відносною похибкою. Чебишовське наближення поліномом обчислено як граничне середньостепеневе наближення з використанням методу найменших квадратів з відповідно сформованими значеннями змінної вагової функції. Запропонований метод забезпечує можливість побудови чебишовського наближення логарифмічним виразом з необхідною точністю. Результати тестових прикладів підтверджують швидку збіжність методу під час побудови чебишовського наближення логарифмічним виразом з абсолютною похибкою для функцій однієї, двох і трьох змінних.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Gutierrez R., Valls J. Low cost hardware implementation of logarithm approximation. *IEEE Trans. Very Large Scale Integr. (VLSI) Syst.* 2011. Vol. 19, N 12. P. 2326–2330. https://doi.org/ 10.1109/TVLSI.2010.2081387.
2. Hajjar A.F., Awedh M.H. Efficient logarithmic function approximation. *International Journal of Scientific Engineering and Technology*. 2015. Vol. 4, Iss.7. P. 387–391.
3. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. Москва: Мир, 1980. 608 с.
4. Попов Б.А., Теслер Г. Вычисление функций на ЭВМ. Справочник Киев: Наук. думка, 1984. 599 с.
5. Попов Б.А., Теслер Г.С. Приближение функций для технических приложений. Киев: Наук. думка, 1980. 352 с.
6. Malachivskyy P.S., Pizyur Ya.V., Danchak N.V., Orazov E.B. Chebyshev approximation by exponential-power expression. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2013. Vol. 49, N 6. P. 877–881. https://doi.org/10.1007/s10559-013-9577-1.
7. Malachivskyy P.S., Pizyur Ya.V., Danchak N.V., Orazov E.B. Chebyshev approximation by exponential expression with relative error. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51, N 2. P. 286–290. https://doi.org/10.1007/s10559-015-9720-2.
8. Каленчук-Порханова А.О., Вакал Л.П. Відтворення функціональних залежностей на основі нелінійних наближень деяких видів. *Abstracts of Intern. Conf. "Problems of Decision Making under Uncertainties"* (May 21–25, 2007, Chernivtsi, Ukraine). Chernivtsi, 2007. P. 135–137.

9. Malachivskyy P.S., Pizyur Y.V., Malachivskyi R.P. Chebyshev approximation by a rational expression for functions of many variables. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2020. Vol. 56, N 5. P. 811–819. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00302-0.

10. Геращенко О.А., Гордов А.И., Еремина А.К. и др. Температурные измерения. Киев: Наук. думка, 1989. 704 с.

11. Rudtsch S., von Rohden C. Calibration and self-validation of thermistors for high-precision temperature measurements. *Measurement.* 2015. Vol. 76. P. 1–6. https://doi.org/10.1016/j.measurement.2015.07.028.

12. Huang Yi., Shahabadi M.B. Why logarithmic? A note on the dependence of radiative forcing on gas concentration. *J. Geophys. Res. Atmos*. 2014. Vol. 119, Iss. 24. P. 13683–13689. https://doi.org/10.1002/2014JD022466.

13. Shahabadi M.B, Huang Y. Logarithmic radiative effect of water vapor and spectral kernels. *J. Geophys. Res. Atmos.* 2014. Vol. 119, Iss. 10. P. 6000–6008. https://doi.org/10.1002/2014JD021623.

14. Majewski J. Low humidity characteristics of polymer-based capacitive humidity sensors. *Metrology and Measurement Systems*. 2017. Vol. 24, N 4. P. 607–616.

15. Bomba A., Baranovsky S., Blavatska O., Bachyshyna L. Infectious disease model generalization based on diffuse perturbations under conditions of body's temperature reaction. *Computers in Biology and Medicine.* 2022. Vol. 146. 105561. https://doi.org/10.1016/j.compbiomed.2022.105561.

16. Bomba A.Ya., Baranovsky S.V., Pasichnyk M.S., Pryshchepa O.V. Modeling small-scale spatial distributed influences on the development of infectious disease process. *Mathematical Modeling and Computing.* 2020. Vol. 7, N 2. P. 310–321. https://doi.org/10.23939/mmc2020.02.310.

17. Malachivskyy P.S., Matviychuk Y.N., Pizyur Y.V., Malachivskyi R.P. Uniform approximation of functions of two variables. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2017. Vol. 53, N 3. P. 426–431. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9943-5.

18. Malachivskyy P.S., Pizyur Y.V., Malachivskyi R.P., Ukhanska O.M. Chebyshev approximation of functions of several variables. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020 Vol. 56, N 1. P. 76–86. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00227-8.

19. Malachivskyy P.S., Melnychok L.S., Pizyur Y.V. Chebyshev approximation of multivariable functions by the exponential expression. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2021. Vol. 57, N 3. P. 429–435. https://doi.org/10.1007/s10559-021-00367-5.

20. Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения. Москва: Наука, 1978. 272 с.

21. Ремез Е. Я. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев: Наук. думка, 1969. 623 с.

**P.S. Malachivskyy, L.S. Melnychok, Ya.V. Pizyur**

## CHEBYSHEV APPROXIMATION OF MULTIVARIABLE FUNCTIONS BY A LOGARITHMIC EXPRESSION

**Abstract.** A method for constructing a Chebyshev approximation of the multivariable functions by a logarithmic expression with absolute error is proposed. It implies constructing an intermediate Chebyshev approximation by a polynomial with the relative error of the exponential value of the function being approximated. Construction of the Chebyshev approximation by a polynomial is based on calculating the limit mean-power approximation by the least squares method in accordance with the prevailing values of the variable weight function. The presented results of solving test examples confirm the rapid convergence of the method when calculating the parameters of the Chebyshev approximation by the logarithmic expression of the functions of one, two, and three variables.

**Keywords:** Chebyshev approximation of the multivariable functions, logarithmic expression, mean-power approximation, least squares method, variable weight function.

*Надійшла до редакції 19.08.2022*