УДК 519.2

Л.С. СТОЙКОВА
Київ, Україна,
e-mail: *stojk@ukr.net.*

АЛЬТЕРНАТИВНЕ ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ ГАУСА

Анотація. Дано чітке формулювання двох нерівностей Гауса. Представлено прозоре їхнє доведення, що грунтується на відомих фундаментальних результатах. Запропоновано простий спосіб побудови розбиття області параметрів задачі. Знайдено явний вигляд екстремальних функцій розподілу.

Ключові слова: екстремальні значення, лінійні функціонали, класи унімодальних функцій розподілу.

ВСТУП

Існує велика бібліографія стосовно нерівностей Чебишова і Гауса і їхнє доведення різними способами. Найбільш повна бібліографія зібрана в книгах [1, 2]. У книзі [1, гл. 12, розд. 4] розглянуто багато прикладів (у тому числі нерівність Гауса), де отримано верхні оцінки для лінійних функціоналів у різних класах унімодальних розподілів. На основі цих прикладів автори книги [1], розвиваючи і демонструючи конструктивний підхід до знаходження точних оцінок таких функціоналів, пишуть: «Эта техника является весьма мощной и, по-видимому, нова». (При доведенні нерівності Гауса в [1] (російський переклад) були допущені неточності, які тут виправлено.)

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

У цій статті автор, популяризуючи згаданий вище метод, розглядає дві такі задачі Гауса. Знайти максимальне значення імовірності $P\{\mu > t\}$, де μ має невідому унімодальну функцію розподілу (ф.р.) $F_\mu(x)$, її щільність $f_\mu(x)$ і моду $m=0$ у двох класах. Позначимо A_2 клас ф.р. $F_\mu(x)$ таких, що $m=0$ і фіксовано тільки другий момент $m_2 = \int_0^\infty x^2 dF_\mu(x)$. Позначимо A_r клас функцій розподілу $F_\mu(x)$ таких, що $m=0$ і фіксовано тільки r-й момент $m_r = \int_0^\infty x^r dF_\mu(x)$, $r \ge 2$. Нехай в обох класах виконуються рівності $F_\mu(0-) = f_\mu(0-) = 0.$ Позначимо функціонал $I(F_\mu) := P\{\mu > t\} = \int_t^\infty dF_\mu(x)$.

У першій задачі знаходиться $\max I(F_\mu), F_\mu(x) \in A_2$, а в другій — $\max I(F_\mu), F_\mu(x) \in A_r$.

Щільність $f_\mu(x)$ може мати або одну моду m, або один інтервал мод. Нехай m — єдина або є однією з мод щільності $f_\mu(x)$. Тоді ф.р. $F_\mu(x)$ запишемо у вигляді

$$F_\mu(x) = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^x f_\mu(u)du, 0 \le x < m, \\ F_m + \int_m^x f_\mu(u)du, x > m \end{array} \right\}. \tag{1}$$

Щільність $f_\mu(x)$ не спадає на відрізку $[0, m]$ і не зростає на (m, ∞), а F_m — це можливий стрибок $F_\mu(x)$ в точці m. Накладемо на щільність такі обмеження:

$$x^{r+1} f_\mu(x) \to 0, \; x \to \infty; \; r \geq 2. \tag{2}$$

Ці обмеження необхідні для існування *r*-го моменту у ф.р. $F_\eta(x)$, що розглядається далі в доведенні теореми 3 і узагальненій нерівності Гауса.

Будемо вважати, що $f_\mu(x)$ майже всюди диференційовна, за винятком $(r+1)$-ї точки (одна з яких може бути модою *m*), якщо у ф.р. $F_\mu(x)$ фіксовано $r \geq 2$ моменти. Класи A_2 і A_r описано повністю.

ДОПОМІЖНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Перетворення Джонсона–Роджерса [3] має вигляд:

$$F_\eta(x) = F_\mu(x) + (m - x) f_\mu(x), \tag{3}$$

де $F_\eta(x)$ — ф.р. без обмеження на унімодальність. З (3) випливає

$$dF_\eta(x) = (m - x) df_\mu(x). \tag{4}$$

Це перетворення задає взаємно однозначну відповідність між ф.р. $F_\mu(x) \in A$ і ф.р. $F_\eta(x) \in K$, де A — клас унімодальних ф.р. із заданою модою і моментами, а K — клас ф.р. без обмеження на унімодальність, але з визначеними моментами, що обчислюються, використовуючи відповідні моменти унімодальних ф.р., а саме

$$s_i = \int_0^\infty x^i dF_\eta(x) = (i+1)m_i - imm_{i-1}, \; i = 1, 2, \ldots, r; \quad m_i = \int_0^\infty x^i dF_\mu(x). \tag{5}$$

За допомогою (2)–(4) і інтегрування частинами лінійний функціонал $I(F_\mu)$ від ф.р. $F_\mu(x)$ перетворюється на лінійний функціонал $R(F_\eta)$ від ф.р. $F_\eta(x)$, до того ж $I(F_\mu) = R(F_\eta)$. Тому справедлива рівність

$$\sup_{F_\mu \in A} I(F_\mu) = \sup_{F_\eta \in K} R(F_\eta). \tag{6}$$

ТЕОРЕМА МАЛГОЛЛАНДА–РОДЖЕРСА [4]

Означення 1. Ф.р. $F(x) \in K$ називається крайньою точкою множини *K*, якщо її неможливо представити у вигляді $F(x) = \frac{1}{2} F_1(x) + \frac{1}{2} F_2(x)$, де $F_1(x)$ і $F_2(x)$ — різні ф.р. з множини *K*. Це означення наведено в роботі [4].

Означення 2. Замикання множини *K* позначається $[K]$ і є множиною *K* разом із своїми граничними і крайніми функціями розподілу.

Теорема 1 [4]. Позначимо $I(F) = \int_0^\infty g(x) dF(x)$. Нехай $g(x)$ є вимірною за Борелем функцією, що має скінченні значення для всіх скінченних $x \geq 0$. Нехай *K* — множина ф.р. $F(x)$ з фіксованими моментами $s_i = \int_0^\infty x^i dF(x)$, $i = 1, 2, \ldots$, а *E* — підмножина крайніх точок множини *K*. Тоді інфімум чи супремум лінійного функціонала $I(F)$ за замиканням множини *K* дорівнює інфімуму чи супремуму за замиканням множини *E*:

$$\inf_{F \in [K]} I(F) = \inf_{F \in [E]} I(F). \tag{7}$$

Множина $[E]$ крайніх точок множини $[K]$ складається із східчастих ф.р. Якщо фіксовано k моментів, то кількість точок росту у ф.р. $F(x) \in [E]$ не перевищує $k+1$ (у цій роботі $k=1$).

Приклад 1. Якщо ф.р. має тільки один фіксований момент s_1, то крайніми точками множини K є двохточкові ф.р. з точками росту x_1, x_2 і стрибками в них $0 \le p_1, p_2 \le 1$, для яких виконуються рівності $p_1 + p_2 = 1$; $x_1 p_1 + x_2 p_2 = s_1$ (s_1 — перший момент). Необхідною умовою їхнього існування є нерівності $0 \le x_1 < s_1 < x_2$. Окрім цих ф.р. крайньою точкою буде ф.р. з однією точкою росту в s_1 і стрибком в ній, який дорівнює 1.

Зауваження 1. З (6) і (7) випливає

$$\sup_{F_\mu \in A} I(F_\mu) = \sup_{F_\eta \in K} R(F_\eta) = \sup_{F_\eta \in [E]} R(F_\eta) = \sup_{F_\mu \in [A]} I(F_\mu). \tag{8}$$

Зауваження 2. Із співвідношення (4), означення 1 і теореми 1 про крайні точки множини $[E]$ легко побачити структуру крайніх точок множини $[A]$. А саме, східчастій ф.р. $F_\eta(x) \in [E]$ відповідає ф.р. $F_\mu(x) \in [A]$, що має кусково-постійну щільність $f_\mu(x)$ із стрибками в точках росту ф.р. $F_\eta(x) \in [E]$ і, можливо, в точці m (моді). Якщо точка m дорівнює одній із точок росту $F_\eta(x) \in [E]$, то відповідна функція $F_\mu(x)$ буде мати в m стрибок, а щільність f_μ— δ-функцію.

