СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ

УДК 517.9, 519.6

Г.В. САНДРАКОВ
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *gsandrako@gmail.com*.

С.І. ЛЯШКО
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *lyashko.serg@gmail.com*.

В.В. СЕМЕНОВ
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *semenov.volodya@gmail.com*.

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФІЛЬТРАЦІЇ ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩ ТА ОСЕРЕДНЕННЯ[1]

Анотація. Досліджено динамічні процеси фільтрації у пористих середовищах. Розглянуто пористі періодичні середовища, утворені великою кількістю «блоків» з низькою проникністю, розділених сполучною системою «розламів» з високою проникністю. Врахування структури таких середовищ для моделювання зумовлює залежність рівнянь фільтрації та їхніх коефіцієнтів від малих параметрів, що характеризують мікромасштаб пористого середовища та проникність блоків. Розглянуто початково-крайові задачі для нестаціонарних рівнянь фільтрації у цих пористих середовищах. Наведено осереднені задачі, які визначають наближену асимптотику розв'язків таких задач. Осереднені задачі сформульовано як початково-крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь зі згортками. Доведено оцінки точності асимптотики та відповідні теореми збіжності. Встановлено твердження про розв'язність і регулярність для таких задач, які є оптимальними та не залежать від параметрів.

Ключові слова: осереднені задачі, параболічні задачі, наближені асимптотики, розв'язність, апріорні оцінки, перетворення Лапласа.

ВСТУП

Математичне моделювання динамічних процесів фільтрації рідин у пористих середовищах є актуальним для експлуатації гребель і гідроелектростанцій, розроблення методів запобігання техногенним забрудненням підземних вод та пошуку способів очищення вод від забруднень, а також у плануванні використання підземних ресурсів. Дослідження таких процесів методами інженерних спостережень на практиці є складними і вартісними через необхідність встановлювати багато датчиків на великих територіях та різних глибинах для моніторингу динаміки переміщення рідин у реальному пористому середовищі. Отже, моделювання є дієвим способом прогнозування і, можливо, оптимізації методів раціональної експлуатації гребель і гідроелектростанцій, водо-, газо-, нафтовидобування, використання, очищення і запобігання забрудненню підземних вод та ресурсів.

[1] Робота виконана за фінансової підтримки Міністерства освіти і науки України: проєкт 0122U002026 та грант Міністерства освіти і науки України на перспективний розвиток наукового напряму «Математичні науки та природознавство» у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка.

Значний внесок у розроблення чисельно-аналітичних методів моделювання процесів фільтрації здійснено у роботах І.І. Ляшка і його колег із створеної ним наукової школи. Такі дослідження були затребувані для моделювання елементів проєкту побудови дніпровського каскаду гідроелектростанцій [1–3]. Для реалізації розрахунків цього проєкту було розроблено теорію узагальнених аналітичних функцій, на основі якої отримано точні верхні та нижні оцінки основних фільтраційних характеристик. У розвиток та узагальнення такого підходу розроблено чисельно-аналітичні методи сумарних зображень та мажорантних областей [2–4]. Такі методи широко застосовувалися для розрахунку моделей дніпровських намивних гребель і фільтраційних характеристик гребель Київської та Канівської ГЕС і багатьох інших гідротехнічних об'єктів [3–5]. Традиції школи І.І. Ляшка продовжують його учні і послідовники (у роботах [6–11] можна знайти додаткову інформацію та відповідні посилання).

Розрахунки фільтраційних характеристик гребель базуються на класичній задачі фільтрації ґрунтових вод в однорідному середовищі, яка моделюється рівнянням Пуассона зі складними граничними умовами на межі складних областей. Однак такий підхід до задач фільтрації не завжди є реальним та потребує узагальнення. Наприклад, моделюючи фільтрацію сланцевої нафти вважають, що пористе середовище складається з великої кількості «блоків» з низькою проникністю, розділених зв'язаною системою «розламів» з високою проникністю. Такі середовища природно називати слабко пористими. Для їхнього моделювання зазвичай використовують рівняння з розривними (на межі блоки–розлами) коефіцієнтами і постає проблема точного визначення таких неоднорідних середовищ.

Найпростіше визначити середовища, що мають періодичну структуру, оскільки для їхнього опису достатньо визначити лише структуру комірки періодичності і далі продовжити її так, як, наприклад, періодично укладають плиткою площі або стіни. Такі середовища тут розглядатимемо як модельні. Для деяких проблем фільтрації в таких середовищах можна отримати як наближення осереднені задачі зі сталими коефіцієнтами, що визначаються через задачі на комірках періодичності, і визначити оцінку точності таких наближень. Згаданий підхід осереднення буде представлено у цій роботі.

Розглянемо проблеми фільтрації для слабко пористих періодичних середовищ. Якщо потрібно враховувати структури таких середовищ під час моделювання, то отримуємо задачі фільтрації, залежні від малих параметрів, які характеризують мікромасштабність пористого середовища, щільність і проникність блоків. Параметр мікромасштабності ε у цих задачах природно виникає через велику кількість блоків. Залежно від взаємодії таких параметрів матимемо осереднені проблеми фільтрації, які є або задачами зі згортками, або задачами зі сталими коефіцієнтами для однорідних середовищ.

Такі осереднені моделі для задач з декількома малими параметрами та періодичними коефіцієнтами побудовано та досліджено у [12–16], зокрема сформульовано осереднені початково-крайові задачі зі згортками, які прийнято називати моделями із пам'яттю [17]. Результати отримано за припущення регулярності даних та однорідності початкових умов. Тут наведено деякі результати з цих робіт і презентовано узагальнення та уточнення цих результатів щодо задач фільтрації, зокрема для дуже малої щільності блоків. При цьому доведено теорему про розв'язність таких задач зі згортками для реальних даних і початкових умов. Для доведення цієї теореми застосовано метод перетворення Лапласа, розроблений в [18], та апріорні оцінки, які є оптимальними, оскільки узагальнюють класичні апріорні оцінки для параболічних задач зі сталими коефіцієнтами.

Метод осереднення спершу був розвинений відомими вченими I. Babuska, N.S. Bakhvalov, A. Bensoussan, J.-L. Lions та G. Papanicolau для спрощення та уточнення комп'ютерного моделювання процесів в композиційних матеріалах з мікромасштабною періодичною структурою (релевантні посилання можна знайти, наприклад, у [19, 20]). Відповідно до цього методу, моделювання процесу теплопровідності у композиті з такою структурою можна замінити моделюванням процесу теплопровідності в однорідному (осередненому) матеріалі з гарантованою точністю для малих ε. У математичному сенсі це означає, що розв'язки задачі теплопровідності зі складними періодичними коефіцієнтами є гарантовано близькими до розв'язку задачі зі сталими коефіцієнтами. Відповідні теореми та оцінки точності було доведено, наприклад, у [19, 20] для достатньо регулярних даних.

Згодом з'ясувалося, що найпростіше довести збіжність у відповідному просторі розв'язків задач зі складними періодичними коефіцієнтами до розв'язку задачі зі сталими коефіцієнтами. Такий підхід зазвичай не вимагає додаткової регулярності даних, але не забезпечує гарантованої точності апроксимації (див., наприклад, [20, 21]). Для суттєво нелінійних варіаційних нерівностей такий підхід реалізовано, наприклад, в [22, 23]. Осереднені задачі зі згортками було отримано з використанням такого підходу вперше в [21] для лінійних задач гідродинаміки в пористих середовищах. Детальнішу інформацію щодо таких проблем можна знайти в [24–26], де доведено і відповідні оцінки точності.

Задачі з періодичними коефіцієнтами мають два (мікро–макро) масштаби і відповідні швидкі та повільні змінні, які відображаються через швидкоосцилювальні коефіцієнти та характерний розмір пористих середовищ. Тому згодом виявилося, що найпростіше довести двомасштабну збіжність розв'язків таких задач до розв'язку деякої осередненої двомасштабної задачі. Цей підхід застосовано, наприклад, у [27–30]. Проте такі двомасштабні задачі залежать від швидких та повільних змінних і тип відповідних рівнянь для таких задач не є очевидним. До того ж точність апроксимацій у цьому випадку не було з'ясовано і доведено. Чисельні методи для таких двохмасштабних (мікро–макро) моделей розглянуто, наприклад, у [31, 32]. Детальнішу інформацію та відповідні посилання можна знайти у [30, 32].

Щоб отримати осереднені задач зі згортками, в роботах [13–16] використовували перетворення Лапласа для ізоморфної трансформації нестаціонарних задач у стаціонарні задачі з параметром, до яких застосовували асимптотичні методи, запропоновані у [33]. Після отримання асимптотики оцінки точності було доведено з використанням енергетичних методів. У цих задачах швидкі і повільні змінні розділені, а осереднені задачі зі згортками залежать тільки від повільних змінних. Аналогічний підхід використано у публікаціях [34–36]. Осереднення моделей, в яких спочатку є ефект пам'яті, що зберігається для осереднених моделей, розглянуто в [37, 38], де доведено твердження про збіжність.

Точну постановку задачі фільтрації сформульовано в розд. 1, де наведено осереднені задачі, твердження про розв'язність та оцінки точності. Як наслідок, представлено теореми про збіжності для загальних даних. Доведення таких тверджень наведено у розд. 2. В окремих випадках представлені тут результати анонсовані без доведень в [39, 40].

1. МОДЕЛІ ПРОЦЕСІВ ФІЛЬТРАЦІЇ ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩ

Розглянемо початково-крайові задачі для нестаціонарних рівнянь фільтрації в неоднорідних пористих середовищах. Як моделі пористих середовищ вибираємо періодичні середовища з малим коефіцієнтом мікромасштабності ε, які визначаються у такий спосіб.

Нехай для $n \geq 2$ множина G_1 є відкритою зв'язною 1-періодичною (періодичною з періодом одиниця за кожною з незалежних змінних $x_1, \ldots, x_n$) підмножиною $\mathbb{R}^n$ з локально Ліпшицевою межею і $G_0 = \mathbb{R}^n \setminus \overline{G_1}$ є множиною з локально Ліпшицевою межею. Для додатного ε позначимо

$$G_1^\varepsilon = \varepsilon G_1 = \{\varepsilon x : x \in G_1\}, \; G_0^\varepsilon = \varepsilon G_0 = \{\varepsilon x : x \in G_0\}.$$

Отже, множини $G_1 = G_1^1$ і $G_0 = G_0^1$ зі спільною межею ∂G_1 цілком визначаються множинами $Y_1 = G_1 \cap Y$ та $Y_0 = G_0 \cap Y$ з межею $\Gamma = \partial G_1 \cap Y$, де $Y = (0,1)^n$ позначає комірку періодичності. Задані множини Y_1 і Y_0 розбивають комірку періодичності Y на дві множини, що відповідають блокам і розламам, розділеним спільною межею Γ. Вважаємо, що Y_1 та Y_0 є множинами додатної міри Лебега $|Y_1|$ та $|Y_0|$ в $\mathbb{R}^n$.

Нехай також задано обмежену область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Множини G_0^ε та G_1^ε для достатньо малого фіксованого ε природно визначають моделі для пористих середовищ з ε-періодичною структурою $\Omega_0^\varepsilon = G_0^\varepsilon \cap \Omega$ та $\Omega_1^\varepsilon = G_1^\varepsilon \cap \Omega$, які відповідають блокам і розламам в області Ω та обмежені межею множини $\partial\Omega$. Приклади моделей таких пористих середовищ наведено на рис. 1.

Для таких пористих середовищ визначимо дійсні коефіцієнти щільності та матриці проникності блоків і розламів в області Ω рівностями

$$m_\varepsilon^\mu = \mu m_0(x/\varepsilon), \; r_\varepsilon^\mu = \mu r_0(x/\varepsilon) \text{ в } \Omega_0^\varepsilon \text{ і } m_\varepsilon^\mu = m_1(x/\varepsilon), \; r_\varepsilon^\mu = r_1(x/\varepsilon) \text{ в } \Omega_1^\varepsilon,$$

$$K_\varepsilon^\sigma = \sigma K_0(x/\varepsilon), \; b^\varepsilon = b_0(x/\varepsilon) \text{ в } \Omega_0^\varepsilon \text{ і } K_\varepsilon^\sigma = K_1(x/\varepsilon), \; b^\varepsilon = b_1(x/\varepsilon) \text{ в } \Omega_1^\varepsilon,$$

де μ і σ є додатними параметрами та ε є малим параметром. Надалі для визначеності вважатимемо $0 < \mu \leq 1$, $0 < \sigma \leq 1$ і $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ для деякого додатного ε_0. Передбачається, що всі функції та елементи матриць із цього визначення коефіцієнтів є Ліпшицевими та обмеженими для $y \in \overline{Y}$. Матриці $K_0(y)$ та $K_1(y)$ є симетричними та еліптичними для $y \in \overline{Y}$. Тут еліптичність означає, що існують такі сталі α та β, що нерівності

$$0 < \alpha E \leq K_0(y) \leq \beta E, \; 0 < \alpha E \leq K_1(y) \leq \beta E$$

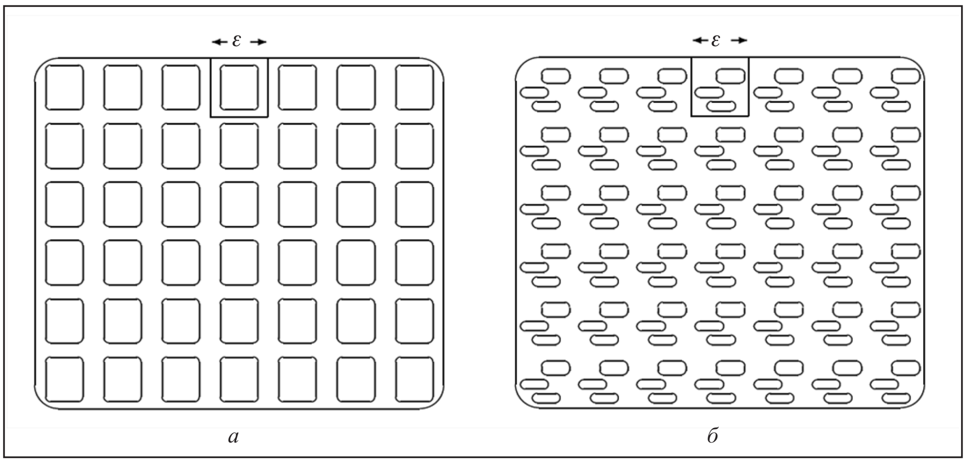

Рис. 1. Моделі пористих середовищ

виконуються в матричному розумінні для всіх $y \in \overline{Y}$, де E є одиничною матрицею. Отже, елементи матриці K_ε^σ розривні на межі $\partial\Omega_1^\varepsilon \setminus \partial\Omega$, що розділяє Ω_0^ε і Ω_1^ε, оскільки обмеження елементів такої матриці на Ω_0^ε і Ω_1^ε не можуть збігатися на цій межі для різних σ. Передбачається також, що значення функцій $m_0(y)$ і $m_1(y)$ відділені від нуля для $y \in \overline{Y}$ і тому

$$\alpha \le m_0 \le \beta,\ \alpha \le m_1 \le \beta,\ |r_0| \le \beta,\ |r_1| \le \beta,\ |b_0| \le \beta,\ |b_1| \le \beta.$$

Нехай задано функції $f \in L^2(0,\infty; H^{-1}(\Omega))$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ і вектор-функцію $g \in L^2(0,\infty; L^2(\Omega)^n)$. Тут і надалі будемо використовувати простори дійсних функцій, вигляд яких наведено, наприклад, у [17]. Визначимо $u = u(t,x)$ як розв'язок у сенсі розподілів початково-крайової задачі

$$\begin{gathered} m_\varepsilon^\mu u'_t - \operatorname{div} K_\varepsilon^\sigma (\nabla u + b^\varepsilon g) = r_\varepsilon^\mu f \ \text{ в } \Omega \times (0,\infty), \\ u|_{t=0} = u_0 \ \text{ в } \Omega,\ u = 0 \ \text{ на } \partial\Omega \times (0,\infty). \end{gathered} \tag{1}$$

Для фіксованих параметрів ε, σ і μ така задача має єдиний розв'язок [17]. Коефіцієнти рівняння цієї задачі є періодичними функціями, коміркою періодичності яких є куб. Можна було б вибрати як комірку періодичності довільний невироджений паралелепіпед. Однак завжди можна трансформувати такий паралелепіпед у куб за допомогою невиродженого перетворення, врахування якого в рівнянні задачі (1) зумовить еліптичність матриць K_0 та K_1, навіть якщо спершу ці матриці були одиничними. Доданок $b^\varepsilon g$ у рівнянні задачі (1) характеризує сили гравітації і матриця b^ε зазвичай є одиничною, але ця матриця також може змінюватися за невироджених перетворень.

Рівняння задачі (1) є параболічним. Однак для дуже малих σ ця параболічність вироджується і тоді отримуємо осереднену задачу зі згортками. Отже, насамперед розглянемо простий випадок $\sigma = 1$. Для визначення такої осередненої задачі потрібні додаткові позначення.

Нехай вектор-функції $N_1 = N_1(y)$ та $N_b = N_b(y)$ є 1-періодичними розв'язками задач

$$\begin{gathered} -\operatorname{div}_y (K_1^1(y) \nabla_y N_1(y)) = \operatorname{div}_y K_1^1(y) \ \text{ в } Y, \\ -\operatorname{div}_y (K_1^1(y) \nabla_y N_b(y)) = \operatorname{div}_y K_1^1(y) b^1(y) \ \text{ в } Y. \end{gathered}$$

Уведемо сталі та матриці зі сталими компонентами такими рівностями:

$$\begin{gathered} m = \mu \int_{Y_0} m_0(y)dy + \int_{Y_1} m_1(y)dy \equiv \mu m^0 + m^1,\ \ r = \mu \int_{Y_0} r_0(y)dy + \int_{Y_1} r_1(y)dy \equiv \mu r^0 + r^1, \\ \mathrm{A} = \int_Y (K_1^1(y) + K_1^1(y)\nabla_y N_1(y))dy,\ \ \mathrm{B} = \int_Y (K_1^1(y)b^1(y) + K_1^1(y)\nabla_y N_b(y))dy. \end{gathered} \tag{2}$$

Відомо [19], що такі розв'язки і матриці коректно визначені, а матриця А є симетричною та еліптичною. До того ж якщо b^ε є одиничною матрицею, тоді $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ за визначеннями (2).

Визначимо $v = v(t,x)$ як розв'язок осередненої початково-крайової задачі

$$\begin{gathered} m v'_t - \operatorname{div} (\mathrm{A} \nabla v) = r f + \operatorname{div} \mathrm{B} g \ \text{ в } \Omega \times (0,\infty), \\ v|_{t=0} = u_0 \ \text{ в } \Omega,\ v = 0 \ \text{ на } \partial\Omega \times (0,\infty). \end{gathered} \tag{3}$$

Рівняння задачі (3) є параболічними рівняннями зі сталими коефіцієнтами, тому ця задача має єдиний розв'язок [17]. Для таких задач має місце твердження.

Теорема 1. Нехай $f \in C_0^\infty([0,T]\times\Omega)$, $u_0 \in C_0^\infty(\Omega)$, $g \in C_0^\infty([0,T]\times\Omega)^n$, T — фіксоване додатне число, u — розв'язок задачі (1), v — розв'язок задачі (3) та $\sigma = 1$. Тоді

$$\| u - v \|^2_{C^0([0,T];\, L^2(\Omega_1^\varepsilon))} + \mu \| u - v \|^2_{C^0([0,T];\, L^2(\Omega_0^\varepsilon))} \le C\varepsilon,$$

де стала C не залежить від μ і ε за умов $0 < \mu \le 1$ та $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ для відповідного додатного ε_0.

Оцінка теореми 1 є відомою [19, 20] для фіксованого μ. Для випадку, що розглядається тут, доведення цієї оцінки повторює доведення наслідку 2.5 з роботи [16] з урахуванням зауважень 2.3 і 2.7. У теоремі 1 оцінюється частина енергетичної норми для задачі (1). Без сумніву, що ця частина залежить від параметра μ, оскільки коефіцієнт щільності залежить від μ на частині області Ω та оцінка є рівномірною за цим параметром. Використовуючи методи [33] для побудови додаткових складових асимптотики розв'язку, можна оцінити і всю енергетичну норму. Однак точне формулювання такої оцінки дуже громіздке.

Отже, замість розв'язання задачі (1) (наприклад, чисельного) можна розв'язувати задачу (3) з гарантованою точністю для малих ε. Природно, що чисельне розв'язання задачі (1) значно складніше, ніж розв'язання задачі (3), оскільки потрібна дуже дрібна розрахункова сітка, щоб врахувати геометрію великої кількості блоків в області Ω. Оцінка теореми 1 є рівномірною за параметром μ. А втім як наслідок теореми 1 для малих μ буде доведено таке твердження.

Теорема 2. Нехай $f \in C_0^\infty([0,T]\times\Omega)$, $u_0 \in C_0^\infty(\Omega)$, $g \in C_0^\infty([0,T]\times\Omega)^n$, T — фіксоване додатне число, u — розв'язок задачі (1), v_0 — розв'язок задачі (3) для $\mu = 0$ та $\sigma = 1$. Тоді

$$\| u - v_0 \|^2_{C^0([0,T];\, L^2(\Omega_1^\varepsilon))} + \mu \| u - v_0 \|^2_{C^0([0,T];\, L^2(\Omega_0^\varepsilon))} \le C(\varepsilon + \mu^2),$$

де стала C не залежить від μ і ε за умов $0 < \mu \le \mu_0$ та $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ для відповідних μ_0 і ε_0.

Для визначення задачі (3) для $\mu = 0$ слід вибрати $\mu = 0$ у рівностях (2), що частково зменшує щільність і додатково спрощує задачу (3) для випадку $\sigma = 1$ і малих μ. Відповідно для малих σ і фіксованих μ ситуація ускладнюється і потребує додаткових позначень.

Нехай вектор-функції $N_1^1 = N_1^1(y)$ та $N_b^1 = N_b^1(y)$ є 1-періодичними розв'язками задач

$$-\operatorname{div}_y (K_1 \nabla_y N_1^1) = \operatorname{div}_y K_1 \ \text{ в } Y_1, \ -(K_1 \nabla_y N_1^1, \Upsilon) = (K_1, \Upsilon) \ \text{ на } \Gamma,$$

$$-\operatorname{div}_y (K_1 \nabla_y N_b^1) = \operatorname{div}_y K_1 b_1 \ \text{ в } Y_1, \ -(K_1 \nabla_y N_b^1, \Upsilon) = (K_1 b_1, \Upsilon) \ \text{ на } \Gamma,$$

де Υ позначає зовнішню нормаль до межі $\Gamma = \partial Y_1$. Такі задачі називають задачами на комірках. Далі введемо сталі та матриці зі сталими компонентами такими рівностями:

$$m^1 = \int_{Y_1} m_1(y)dy, \ r^1 = \int_{Y_1} r_1(y)dy, \tag{4}$$

$$\mathrm{A}^1 = \int_{Y_1} (K_1(y) + K_1(y) \nabla_y N_1^1(y))\, dy, \ \mathrm{B}^1 = \int_{Y_1} (K_1^1(y) b^1(y) + K_1(y) \nabla_y N_b^1(y)) dy.$$

Відомо [19], що такі розв'язки і матриці коректно визначені, а матриця A^1 є симетричною і еліптичною.

Нехай функції $q = q(t, y)$ та $p = p(t, y)$ є 1-періодичними розв'язками нестаціонарних задач

$$\begin{gathered}\mu m_0 q'_t - \theta \operatorname{div}_y (K_0 \nabla_y q) = 0 \text{ в } Y_0 \times (0, \infty),\\ q\big|_{t=0} = 1 \text{ в } Y_0,\ q = 0 \text{ на } \overline{Y}_1 \times (0, \infty),\\ \mu m_0 p'_t - \theta \operatorname{div}_y (K_0 \nabla_y p) = 0 \text{ в } Y_0 \times (0, \infty),\\ p\big|_{t=0} = r_0 / m_0 \text{ в } Y_0,\ p = 0 \text{ на } \overline{Y}_1 \times (0, \infty),\end{gathered} \tag{5}$$

де μ та $\theta = \sigma / \varepsilon^2$ розглядаються як параметри. Фактично у цих рівняннях можна виконати ділення на μ і розглядати залежність тільки від одного параметра $\nu = \theta / \mu$. Параметри θ та ν визначаються параметрами коефіцієнтів задачі (1) для блоків і розламів та можуть набувати довільних додатних значень, оскільки розглядається випадок малих σ та ε. У реальних задачах ці параметри θ та ν також можуть набувати різних значень, але вони фіксовані для конкретного пористого середовища.

Відомо [17], що розв'язки задачі (5) визначено для фіксованих μ і θ. До того ж функції

$$M(t) = \int_{Y_0} m_0 q'_t (t, y)\, dy,\quad R(t) = \int_{Y_0} m_0 p'_t (t, y) dy \tag{6}$$

визначено як елементи простору $L^1(0, \infty)$ рівномірно для μ і θ відповідно до [16, лема 4.4].

Осереднена початково-крайова задача зі згортками для функції $v = v(t, x)$ має вигляд

$$\begin{gathered}m^1 v'_t - \mu M * (v'_t) - \operatorname{div} (A^1 \nabla v) = r^1 f - \mu R * f + \operatorname{div} B^1 g \text{ в } \Omega \times (0, \infty),\\ v\big|_{t=0} = u_0 \text{ в } \Omega,\ v = 0 \text{ на } \partial\Omega \times (0, \infty),\end{gathered} \tag{7}$$

де символ $*$ позначає оператор згортки відносно t; наприклад, за визначенням маємо

$$M * (v'_t) = \int_0^t M(t - \tau)(v'_\tau (\tau, x))\, d\tau.$$

Для достатньо гладких даних та $u_0 = 0$ єдиний розв'язок задачі (7) існує [16]. Коефіцієнти рівняння цієї задачі залежать від μ. Такої залежності можна формально позбутися, представляючи розв'язки задач (5) у вигляді $q = \widetilde{q}(t / \mu, y)$ та $p = \widetilde{p}(t / \mu, y)$, оскільки коефіцієнти з (6) визначаються похідними. Тоді рівняння (5) також не залежатимуть від μ, але залишається залежність від θ. Записуючи розв'язки задач (5) у вигляді $q = \widetilde{q}(t\nu, y)$ та $p = \widetilde{p}(t\nu, y)$, можна позбутися в (5) залежності від μ і θ, але залежність від θ може мати місце в рівнянні задачі (7). Тим не менш, буде доведено таке твердження.

Теорема 3. Для $f \in L^2(0, \infty; H^{-1}(\Omega))$, $g \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega)^n)$ і $u_0 \in L^2(\Omega)$ існує єдиний розв'язок $v \in L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega))$ задачі (7) та знайдеться додатна стала C, яка залежить тільки від α, β, $|Y_1|$, $|Y_0|$ та не залежить від μ і θ і така, що

$$\begin{gathered}\| v'_t \|_{L^2(0, \infty; H^{-1}(\Omega))} + \| v \|_{L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega))} \le\\ \le C(\| f \|_{L^2(0, \infty; H^{-1}(\Omega))} + \| g \|_{L^2(0, \infty; L^2(\Omega)^n)} + \| u_0 \|_{L^2(\Omega)})\end{gathered}$$

та $v \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ для додатного T. До того ж виконано включення $v'_t \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega))$, якщо $f \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega))$, $g \in L^2(0, \infty; H^1(\Omega)^n)$ і $u_0 \in H_0^1(\Omega)$.

Для доведення теореми використаємо перетворення Лапласа, яке є ізоморфізмом у відповідному сенсі [18]. Оцінка теореми 3 не може бути покращена як енергетична оцінка, оскільки є класичною апріорною оцінкою [17] для задачі теплопровідності, з якою задача (7) збігається за умови $\mu = 0$. Після застосування перетворення Лапласа до задачі (7) згортка із $-\mu M(t)$ переходить у множення на функцію $-\mu\hat{M}(z)$, яка визначена на верхній комплексній півплощині. Буде перевірено, що така функція додатна та обмежена на цій півплощині. Отже, у зображенні Лапласа щільність для осередненої задачі (7) визначається сумою сталої m^1 та додатної обмеженої функції $-\mu\hat{M}(z)$ і, так би мовити, розподіляється нетривіально по всій півплощині. Однак за умов теорем 1 та 2 щільність осереднених задач є сталою. Розв'язки задачі (7) дійсно наближають розв'язки задачі (1) відповідно до такого твердження.

Теорема 4. Нехай $f \in C_0^\infty((0,T)\times\Omega)$, $g \in C_0^\infty((0,T)\times\Omega)^n$, $u_0 = 0$, додатне T фіксоване, u є розв'язком задачі (1) та v є розв'язком задачі (7). Тоді

$$\| u - v \|^2_{C^0([0,T];\, L^2(\Omega_1^\varepsilon))} + \mu \| u - v + q_\varepsilon * (v'_t) + p_\varepsilon * f \|^2_{C^0([0,T];\, L^2(\Omega_0^\varepsilon))} \le C(\varepsilon + \sigma),$$

де $q_\varepsilon = q(t, x/\varepsilon)$ і $p_\varepsilon = p(t, x/\varepsilon)$ визначаються розв'язками задач (6) та стала C не залежить від μ, σ, ε за умов $0 < \mu \le 1$, $0 < \sigma \le \sigma_0$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ для відповідних ε_0 і σ_0.

Оцінку теореми 4 доведено в [16, теорема 2.2, зауваження 2.3]. Як і в теоремах 1 та 2, в теоремі 4 оцінюється частина енергетичної норми для задачі (1). Використовуючи методи з [33] для визначення асимптотики, можна значно покращити показники малого параметра σ у цій оцінці. Враховуючи додаткові складові асимптотики, можна оцінити і всю енергетичну норму. Однак точні формулювання таких оцінок дуже громіздкі.

Отже, замість розв'язання задачі (1) можна розв'язувати задачу (7) з гарантованою точністю для малих ε і σ. Крім того, для чисельного розв'язання задачі (1) потрібна дуже дрібна розрахункова сітка, щоб врахувати геометрію великої кількості блоків у області Ω та осцилювальні доданки, появу яких відображено в оцінці теореми 4. Такі доданки значно посилюють загальну енергію для задачі (1) відповідно до такого наслідку теореми 4.

Теорема 5. В умовах теореми 4 нехай $q_1 = q(t, y)$, $p_1 = p(t, y)$, $w_1 = \nabla v + (\nabla_y N_1^1)\nabla v + (\nabla_y N_b^1) g$, $w_0 = v + q_1 * (v'_t) + p_1 * f$, u є розв'язком задачі (1) та v є розв'язком задачі (7). Тоді

$$\| E^\varepsilon_{\mu\sigma} - E_1^g - E^f_{\mu\theta} \|^2_{C^0[0,T]} \le C(\varepsilon + \sigma),$$

де стала C не залежить від μ, σ, ε за умов $0 < \mu \le 1$, $0 < \sigma \le \sigma_0$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ для відповідних ε_0 і σ_0 та введено позначення для енергій задач (1) та (7) за формулами

$$E^\varepsilon_{\mu\sigma}(t) = \int_\Omega m^\mu_\varepsilon(x) \frac{u^2}{2}\, dx + \int_0^t \int_\Omega (K^\sigma_\varepsilon(x)\nabla u, \nabla u)\, dx,$$

$$E_1^g(t) = \int_\Omega \int_{Y_1} m_1(y) \frac{v^2}{2}\, dy dx + \int_0^t \int_\Omega \int_{Y_1} (K_1(y) w_1, w_1)\, dy dx d\tau,$$

$$E^f_{\mu\theta}(t) = \mu \int_\Omega \int_{Y_0} m_0(y) \frac{w_0^2}{2}\, dy dx + \theta \int_0^t \int_\Omega \int_{Y_0} (K_0(y)\nabla_y w_0, \nabla_y w_0)\, dy dx d\tau.$$

Для фіксованих μ і θ величина $E_{\mu\theta}^{f}$ у цій теоремі істотно залежить від $q_1 = q(t, y)$ і $p_1 = p(t, y)$ та характеризує енергію, яка поглинається на мікрорівні блоків. Ймовірно, саме для подолання цього негативного явища використовують значні зусилля під час видобутку сланцевої нафти. Можливо, таке поглинання енергії зумовлює також тривале просушування мокрої деревини. Зазвичай, блоки в таких пористих матеріалах не є періодичними, але можливим є створення подібних штучних середовищ з періодичною структурою на кшталт блокових фільтрів. Оцінку теореми 5 доведено також в [16, наслідок 2.6]. До речі, сума енергій $E_1^g + E_{\mu\theta}^{f}$ надає деяке уявлення про відповідну двомасштабну проблему для задачі (1).

Для малих σ, θ і фіксованих μ оцінка теореми 4 зберігається відповідно до [16, наслідок 2.2], де потрібно врахувати зауваження 2.3 та вибрати $s=1$. Однак для малих σ, μ і довільних θ оцінка теореми 4 частково спрощується відповідно до такого твердження.

Теорема 6. Нехай $f \in C_0^\infty((0, T)\times\Omega)$, $g \in C_0^\infty((0, T)\times\Omega)^n$ і $u_0 = 0$, додатне T фіксоване, u є розв'язком задачі (1) та v_0 є розв'язком задачі (7) для $\mu = 0$. Тоді

$$||u - v_0||^2_{C^0([0,T];\, L^2(\Omega_1^\varepsilon))} + \mu\, ||u - v_0 + q_\varepsilon * (v_0)'_t + p_\varepsilon * f\, ||^2_{C^0([0,T];\, L^2(\Omega_0^\varepsilon))} \le$$
$$\le C(\varepsilon + \sigma + \mu^2),$$

де $q_\varepsilon = q(t, x/\varepsilon)$ і $p_\varepsilon = p(t, x/\varepsilon)$ визначаються розв'язками задач (6) та стала C не залежить від μ, σ, ε за умов $0 < \sigma \le \sigma_0$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, $0 < \mu \le \mu_0$ для відповідних ε_0, σ_0 і μ_0.

Оцінку теореми 6 доведено в [16, наслідок 2.1, зауваження 2.3]. Отже, за умов цієї теореми в осередненій задачі (7) для $\mu = 0$ зникають згортки, але в основній асимптотиці зберігаються осцилювальні доданки зі згортками, що зумовлено рівномірністю такої оцінки щодо θ. Проте якщо є додаткова інформація про параметр θ, тоді відповідна оцінка спрощується. Як наслідок теореми 6 для малих μ і $\theta \ge 1$ буде доведено таке твердження.

Теорема 7. Нехай $f \in C_0^\infty((0, T)\times\Omega)$, $g \in C_0^\infty((0, T)\times\Omega)^n$ і $u_0 = 0$, додатне T фіксоване, u є розв'язком задачі (1), v_0 є розв'язком задачі (7) для $\mu = 0$ та $\theta \ge 1$. Тоді

$$||u - v_0||^2_{C^0([0,T];\, L^2(\Omega_1^\varepsilon))} + \mu\, ||u - v_0\, ||^2_{C^0([0,T];\, L^2(\Omega_0^\varepsilon))} \le C(\varepsilon + \sigma + \mu^2),$$

де C не залежить від σ, ε, μ за умов $0 < \sigma \le \sigma_0$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, $0 < \mu \le \mu_0$ для відповідних ε_0, σ_0 і μ_0.

Оцінка цієї теореми не змінюється, якщо припустити, що $\theta \ge C$, де C не залежить від μ, σ і ε. Зазначимо, що випадок, коли $\theta = 1$ (це відповідає задачі (1)), прийнято називати моделлю подвійної пористості відповідно до [41], де вперше розглядалася така проблема для $\mu = 1$ без доведення оцінок точності та тверджень про збіжність розв'язків. У цьому випадку справджується оцінка теореми 4.

Зазначимо також, що для малих σ, θ^{-1} і довільних μ оцінка теореми 4 теж частково спрощується відповідно до такого твердження.

Теорема 8. Для $f \in C_0^\infty((0, T)\times\Omega)$, $g \in C_0^\infty((0, T)\times\Omega)^n$ і $u_0 = 0$ нехай додатне T фіксоване, u є розв'язком задачі (1), v_0 є розв'язком задачі (3) для $\mathrm{A} = \mathrm{A}^1$ і $\mathrm{B} = \mathrm{B}^1$ з визначення (4). Тоді

$$||u - v_0||^2_{C^0([0,T];\, L^2(\Omega_1^\varepsilon))} + \mu\, ||u - v_0||^2_{C^0([0,T];\, L^2(\Omega_0^\varepsilon))} \le C(\varepsilon + \sigma + \theta^{-1}),$$

де стала C не залежить від σ, ε, θ^{-1}, μ за умов $0<\sigma\le\sigma_0$, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, $0<\theta^{-1}\le\vartheta_0$, $0<\mu\le 1$ для відповідних ε_0, σ_0 і ϑ_0.

Оцінку теореми 8 доведено в [16, наслідок 2.5, зауваження 2.3]. У цій теоремі розглядається випадок не дуже малих σ (наприклад, $\sigma=\varepsilon$), оскільки за визначенням $\theta^{-1}=\varepsilon^2/\sigma$. Отже, за умов теореми 8 осереднена задача збігається із задачею (3), в якій потрібно вибрати матриці зі сталими компонентами $\mathrm{A}=\mathrm{A}^1$ і $\mathrm{B}=\mathrm{B}^1$, визначені у рівностях (4). Як наслідок такої теореми для малих σ, θ^{-1} і μ буде доведено таке твердження.

Теорема 9. Для $f\in C_0^\infty((0,T)\times\Omega)$, $g\in C_0^\infty((0,T)\times\Omega)^n$ і $u_0=0$ нехай додатне T фіксоване, u є розв'язком задачі (1) та v_0 є розв'язком задачі (7) для $\mu=0$. Тоді

$$\|u-v_0\|^2_{C^0([0,T];\,L^2(\Omega_1^\varepsilon))}+\mu\|u-v_0\|^2_{C^0([0,T];\,L^2(\Omega_0^\varepsilon))}\le C(\varepsilon+\sigma+\mu^2+\theta^{-1}),$$

де стала C не залежить від σ, ε, θ^{-1}, μ за умов $0<\sigma\le\sigma_0$, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, $0<\theta^{-1}\le\vartheta_0$, $0<\mu\le\mu_0$ для відповідних ε_0, σ_0, ϑ_0 і μ_0.

Зауважимо, що задача (7) для $\mu=0$ збігається з задачею (3), в якій $\mathrm{A}=\mathrm{A}^1$ і $\mathrm{B}=\mathrm{B}^1$. Отже, іноді залежно від малості тих чи інших параметрів осереднена задача визначається параболічним рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Для $\mu=1$ такі осереднені задачі отримано та обґрунтовано в [12–14], де доведено аналогічні оцінки і для регулярних ненульових u_0. Проте у загальному випадку рівномірно за параметрами усе-таки справджується оцінка теореми 4, яка відображає появу осцилювальних доданків зі згортками в асимптотиці, що характеризують конкретний внесок у поглинання енергії на мікрорівні. Утім іноді такий внесок не є суттєвим у межах прийнятої точності у відповідних теоремах, де немає осцилювальних доданків. Наприклад, як наслідок теореми 9 буде доведено таке твердження.

Теорема 10. За умов теореми 9 нехай u є розв'язком задачі (1) та v є розв'язком задачі (7) для $\mu=0$ та $w_1=\nabla v+(\nabla_y N_1^1)\nabla v+(\nabla_y N_b^1)g$. Тоді

$$\|E^\varepsilon_{\mu\sigma}-E^g_1\|^2_{C^0[0,T]}\le C(\varepsilon+\sigma+\mu^2+\theta^{-1}),$$

де стала C не залежить від σ, ε, θ^{-1}, μ за умов $0<\sigma\le\sigma_0$, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, $0<\theta^{-1}\le\vartheta_0$, $0<\mu\le\mu_0$ для відповідних ε_0, σ_0, ϑ_0, μ_0 та використано позначення з теореми 5 для енергій задач (1) та (7).

У наведених оцінках точності передбачається регулярність заданих функцій. Використовуючи апроксимацію гладкими функціями, з таких оцінок легко вивести твердження про збіжність. Як наслідок теореми 9 доведемо таке твердження.

Теорема 11. Для $f\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $g\in L^2(0,T;L^2(\Omega)^n)$ і $u_0=0$ нехай додатне T фіксоване, u є розв'язком задачі (1) та v_0 є розв'язком задачі (7) для $\mu=0$. Тоді

$$\|u-v_0\|^2_{L^\infty(0,T;\,L^2(\Omega_1^\varepsilon))}+\mu\|u-v_0\|^2_{L^\infty(0,T;\,L^2(\Omega_0^\varepsilon))}\to 0$$

за умов $\sigma\to 0$, $\varepsilon\to 0$, $\theta^{-1}\to 0$ і $\mu\to 0$.

Відповідно як наслідок загальних теорем 3 та 4 доведемо таке твердження.

Теорема 12. Для $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $g \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^n)$ і $u_0 = 0$ нехай додатне T фіксоване, u є розв'язком задачі (1) та v є розв'язком задачі (7). Тоді

$$||u - v||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1^\varepsilon))} + \mu ||u - v + q_\varepsilon * (v'_t) + p_\varepsilon * f||^2_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega_0^\varepsilon))} \to 0$$
$$\text{для } \varepsilon \to 0 \text{ і } \sigma \to 0,$$

де $q_\varepsilon = q(t, x/\varepsilon)$ і $p_\varepsilon = p(t, x/\varepsilon)$ визначаються розв'язками задач (6).

Поява простору $L^1(\Omega_0^\varepsilon)$ у другому доданку не є випадковою і зумовлена необхідністю виконувати множення функцій з $L^2(\Omega_0^\varepsilon)$, оскільки добуток $q_\varepsilon \in L^2(\Omega_0^\varepsilon)$ і $v'_t \in L^2(\Omega_0^\varepsilon)$ визначений як елемент $L^1(\Omega_0^\varepsilon)$ для майже всіх $t \in [0,T]$, але може бути невизначеним як елемент $L^2(\Omega_0^\varepsilon)$. Аналогічні твердження про збіжність можна легко вивести з відповідних оцінок точності, наведених у цьому розділі. Зазначимо, що множина Y_0 може мати декілька зв'язних компонент, замикання яких не перетинаються, як на рис. 1, *б*. Тому задачі (5) слід розглядати на кількох множинах окремо, а інтеграли в (6) є сумами інтегралів за цими множинами. І на противагу, якби Y_1 було представлено як кілька зв'язних множин із диз'юнктними замиканнями (як множини на торі), то осереднена задача визначалася б багатофазною системою рівнянь зі згортками. Такі осереднені задачі було сформульовано і обґрунтовано в [14–16].

2. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА І ДОВЕДЕННЯ ТВЕРДЖЕНЬ

Для доведення теореми 3 скористаємося методами перетворення Лапласа, яке є ізоморфізмом відповідних просторів [18]. Для повноти стисло наведемо точні формулювання. Такий підхід дає змогу повністю узагальнити класичні результати для задачі теплопровідності (задачі (7) за умови $\mu = 0$) на задачі з ядрами $M(t)$ і $R(t)$, які визначаються як елементи простору $L^1(0,\infty)$. Цей підхід прийнятний і для інших задач зі згортками.

Для фіксованого ω простір $L^2_\omega(0,\infty;L^2(\Omega))$ задамо як множину функцій з $L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega))$, для яких величина $||u||_{L^2_\omega(0,\infty;L^2(\Omega))} = ||e^{-\omega t}u||_{L^2(0,\infty;L^2(\Omega))}$ є скінченною. Остання рівність визначає норму простору $L^2_\omega(0,\infty;L^2(\Omega))$, щодо якої такий простір є повним [18].

Згідно з [18] під простором $E_\omega(L^2(\Omega)) = E_\omega(\mathbb{C}_\omega; L^2(\Omega))$ розуміємо множину комплексних функцій $U(z) = U(z_1 + iz_2)$ зі значеннями в $L^2(\Omega)$, неперервних і голоморфних на комплексній півплощині $\mathbb{C}_\omega = \{z \in \mathbb{C} : z = z_1 + iz_2, z_1 > \omega\}$, для яких є скінченною величина

$$||U||^2_{E_\omega(L^2(\Omega))} = \int_{-\infty}^{\infty} ||U(\omega + iz_2)||^2_{L^2(\Omega)}\, dz_2.$$

Під інтегралом розуміємо границю в середньому інтеграла від $-\mathrm{K}$ до K для $\mathrm{K} \to \infty$. Остання рівність визначає норму в просторі $E_\omega(L^2(\Omega))$.

Наведемо варіант теореми Пелі–Вінера, доведений у [18].

Теорема 13. Для фіксованого ω перетворення Лапласа $(w \mapsto \hat{w})$

$$\hat{w}(z) = \int_0^\infty e^{-zt} w(t)dt = W(z)$$

є бієктивним гомеоморфізмом з $L^2_\omega(0,\infty;L^2(\Omega))$ в $E_\omega(L^2(\Omega))$.

Аналогічно визначають простори $E_\omega(H_0^1(\Omega))$ і $E_\omega(H^{-1}(\Omega))$, для яких також виконується аналог теореми 13. Крім того [18], перетворення Лапласа комутує з диференціюванням за просторовими змінними, а оператор згортки відносно t трансформується перетворенням Лапласа в оператор поточкового множення відносно $z \in \mathbb{C}$.

Уведемо позначення $V = \hat{v},\ Q = \hat{q},\ P = \hat{p},\ G = \hat{g}$ та $F = \hat{f}$ для перетворень Лапласа для розв'язків та даних. Застосовуючи перетворення Лапласа до задачі (7), отримуємо еквівалентну задачу

$$z(m^1 - \mu\hat{M}(z))V - \operatorname{div}(\mathrm{A}^1 \nabla V) = \mathbb{F} \text{ в } \Omega,\ V = 0 \text{ на } \partial\Omega \tag{8}$$

для $z \in \mathbb{C}$, де

$$\mathbb{F} = (r^1 - \mu\hat{R}(z))F(z) + (m^1 - \mu\hat{M}(z))u_0 + \operatorname{div} \mathrm{B}^1 G(z). \tag{9}$$

Для фіксованого $z \in \mathbb{C}$ задача (8) є крайовою задачею для еліптичного рівняння з комплексними коефіцієнтами в молодших доданках. Тому [18] така задача розв'язна для всіх $z \in \mathbb{C}$, крім, можливо, дискретної множини в $\mathbb{C}$. Для доведення розв'язності задачі (8) буде достатньо відокремити значення $z \in \mathbb{C}$ від такої дискретної множини за допомогою апріорних оцінок.

Застосовуючи перетворення Лапласа до задач (5), отримуємо еквівалентні задачі

$$\begin{aligned} &z\mu m_0 Q - \theta \operatorname{div}_y (K_0 \nabla_y Q) = \mu m_0 \text{ в } Y_0,\ Q = 0 \text{ на } \overline{Y}_1,\\ &z\mu m_0 P - \theta \operatorname{div}_y (K_0 \nabla_y P) = \mu r_0 \text{ в } Y_0,\ P = 0 \text{ на } \overline{Y}_1. \end{aligned} \tag{10}$$

Помножимо перше рівняння з (10) на $\bar{z}\overline{Q}$, а потім, інтегруючи по множині Y_0, матимемо

$$\int_{Y_0} m_0 |zQ|^2\, dy + \bar{z}\mu^{-1}\theta \int_{Y_0} (K_0 \nabla_y Q, \nabla_y \overline{Q}) dy = \int_{Y_0} m_0 \bar{z}\overline{Q}\, dy.$$

Використовуючи комплексне спряження і симетрію K_0, отримуємо

$$\int_{Y_0} m_0 |zQ|^2\, dy + z\mu^{-1}\theta \int_{Y_0} (K_0 \nabla_y Q, \nabla_y \overline{Q}) dy = \int_{Y_0} m_0 zQ\, dy.$$

Підсумовуючи ці рівності, унаслідок еліптичності K_0 для $z \in \mathbb{C}_0$ отримуємо

$$\begin{aligned} \alpha \| zQ \|^2_{L^2(Y_0)} + z_1 \alpha\mu^{-1}\theta \| \nabla_y Q \|^2_{L^2(Y_0)} &\le \operatorname{Re} \int_{Y_0} m_0 zQ\, dy \le \beta \int_{Y_0} |zQ|\, dy \le \\ &\le \beta \| zQ \|_{L^2(Y_0)} |Y_0|^{1/2} \le \alpha^{1/2} \| zQ \|_{L^2(Y_0)} \alpha^{-1/2} \beta |Y_0|^{1/2} \le \\ &\le (\alpha/2) \| zQ \|^2_{L^2(Y_0)} + (\alpha^{-1}/2)\beta^2 |Y_0|. \end{aligned}$$

Таким чином, для $z \in \mathbb{C}_0$ можна зробити висновок, що

$$\| zQ \|^2_{L^2(Y_0)} \le \alpha^{-2}\beta^2 |Y_0|. \tag{11}$$

Крім того, з означень і рівностей (6) випливає, що

$$\hat{M} = \int_{Y_0} m_0 (zQ(z, y) - 1) dy \tag{12}$$

та

$$|\hat{M}|\le\int_{Y_0}|zm_0Q(z,y)-m_0|\,dy\le\beta\,||zQ||_{L^2(Y_0)}|Y_0|^{1/2}+\beta|Y_0|\le(\beta+\alpha^{-1}\beta^2)|Y_0|$$

унаслідок (11). Тому функція $\hat{M}$ обмежена на $\mathbb{C}_0$, оскільки можна безпосередньо перевірити, що задачі (5) мають єдині розв'язки для кожного $z\in\mathbb{C}_0$, голоморфні і неперервні унаслідок теореми 13, а також відомі властивості розв'язків задач (5), встановлених, наприклад, в [17].

Аналогічно множимо друге рівняння з (10) на $\bar{z}\bar{P}$ та, аргументуючи як і вище, маємо

$$|\hat{R}|\le\int_{Y_0}|zm_0P(z,y)-r_0|\,dy\le(\beta+\alpha^{-1}\beta^2)|Y_0|.$$

Надалі множимо перше рівняння з (10) на $z\bar{z}\bar{Q}$ та, інтегруючи по множині Y_0, отримуємо

$$z\int_{Y_0}(\bar{z}\bar{Q}-1)m_0(zQ-1)\,dy+z\int_{Y_0}m_0(zQ-1)\,dy+\mu^{-1}\theta\int_{Y_0}(K_0\nabla_y zQ,\nabla_y\bar{z}\bar{Q})\,dy=0.$$

Отже, використовуючи визначення (12) і спряження, одержуємо

$$-z\hat{M}=z\int_{Y_0}m_0(zQ-1)^2\,dy+\mu^{-1}\theta\int_{Y_0}(K_0\nabla_y zQ,\nabla_y\bar{z}\bar{Q})\,dy,$$

$$-\bar{z}\bar{\hat{M}}=\bar{z}\int_{Y_0}m_0(zQ-1)^2\,dy+\mu^{-1}\theta\int_{Y_0}(K_0\nabla_y zQ,\nabla_y\bar{z}\bar{Q})\,dy.$$

Підсумовуючи ці дві рівності, унаслідок еліптичності K_0 отримуємо

$$\mathrm{Re}\,(-z\hat{M})>0,\ \mathrm{Re}(-\hat{M})>0\ \text{для}\ z\in\mathbb{C}_0,\tag{13}$$

де остання нерівність перевіряється множенням останніх двох рівностей на $1/z$ й $1/\bar{z}$ відповідно. Потрібно враховувати, що рівність $zQ=1$ не може виконуватися на Y_0 для $z\in\mathbb{C}_0$, оскільки $zQ=0$ на межі ∂Y_0 за визначенням.

Помножимо рівняння з (8) на $\bar{V}$ та, інтегруючи по Ω, одержуємо

$$(zm^1-\mu z\hat{M})\int_{\Omega}|V|^2\,dx+\int_{\Omega}(\mathrm{A}^1\nabla V,\nabla\bar{V})dx=\int_{\Omega}\mathbb{F}\bar{V}dx.$$

Підсумуємо цю рівність із спряженою і унаслідок еліптичності A^1 та (13) для $z\in\mathbb{C}_0$ отримуємо

$$z_1\alpha|Y_1|\,||V||^2_{L^2(\Omega)}+\alpha|Y_1|\,||V||^2_{H^1_0(\Omega)}\le\mathrm{Re}\int_{\Omega}(\mathbb{F}\bar{V})\,dx\le||\mathbb{F}||_{H^{-1}(\Omega)}\,||V||_{H^1_0(\Omega)},$$

тому

$$\alpha|Y_1|\,||V||^2_{H^1_0(\Omega)}\le||\mathbb{F}||_{H^{-1}(\Omega)}\le$$
$$\le(\beta+(\beta+\alpha^{-1}\beta^2)|Y_0|)(||F||_{H^{-1}(\Omega)}+||u_0||_{H^{-1}(\Omega)}+||G||_{L^2(\Omega)^n})$$

унаслідок (9), оскільки $m^1|Y_1|^{-1}$, $r^1|Y_1|^{-1}$, $\hat{M}$ і $\hat{R}$ є обмеженими та $\mu\le1$. Наприклад, $m^1=m_1|Y_1|$ відповідно до (4) у разі, коли m_1 є сталою.

Отже, доведено таке твердження.

Лема 1. Для кожного $z\in\mathbb{C}_0$, $f\in L^2(0,\infty;H^{-1}(\Omega))$, $g\in L^2(0,\infty;L^2(\Omega)^n)$ і $u_0\in H^{-1}(\Omega)$ існує єдиний розв'язок $V\in H^1_0(\Omega)$ задачі (8) та знайдеться додатна стала C, яка залежить тільки від α, β, $|Y_1|$, $|Y_0|$ і така, що

$$||V||_{H^1_0(\Omega)}\le C(||F||_{H^{-1}(\Omega)}+||G||_{L^2(\Omega)^n}+||u_0||_{H^{-1}(\Omega)}).\tag{14}$$

Такі розв'язки задачі (8) мають додаткові властивості, а саме, як і у [16] перевіряємо неперервність і голоморфність розв'язків відповідно до наступних двох тверджень.

Лема 2. За умов леми 1 розв'язок $V = V(z)$ задачі (8) є неперервним на $\mathbb{C}_0$.

Доведення. Фіксуємо $z_0 \in \mathbb{C}_0$ та нехай $z \to z_0$. Уведемо позначення

$$\Phi(z) = zm^1 - \mu z\hat{M}(z),\ V_0(z) = V(z) - V(z_0).$$

Тоді задачі (8) у точках z і z_0 можна записати у вигляді

$$\Phi(z)V(z) - \operatorname{div}(\mathrm{A}^1 \nabla V(z)) = \mathbb{F}(z) \text{ в } \Omega,\ V(z) = 0 \text{ на } \partial\Omega,$$

$$\Phi(z_0)V(z_0) - \operatorname{div}(\mathrm{A}^1 \nabla V(z_0)) = \mathbb{F}(z_0) \text{ в } \Omega,\ V(z_0) = 0 \text{ на } \partial\Omega.$$

Віднімемо від першого рівняння друге та, враховуючи, що $\Phi(z_0) = \Phi(z) + \Phi(z_0) - \Phi(z)$, отримуємо

$$\Phi(z)V_0(z) - \operatorname{div}(\mathrm{A}^1 \nabla V_0(z)) = \mathbb{F}(z) - \mathbb{F}(z_0) - (\Phi(z) - \Phi(z_0))V(z_0) \text{ в } \Omega. \quad (15)$$

Отже, повторюючи доведення нерівності (14), робимо висновок, що

$$\|V_0\|_{H_0^1(\Omega)} \le C \|\mathbb{F}(z) - \mathbb{F}(z_0)\|_{H^{-1}(\Omega)} + |\Phi(z) - \Phi(z_0)| C \|V(z_0)\|_{H^{-1}(\Omega)} \to 0$$

для $z \to z_0$, оскільки $\mathbb{F}(z)$ і $\Phi(z)$ є неперервними унаслідок теореми 13 та припущень. ■

Лема 3. За умов леми 1 розв'язок $V = V(z)$ задачі (8) є голоморфним на $\mathbb{C}_0$.

Доведення. Фіксуємо $z_0 \in \mathbb{C}_0$ та нехай $z \to z_0$. Для завершення доведення достатньо поділити вираз (15) на $z - z_0$ і перейти до границі для $z \to z_0$, оскільки можна повторити доведення нерівності (14) з врахуванням, що $\mathbb{F}(z)$ і $\Phi(z)$ є голоморфними. ■

Отже, з урахуванням інтегровності $\mathbb{F}(z)$ із (9) за означенням простору $E_0(H^{-1}(\Omega))$ для $u_0 = 0$ одержуємо таке твердження.

Лема 4. Для кожного $f \in L^2(0, \infty; H^{-1}(\Omega))$, $g \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega)^n)$ і $u_0 = 0$ існує єдиний розв'язок $v \in L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega))$ задачі (7) і знайдеться стала C, яка залежить тільки від α, β, $|Y_1|$, $|Y_0|$ і така, що

$$\|v\|_{L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega))} \le C(\|f\|_{L^2(0, \infty; H^{-1}(\Omega))} + \|g\|_{L^2(0, \infty; L^2(\Omega)^n)}).$$

Оскільки задача (7) лінійна, для завершення дослідження розв'язності осереднених задач зі згортками потрібно розглянути випадок довільного u_0 і $f = 0$, $g = 0$. У цьому разі умова інтегровності $\mathbb{F}(z)$ із (9) за означенням простору $E_0(H^{-1}(\Omega))$ не виконується. Проте можна скористатися лінійністю задачі (7) й відомими оцінками [17].

Розглянемо для функції $h = h(t, x)$ таку допоміжну початково-крайову задачу

$$m^1 h_t' - \operatorname{div}(\mathrm{A}^1 \nabla h) = 0 \text{ в } \Omega \times (0, \infty),\ h\big|_{t=0} = u_0 \text{ в } \Omega,\ h = 0 \text{ на } \partial\Omega \times (0, \infty). \quad (16)$$

Відомо [17], що ця задача має єдиний розв'язок $h \in L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega))$ і $h_t' \in L^2(0, \infty; H^{-1}(\Omega))$. Дійсно, помножуючи на h рівняння задачі (16) у $L^2(\Omega)$, відповідно до [17] отримуємо

$$\left(m^1 \int_\Omega |h|^2\, dx \right)_t' + 2 \int_\Omega (\mathrm{A}^1 \nabla h, \nabla h) dx = 0.$$

Інтегруючи цю рівність за часовою змінною $\tau \in (0, t)$, одержуємо

$$\alpha \| h(t) \|^2_{L^2(\Omega)} + 2\alpha \int_0^t \| h \|^2_{H_0^1(\Omega)} d\tau \le \beta \| u_0 \|^2_{L^2(\Omega)} . \qquad (17)$$

Перейдемо до границі за t і матимемо $h \in L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega))$. Тому для розв'язку задачі (16) виконано включення $h'_t = \operatorname{div}((\mathrm{A}^1 / m^1)\nabla h) \in L^2(0, \infty; H^{-1}(\Omega))$.

За припущення, що $f = 0$ і $g = 0$, введемо позначення $s = v - h$, де v і h є розв'язками задач (7) і (16). Тоді s є розв'язком початково-крайової задача зі згортками

$$m^1 s'_t - \mu M * (s'_t) - \operatorname{div}(\mathrm{A}^1 \nabla s) = \mu R * (h'_t) \ \text{ в } \ \Omega \times (0, \infty),$$

$$s|_{t=0} = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \ s = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega \times (0, \infty).$$

Отже, повторюючи доведення леми 4, отримуємо таке твердження.

Лема 5. Для кожного $u_0 \in L^2(\Omega)$ за умов $f = 0$ і $g = 0$ існує єдиний розв'язок $v \in L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega))$ задачі (7) і знайдеться стала C, яка залежить тільки від α, β, $|Y_1|$, $|Y_0|$ і така, що

$$\| v \|_{L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega))} \le C \| u_0 \|_{L^2(\Omega)} .$$

Доведення теореми 3. На підставі лем 4 і 5 потрібно довести, що $v'_t \in$ $\in L^2(0, \infty; H^{-1}(\Omega))$. Для довільних f, g та u_0 з теореми 3 запишемо задачу (8) у вигляді

$$V = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega,$$

$$m^1 (zV - u_0) = (1 - \mu \hat{M}(z) / m^1)^{-1} (\operatorname{div}(\mathrm{A}^1 \nabla V) +$$

$$+ (r^1 - \mu \hat{R}(z)) F(z) + \operatorname{div} \mathrm{B}^1 G(z)) \text{ в } \ \Omega, \qquad (18)$$

де функція $(1 - \mu \hat{M}(z) / m^1)^{-1}$ визначена коректно, оскільки згідно з (12) та (13) отримуємо

$$1 \le 1 - \operatorname{Re}(\mu \hat{M}(z) / m^1) \le |1 - \mu \hat{M}(z) / m^1| \le$$

$$\le 1 + |\mu \hat{M}(z) / m^1| \le 1 + \alpha^{-1} (\beta + \alpha^{-1} \beta^2) |Y_0| .$$

Обернемо цю нерівність і отримаємо $|1 - \mu \hat{M}(z) / m^1|^{-1} \le 1$. Для f, g і u_0 з теореми 3 права частина рівняння (18) належить $H^{-1}(\Omega)$ для $z_0 \in \mathbb{C}_0$ і задовольняє умову інтегровності за означенням простору $E_0(H^{-1}(\Omega))$. Крім того, перетворення Лапласа похідної $m^1 v'_t$ для розв'язку задачі (7) збігається з лівою частиною рівняння (18) і тому $v'_t \in L^2(0, \infty; H^{-1}(\Omega))$. З цього включення і $v \in L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega))$ випливає, що $v \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ для фіксованого T унаслідок відомої тереми про вкладення, наведеної, наприклад, в [17].

Помножуючи рівняння з (8) на $\bar{z}\bar{V}$ та інтегруючи по Ω, одержуємо

$$(m^1 - \mu \hat{M}) \int_\Omega |zV|^2 \, dx + \bar{z} \int_\Omega (\mathrm{A}^1 \nabla V, \nabla \bar{V}) \, dx = \int_\Omega \mathbb{F} \bar{z} \bar{V} dx .$$

Підсумовуючи цю рівність із спряженою, унаслідок еліптичності A^1 і (13) для $z \in \mathbb{C}_0$ отримуємо

$$\alpha |Y_1| \| zV \|^2_{L^2(\Omega)} + z_1 \alpha |Y_1| \| V \|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \operatorname{Re} \int_\Omega (\mathbb{F} \bar{z} \bar{V}) dx \le \| \mathbb{F} \|_{L^2(\Omega)} \| zV \|_{L^2(\Omega)} .$$

Отже, повторюючи доведення леми 1, одержуємо таке твердження.

Лема 6. Для кожного $z \in \mathbb{C}_0$, $f \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega))$, $g \in L^2(0, \infty; H^1(\Omega)^n)$ і $u_0 \in L^2(\Omega)$ існує єдиний розв'язок $V \in H_0^1(\Omega)$ задачі (8) та знайдеться додатна стала C, яка залежить тільки від α, β, $|Y_1|$, $|Y_0|$ і така, що

$$|| zV ||_{L^2(\Omega)} \le C(|| F ||_{L^2(\Omega)} + || G ||_{H^1(\Omega)^n} + || u_0 ||_{L^2(\Omega)}). \tag{19}$$

Для $u_0 = 0$ перетворення Лапласа від похідної v'_t для розв'язку задачі (7) дорівнює zV. Отже, повторюючи доведення леми 4, отримуємо таке твердження.

Лема 7. Нехай $f \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega))$, $g \in L^2(0, \infty; H^1(\Omega)^n)$ і $u_0 = 0$. Тоді існує єдиний розв'язок $v \in L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega))$ задачі (7), для якого виконано включення $v'_t \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega))$.

Для $f = 0$, $g = 0$ і довільних $u_0 \in L^2(\Omega)$ знову скористаємося задачею (16). Помножуючи у $L^2(\Omega)$ рівняння цієї задачі на h'_t, відповідно до [17] отримуємо

$$2m^1 \int_\Omega | h'_t |^2 \, dx + \left(\int_\Omega (\mathrm{A}^1 \nabla h, \nabla h) dx \right)'_t = 0.$$

Інтегруючи цю рівність за часовою змінною $\tau \in (0, t)$, дійдемо висновку, що

$$\alpha \int_0^t || h'_t ||^2_{L^2(\Omega)} \, d\tau \le \beta || u_0 ||^2_{H_0^1(\Omega)}. \tag{20}$$

Перейдемо до границі за t і отримаємо $h'_t \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega))$. Отже, використовуючи лему 7 та повертаючись до задачі для $s = v - h$, де v і h є розв'язками задач (7) і (16), встановлюємо, що знайдеться така стала C, яка залежить тільки від α, β, $|Y_1|$, $|Y_0|$, а також

$$|| v'_t ||_{L^2(0, \infty; L^2(\Omega))} \le C(|| f ||_{L^2(0, \infty; L^2(\Omega))} + || g ||_{L^2(0, \infty; H^1(\Omega)^n)} + || u_0 ||_{H_0^1(\Omega)}).$$

Ця нерівність завершує доведення теореми 3. ■

Зауваження 1. З останньої нерівності, рівності (18) та еліптичної регулярності випливає, що $v \in L^2(0, \infty; H^2(\Omega))$. Зокрема, для $n = 3$ унаслідок відомої теореми вкладення [17] можна записати

$$|| v ||_{L^2(0, \infty; C^0(\overline{\Omega}))} \le C(|| f ||_{L^2(0, \infty; L^2(\Omega))} + || g ||_{L^2(0, \infty; H^1(\Omega)^3)} + || u_0 ||_{H_0^1(\Omega)}), \tag{21}$$

де стала C залежить тільки від α, β, $|Y_1|$, $|Y_0|$ та не залежить від μ і θ.

Дійсно, наприклад, для $f \in C_0^\infty((0, T) \times \Omega)$, $g \in C_0^\infty((0, T) \times \Omega)^n$ і $u_0 = 0$ можна повторити доведення (19) і отримати для довільного $n \ge 2$, що будь-яка похідна за часом розв'язку оцінюється відповідними похідними за часом від f і g. Тоді, використовуючи послідовно рівність (18) та регулярність для розв'язків задачі (7), можна отримати, що $v \in H^\gamma(0, \infty; H^{2\gamma}(\Omega))$ для як завгодно великих цілих чисел γ з оцінками, які не залежать від μ і θ. Отже, можна, наприклад, замінити v на v'_t у нерівності (21) для регулярних даних. Для $u_0 \ne 0$ таке твердження про регулярність не виконується, що можна перевірити, диференціюючи за часом рівняння задачі (7). Саме це змушує припускати $u_0 = 0$ у теоремі 4.

Доведення теореми 2. Нехай v є розв'язком задачі (3) та v_0 є розв'язком задачі (3) для $\mu = 0$. Тоді $\varphi = v - v_0$ є розв'язком початково-крайової задачі

$$m^1\varphi'_t - \operatorname{div}(\mathrm{A}\nabla\varphi) = \mu m^0 v'_t + \mu r^0 f \;\text{ в }\; \Omega\times(0,\infty),$$
$$\varphi\big|_{t=0} = 0 \;\text{ в }\; \Omega,\; \varphi = 0 \;\text{ на }\; \partial\Omega\times(0,\infty). \qquad (22)$$

Отже, повторюючи доведення теореми 3, приходимо до висновку, що

$$\| v - v_0 \|^2_{C^0([0,T];\,L^2(\Omega_1^\varepsilon))} + \| v - v_0 \|^2_{C^0([0,T];\,L^2(\Omega_0^\varepsilon))} \le C\mu^2.$$

Тому, використовуючи нерівність трикутника ($\| a \|^2 \le 2\| a - b \|^2 + 2\| b \|^2$) і теорему 1, отримуємо

$$\| u - v_0 \|^2_{C^0([0,T];\,L^2(\Omega_1^\varepsilon))} + \mu \| u - v_0 \|^2_{C^0([0,T];\,L^2(\Omega_0^\varepsilon))} \le$$
$$\le C\varepsilon + 2\| v - v_0 \|^2_{C^0([0,T];\,L^2(\Omega_1^\varepsilon))} + 2\mu \| v - v_0 \|^2_{C^0([0,T];\,L^2(\Omega_0^\varepsilon))} \le C(\varepsilon + \mu^2). \quad ■$$

Доведення теореми 9. Доведення цієї теореми повторює доведення теореми 2, оскільки $\varphi = v - v_0$ є розв'язком задачі (22), в якій $\mathrm{A} = \mathrm{A}^1$, та виконано оцінку теореми 8. ■

Доведення теореми 7. Як і в доведенні нерівності (17), помножимо перше рівняння задачі (5) у просторі $L^2(Y)$ на g і отримаємо

$$\alpha\mu \| g(t) \|^2_{L^2(Y)} + 2\alpha\theta \int_0^t \| \nabla_y g \|^2_{L^2(Y)}\, d\tau \le \mu\beta \| 1 \|^2_{L^2(Y)}. \qquad (23)$$

Отже, з нерівності Пуанкаре випливає, що $\| g \|^2_{L^2(0,\infty;\,L^2(Y))} \le C\mu$ для $\theta \ge 1$ і тому $\theta^{-1} \le 1$. Аналогічно для розв'язку другої задачі з (5) маємо $\| p \|^2_{L^2(0,\infty;\,L^2(Y))} \le C\mu$.

Відомо [19, 42], що з цих двох оцінок випливає нерівність

$$\| g_\varepsilon \|^2_{L^2(0,\infty;\,L^2(\Omega))} + \| p_\varepsilon \|^2_{L^2(0,\infty;\,L^2(\Omega))} \le C\mu \qquad (24)$$

для $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ з відповідним ε_0, де стала C може залежати від $|\Omega|$, а функції $q_\varepsilon = q(t, x/\varepsilon)$ і $p_\varepsilon = p(t, x/\varepsilon)$ визначаються теоремою 4. Використовуючи нерівність трикутника, отримуємо

$$\| u - v_0 \|^2_{C^0([0,T];\,L^2(\Omega_1^\varepsilon))} + \mu \| u - v_0 \|^2_{C^0([0,T];\,L^2(\Omega_0^\varepsilon))} \le$$
$$\le C(\varepsilon + \sigma + \mu^2) + 2\mu \| q_\varepsilon * (v_0)'_t \|^2_{C^0([0,T];\,L^2(\Omega_0^\varepsilon))} + 2\mu \| p_\varepsilon * f \|^2_{C^0([0,T];\,L^2(\Omega_0^\varepsilon))}$$

унаслідок теореми 6. Для оцінки останніх доданків можна використати нерівність (24) та лему 4.5 з [16]. Відповідно до цієї леми, наприклад, для $t \in [0,T]$ отримуємо

$$\| (q_\varepsilon * (v_0)'_\tau)(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \le \| q_\varepsilon \|^2_{L^2(0,T;\,L^2(\Omega))} \| v'_t \|^2_{L^2(0,T;\,L^\infty(\Omega))}, \qquad (25)$$

оскільки $q_\varepsilon = 0$ в Ω_1^ε за визначенням та v є достатньо регулярним відповідно до [16] або зауваження 1. Отже, одержуємо $\| q_\varepsilon * (v_0)'_t \|^2_{C^0([0,T];\,L^2(\Omega_0^\varepsilon))} \le C\mu$. ■

Зауваження 2. Незалежно від μ і θ з нерівності (23) випливає, що $\| g \|_{C^0([0,T];\,L^2(Y))} \le C$. Аналогічно маємо $\| p \|_{C^0([0,T];\,L^2(Y))} \le C$. Таким чином

[19, 42], отримуємо нерівність

$$||g_\varepsilon||_{C^0([0,T];L^2(\Omega))}+||p_\varepsilon||_{C^0([0,T];L^2(\Omega))}\le C \qquad (26)$$

для $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ з відповідним ε_0, де стала C може залежати від $|\Omega|$. Надалі, замість (25) маємо

$$||(q_\varepsilon*(v_0)'_\tau)(t)||_{L^2(\Omega)}\le\int_0^t||q_\varepsilon(t-\tau)||_{L^2(\Omega)}\,||v'_0(\tau)||_{L^\infty(\Omega)}\,d\tau\le$$

$$\le||q_\varepsilon||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\,||v'_0||_{L^1(0,T;L^\infty(\Omega))}\le C, \qquad (27)$$

оскільки v є достатньо регулярним. Тому незалежно від θ за умов теореми 7 одержуємо

$$||u-v_0||^2_{C^0([0,T];L^2(\Omega_1^\varepsilon))}+\mu||u-v_0||^2_{C^0([0,T];L^2(\Omega_0^\varepsilon))}\le C(\varepsilon+\sigma+\mu).$$

Така оцінка є гіршою за оцінку теореми 6, де асимптотика має осцилювальні доданки.

Доведення теореми 10. За умов теореми 8 у роботі [16, наслідок 2.7] доведено, що

$$||E^\varepsilon_{\mu\sigma}-E^g_1-E^f_{\mu\theta}||^2_{C^0[0,T]}\le C(\varepsilon+\sigma+\theta^{-1})$$

згідно з позначеннями теореми 5 для $w_0=v_0$, де v_0 є розв'язком задачі (3) для $\mu=0$, $\mathrm{A}=\mathrm{A}^1$ і $\mathrm{B}=\mathrm{B}^1$. Отже, маємо $E^f_{\mu\theta}=\mu m^0 2^{-1}||v_0(t)||^2$. Тому за умов теореми 9 визначаємо, що $||E^f_{\mu\theta}||^2_{C^0[0,T]}\le C\mu^2$. ■

Доведення теореми 11. Відомо [16], що множини $C_0^\infty((0,T)\times\Omega)$ і $C_0^\infty((0,T)\times\Omega)^n$ є щільними у сепарабельних просторах $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ і $L^2(0,T;L^2(\Omega)^n)$. Тому для кожного $f\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ і $g\in L^2(0,T;L^2(\Omega)^n)$ знайдуться послідовності $f_s\in C_0^\infty((0,T)\times\Omega)$ і $g_s\in C_0^\infty((0,T)\times\Omega)^n$ такі, що

$$||f-f_s||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}+||g-g_s||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^n)}\le\delta_s.$$

Тут і надалі величина δ_s є достатньо малою для великих s.

Для кожного s позначимо u_s розв'язок задачі (1), де f і g відповідно замінено на f_s і g_s. Для розв'язку u задачі (1) позначимо $\varphi=u-u_s$ та перевіримо, що виконано нерівність

$$||\varphi_s||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1^\varepsilon))}+\mu||\varphi_s||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_0^\varepsilon))}\le C\delta_s, \qquad (28)$$

де стала C не залежить від ε, σ, μ і s. Помножимо на φ_s рівняння задачі (1) у $L^2(\Omega)$. Тоді

$$\left(\int_\Omega m_\varepsilon^\mu|\varphi_s|^2dx\right)'_t+2\int_\Omega(K_\varepsilon^\sigma\nabla\varphi_s,\nabla\varphi_s)dx=2\int_\Omega r_\varepsilon^\mu\psi_s\varphi_s dx-2\int_\Omega(K_\varepsilon^\sigma b^\varepsilon\vartheta_s,\nabla\varphi_s)dx,$$

де $\psi_s=f-f_s$ і $\vartheta_s=g-g_s$. Як і в доведенні (17), інтегруючи цю рівність за $\tau\in(0,t)$, отримуємо

$$||\varphi_s(t)||^2_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)}+\mu||\varphi_s(t)||^2_{L^2(\Omega_0^\varepsilon)}+||\nabla\varphi_s||^2_{L^2(0,t;L^2(\Omega_1^\varepsilon))}+\sigma||\nabla\varphi_s||^2_{L^2(0,t;L^2(\Omega_0^\varepsilon))}\le$$

$$\le\alpha^{-1}2\beta||\psi_s||_{L^1(0,t;L^2(\Omega_1^\varepsilon))}||\varphi_s||_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega_1^\varepsilon))}+$$

$$+\alpha^{-1}2\beta\,||\,\psi_s||_{L^1(0,\,t;\,L^2(\Omega_0^\varepsilon))}\,\mu\,||\,\varphi_s||_{L^\infty(0,\,t;\,L^2(\Omega_0^\varepsilon))}+$$

$$+\alpha^{-1}2\beta\,||\,\vartheta_s||_{L^2(0,\,t;\,L^2(\Omega_1^\varepsilon))}\,||\nabla\varphi_s||_{L^2(0,\,t;\,L^2(\Omega_1^\varepsilon))}+$$

$$+\alpha^{-1}2\beta\,||\,\vartheta_s||_{L^2(0,\,t;\,L^2(\Omega_0^\varepsilon))}\,\sigma\,||\nabla\varphi_s||_{L^2(0,\,t;\,L^2(\Omega_0^\varepsilon))}\le$$

$$\le C\,||\,\psi_s||^2_{L^2(0,\,T;\,L^2(\Omega_1^\varepsilon))}+(1/2)\,||\,\varphi_s||^2_{L^\infty(0,\,T;\,L^2(\Omega_1^\varepsilon))}+(\mu/2)\,||\,\varphi_s||^2_{L^\infty(0,\,T;\,L^2(\Omega_0^\varepsilon))}+$$

$$+C||\,\vartheta_s||^2_{L^2(0,\,T;\,L^2(\Omega_1^\varepsilon))}+(1/2)\,||\nabla\varphi_s||^2_{L^2(0,\,t;\,L^2(\Omega_1^\varepsilon))}+(\sigma/2)\,||\nabla\varphi_s||^2_{L^2(0,\,t;\,L^2(\Omega_0^\varepsilon))}.$$

Отже, скорочуючи подібні доданки та обчислюючи суттєвий супремум, одержуємо точно (28). Таке доведення нерівності (28) дає змогу з'ясувати, як оцінюється енергетична норма для задачі (1).

Аналогічно позначимо v_0^s розв'язок задачі (7) для $\mu=0$, де f і g відповідно замінено на f_s і g_s. Тоді, як і в доведенні (28), маємо $||\,v_0-v_0^s\,||^2_{L^\infty(0,\,T;\,L^2(\Omega))}\le C\delta_s$.

Для u_s виконується оцінка теореми 9, можливо, з константою, яка залежить від s, але не залежить від $\varepsilon,\sigma,\theta^{-1}$ і μ. Отже, маємо, наприклад, такі нерівності:

$$\mu\,||\,u-v_0||^2_{L^\infty(0,\,T;\,L^2(\Omega_0^\varepsilon))}=\mu\,||\,u-u_s+u_s-v_0^s+v_0^s-v_0||^2_{L^\infty(0,\,T;\,L^2(\Omega_0^\varepsilon))}\le$$

$$\le C\delta_s+2\mu\,||\,u_s-v_0^s||^2_{L^\infty(0,\,T;\,L^2(\Omega_0^\varepsilon))}\le C\delta_s+C_s(\varepsilon+\sigma+\mu^2+\theta^{-1}).$$

Для кожного додатного δ можна вибрати та зафіксувати s так, щоб $C\delta_s<\delta/2$. За умов теореми 11 можна знайти ε_δ, σ_δ, ϑ_δ і μ_δ такі, що $C_s(\varepsilon+\sigma+\mu^2+\theta^{-1})<\delta/2$ для $\varepsilon<\varepsilon_\delta$, $\sigma<\sigma_\delta$, $\theta^{-1}<\vartheta_\delta$, $\mu<\mu_\delta$ і $||\,u-v_0||^2_{L^\infty(0,\,T;\,L^2(\Omega_1^\varepsilon))}+\mu\,||\,u-v_0||^2_{L^\infty(0,\,T;\,L^2(\Omega_0^\varepsilon))}<\delta$. ■

Доведення теореми 12. Позначимо v_s розв'язок задачі (7), де f і g відповідно замінено на f_s і g_s. Отже, додатково до доведення теореми 11 маємо $||\,g-g_s||^2_{L^2(0,\,T;\,H_0^1(\Omega)^n)}\le\delta_s$ і тому

$$||\,v-v_s||^2_{L^\infty(0,\,T;\,L^2(\Omega))}+||\,v'-v_s'||^2_{L^2(0,\,T;\,L^2(\Omega))}\le C\delta_s$$

унаслідок теореми 3. Крім того, виконується нерівність (28) у позначеннях з доведення теореми 11. Тому можна повторити це доведення, але з одним зауваженням. За умов теореми 12 можуть не виконуватися нерівності (25) та (27). Але, як і в (27), для $t\in[0,T]$ отримуємо

$$||\,(q_\varepsilon*(v)_\tau')(t)\,||_{L^1(\Omega)}\le\int_0^t||\,q_\varepsilon(t-\tau)\,||_{L^2(\Omega)}\,||\,v_t'(\tau)\,||_{L^2(\Omega)}\,d\tau\le$$

$$\le||\,q_\varepsilon\,||_{L^\infty(0,\,T;\,L^2(\Omega))}\,||\,v_t'||_{L^1(0,\,T;\,L^2(\Omega))}.$$

Отже, із нерівності (26) випливає, наприклад, оцінка

$$||\,q_\varepsilon*(v-v_s)_\tau'\,||^2_{L^\infty(0,\,T;\,L^1(\Omega))}\le C\,||\,v'-v_s'||^2_{L^2(0,\,T;\,L^2(\Omega))}\le C\delta_s$$

і можна повторити доведення теореми 11, що й потрібно було довести. ■

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто початково-крайові задачі для нестаціонарних рівнянь фільтрації в періодичних пористих середовищах, які утворені великою кількістю «блоків» з низькою проникністю, розділених сполучною системою «розламів» з високою проникністю. Наведено осереднені задачі, розв'язки яких визначають наближену асимптотику розв'язків таких задач. Осереднені задачі мають вигляд початково-крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь зі згортками. Доведено оцінки точності асимптотики та відповідні теореми про збіжності. Встановлено твердження про розв'язність і регулярність для таких задач, які є оптимальними та не залежать від параметрів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ляшко И.И. Решение фильтрационных задач методом суммарных представлений. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1963. 175 с.
2. Ляшко И.И., Великованенко И.М. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации. Киев: Наук. думка, 1973. 264 с.
3. Ляшко И.И., Мистецкий Г.Е., Олейник А.Я. Расчет фильтрации в зоне гидросооружений. Киев: Будівельник, 1977. 152 с.
4. Гладкий А.В., Ляшко И.И., Мистецкий Г.Е. Алгоритмизация и численный расчет фильтрационных схем. Киев: Вища шк., 1981. 287 с.
5. Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. Киев: Наук. думка, 1991. 261 с.
6. Lyashko S.I., Semenov V.V. Controllability of linear distributed systems in classes of generalized actions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2001. Vol. 37, N 1. P. 13–32. https://doi.org/10.1023/A:1016607831284.
7. Tymoshenko A., Klyushin D., Lyashko S. Optimal control of point sources in Richards–Klute equation. *Advances in Intelligent Systems and Computing.* 2019. Vol. 754. P. 194–203. https://doi.org/10.1007/978-3-319-91008-6_20.
8. Sandrakov G.V., Lyashko S.I., Bondar E.S., Lyashko N.I. Modeling and optimization of microneedle systems. *Journal Automation and Information Sciences*. 2019. Vol. 51, Iss. 6. P. 1–11. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i6.10.
9. Sandrakov G.V., Lyashko S.I., Bondar E.S., Lyashko N.I., Semenov V.V. Modeling of configurations formed when using microneedle systems. *Journal Automation and Information Sciences*. 2020. Vol. 52, Iss. 12. P. 1–11. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v52.i12.10.
10. Semenov V.V. Solvability of a parabolic transmission problem with the condition of a generalized proper lumped source. *Differential Equations*. 2005. Vol. 41, N 6. P. 878–886. https://doi.org/10.1007/s10625-005-0227-x.
11. Semenov V.V. Modified extragradient method with Bregman divergence for variational inequalities. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. Vol. 50, Iss. 8. P. 26–37. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i8.30.
12. Sandrakov G.V. The homogenization of nonstationary equations with contrast coefficients. *Doklady Mathematics*. 1997. Vol. 56, Iss. 1. P. 586–589.
13. Sandrakov G.V. Homogenization of parabolic equations with contrasting coefficients. *Izvestiya: Mathematics*. 1999. Vol. 63, Iss. 5. P. 1015–1061. https://doi.org/10.1070/IM1999v063n05ABEH000264.
14. Sandrakov G.V. Multiphase homogenized models for diffusion in highly nonhomogeneous media. *Doklady Mathematics*. 2004. Vol. 70, Iss. 1. P. 507–511.

15. Sandrakov G.V. Multiphase models of nonstationary diffusion arising from homogenization. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2004. Vol. 44, Iss. 10. P. 1741–1756.

16. Sandrakov G.V. Multiphase homogenized diffusion models for problems with several parameters. *Izvestiya: Mathematics.* 2007. Vol. 71, Iss. 6. P. 1193–1252. https://doi.org/10.1070/IM2007v071n06ABEH002387.

17. Duvaut G., Lions J.-L. Les inéquations en mécanique et en physique. Paris: Dunod, 1972. 387 p.

18. Agranovich M.S., Vishik M.I. Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type. *Russian Math. Surveys*. 1964. Vol. 19, Iss. 63. P. 53–157. https://doi.org/10.1070/RM1964v019n03ABEH001149.

19. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. Homogenization: Averaging processes in periodic media. Dordrecht: Kluwer, 1989. 366 p. https://doi.org/10.1007/978-94-009-2247-1.

20. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolau G. Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978. 700 p.

21. Sanchez-Palencia E. Non homogeneous media and vibration theory. *Lecture Notes in Physics*. Vol. 127. New York: Springer-Verlag, 1980. 398 p. https://doi.org/10.1007/3-540-10000-8.

22. Sandrakov G.V. Homogenization of variational inequalities for obstacle problems. *Sbornik Mathematics.* 2005. Vol. 196, Iss. 3–4. P. 541–560. https://doi.org/10.1070/SM2005v196n04ABEH000891.

23. Sandrakov G.V. Homogenization of variational inequalities for non-linear diffusion problems in perforated domains. *Izvestiya: Mathematics*. 2005. Vol. 69, Iss. 5. P. 1035–1059. https://doi.org/10.1070/IM2005v069n05ABEH002287.

24. Sandrakov G.V. Homogenization of non-stationary Stokes equations with viscosity in a perforated domain. *Izvestiya: Mathematics*. 1997. Vol. 61, Iss. 1. P. 113–141. https://doi.org/10.1070/IM1997v061n01ABEH000107.

25. Sandrakov G.V. The influence of viscosity on oscillatory phenomena in linearized hydrodynamics. *Doklady Mathematics*. 2002. Vol. 66, Iss. 2. P. 241–244.

26. Sandrakov G.V. The influence of viscosity on oscillations in some linearized problems of hydrodynamics. *Izvestiya: Mathematics.* 2007. Vol. 71, Iss. 1. P. 97–148. https://doi.org/10.1070/IM2007v071n01ABEH002352.

27. Jager W., Rannacher R., Warnatz J. (Eds.) Reactive flows, diffusion and transport: From experiments via mathematical modeling to numerical simulation and optimization. Berlin: Springer-Verlag, 2007. 686 p. https://doi.org/10.1007/978-3-540-28396-6.

28. Mielke A., Reichelt S., Thomas M. Two-scale homogenization of nonlinear reaction-diffusion systems with slow diffusion. *Netw. Heterog. Media*. 2014. Vol. 9, Iss. 2. P. 353–382. https://doi.org/10.3934/nhm.2014.9.353.

29. Sweijen T., Van Duijn C.J., Hassanizadeh S.M. A model for diffusion of water into a swelling particle with a free boundary: Application to a super absorbent polymer particle. *Chemical Engineering Science*. 2017. Vol. 172. P. 407–413. https://doi.org/10.1016/j.ces.2017.06.045.

30. Jager W., Woukeng L. Homogenization of Richards' equations in multiscale porous media with soft inclusions. *J. Differential Equations.* 2021. Vol. 281. P. 503–549. https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.02.012.

31. Garttner S., Frolkovic P., Knabner P., Ray N. Efficiency and accuracy of micro-macro models for mineral dissolution. *Water Resources Research*. 2020. Vol. 56, Iss. 8. https://doi.org/10.1029/2020WR027585.

32. Garttner S., Frolkovic P., Knabner P., Ray N. Efficiency of micro-macro models for reactive two-mineral systems. *Multiscale Modeling and Simulation*. 2022. Vol. 20, Iss. 1. P. 433–461. https://doi.org/10.1137/20M1380648.

33. Sandrakov G.V. Averaging principles for equations with rapidly oscillating coefficients. *Math. USSR Sb.* 1991. Vol. 68, Iss. 2. P. 503–553. https://doi.org/10.1070/SM1991v068n02ABEH002111.

34. Diaz J.I., Gomez-Castro D., Shaposhnikova T.A., Zubova M.N. A nonlocal memory strange term arising in the critical scale homogenization of a diffusion equation with dynamic boundary conditions. *Electron. J. Differ. Equations*. 2019. Vol. 77. P. 1–13.

35. Diaz J.I., Gomez-Castro D., Shaposhnikova T.A., Zubova M.N. Classification of homogenized limits of diffusion problems with spatially dependent reaction over critical-size particles. *Applicable Analysis*. 2019. Vol. 98. P. 232–255. https://doi.org/10.1080/00036811.2018.1441997.

36. Zubova M.N., Shaposhnikova T.A. Homogenization of a boundary-value problem in a domain perforated by cavities of arbitrary shape with a general nonlinear boundary condition on their boundaries: The case of critical values of the parameters. *J. Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 244, Iss. 2. P. 235–253. https://doi.org/10.1007/s10958-019-04616-z.

37. Benes B., Pazanin I. Homogenization of degenerate coupled transport processes in porous media with memory terms. *Math. Methods in the Applied Sciences*. 2019. Vol. 42, Iss. 18. P. 6227–6258. https://doi.org/10.1002/mma.5718.

38. Mielke A., Reichelt S. Traveling fronts in a reaction–diffusion equation with a memory term. *J. Dynamics and Differential Equations*. 2022. https://doi.org/10.1007/s10884-022-10133-6.

39. Sandrakov G.V., Hulianytskyi A.L. Solvability of homogenized problems with convolutions for weakly porous media. *J. Numerical and Applied Mathematics*. 2020. N 2 (134). P. 59–70. https://doi.org/10.17721/2706-9699.2020.2.04.

40. Sandrakov G.V., Hulianytskyi A.L., Semenov V.V. Modeling of filtration processes in periodic porous media. *Modeling, Control and Information Technologies*. 2021. Vol. 5. P. 90–93. https://doi.org/10.31713/MCIT.2021.28.

41. Arbogast T., Douglas J., Hornung U. Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory. *SIAM J. Math. Anal*. 1990. Vol. 21, Iss. 4. P. 823–836. https://doi.org/10.1137/0521046.

42. Bakhvalov N.S., Eglit M.E. The limiting behaviour of periodic media with soft-modular inclusions. *Computational Math. and Mathematical Physics*. 1995. Vol. 35, Iss. 6. P. 719–729.

G.V. Sandrakov, S.I. Lyashko, V.V. Semenov

SIMULATION OF FILTRATION PROCESSES FOR INHOMOGENEOUS MEDIA AND HOMOGENIZATION

Abstract. The investigation of the dynamic processes of filtration in porous media is essential when planning the use of underground resources and simulation of systems in ecology. Porous periodic media, formed by a large number of “blocks” with low permeability, and separated by a connected system of “faults” with high permeability, will be considered here. Taking into account the structure of such media in modeling leads to the dependence of the filtration equations and their coefficients on a small parameter characterizing the microscale of the porous medium and the permeability of the blocks. Thus, initial boundary value problems for nonstationary equations of filtration in such porous media are considered. Homogenized problems (whose solutions determine approximate asymptotics for solutions of the original problems) are presented. The homogenized problems have the form of initial boundary value problems for integro-differential equations in convolutions. Estimates for the accuracy of the asymptotics and relevant convergence theorem are discussed. Statements about the solvability and regularity for the problems and the homogenized problems are proved. The statements are optimal and do not depend on the parameters.

Keywords: homogenized problems, parabolic problems, approximate asymptotics, solvability, a priori estimates, Laplace transforms.

Надійшла до редакції 03.10.2022