НЕОБХІДНІ І ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКСТРЕМАЛЬНОСТІ ДЕЯКОЇ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ

Теорема 2 [1, 5]. Нехай K — множина ф.р. $F(x)$ з одним або з двома фіксованими моментами. Для того щоб інфімум (супремум) функціонала $I(F) = \int\limits_0^\infty g(x) dF(x)$ обчислювався на деякій ф.р. $F_0(x) \in [E]$, де кількість точок росту не більше двох, необхідно і достатньо, щоб існував многочлен $U_0(x)$ не вище першого ступеня, для якого виконуються такі умови: 1) $U_0(x_i) = g(x_i)$, $i = 1, 2$; 2) $\forall x \ge 0$: $U_0(x) \le g(x)$ (для інфімуму); 3) $\forall x \ge 0$: $U_0(x) \ge g(x)$ (для супремуму).

Теорема 2 в [1, 5] доведена для будь-якого числа $k \ge 1$ фіксованих моментів.

Наслідок з теореми 2 [6]. Позначимо $\varphi_0(x) = g(x) - U_0(x)$. Якщо точка $x = x_0$, $x_0 > \delta > 0$, є однією з точок росту ф.р. $F_0(x) \in [E]$, на якій досягається мінімум (максимум) функціонала $I(F)$, і функція $g(x)$ двічі диференційовна в деякому околі ε точки x_0, $\varepsilon = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, то справедливі такі рівності і нерівності:

$$\varphi_0(x_0) = 0,\ \varphi_0'(x_0) = 0,\ \varphi_0''(x_0) > 0\ \ (\varphi_0''(x_0) < 0\ ). \tag{9}$$

(Остання нерівність в дужках стосується максимума.) Якщо виконано умови (9), то в теоремі 2 умову 1 можна замінити більш інформативною умовою. Це дає змогу записати многочлен $U_0(x)$, що відповідає $F_0(x) \in [E]$ за формулою Тейлора: $U_0(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)$, якщо фіксовано тільки перший момент, і $U_0(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + a_0(x - x_0)^2$, якщо фіксовано два перші моменти. Це значно спрощує подальше дослідження.

Зауваження 3. Теорема 2 дає наочну геометричну інтерпретацію для пошуку екстремальних многочленів. З неї випливає, що для $F_0(x) \in [E]$ з одним фіксованим моментом відповідні многочлени належать до класу лінійних функцій (прямих), а для $F_0(x) \in [E]$ з двома фіксованими моментами — до класу парабол.

Теорема 3 (**Нерівність Гауса**). Нехай $F_\mu(x) \in A_2$. Розглянемо функціонал $I(F_\mu) := P\{\mu > t\} = \int_t^\infty dF_\mu(x)$. Маємо два параметри: t і m_2.

1. Якщо параметри t і m_2 задовольняють нерівності $t^2 \le \frac{4m_2}{3}$, то

$$\max_{F_\mu \in A_2} I(F_\mu) = 1 - \frac{t}{\sqrt{3m_2}}$$

і досягається на ф.р.: $F_{\mu 1}(x) = \frac{x}{\sqrt{3m_2}}$ (щільність становить $f_{\mu 1}(x) = (1/\sqrt{3m_2})$, $x \in (0, \sqrt{3m_2})$).

2. Якщо параметри t і m_2 задовольняють нерівності $t^2 \ge \frac{4m_2}{3}$, то

$$\max_{F_\mu \in A_2} I(F_\mu) = \frac{4m_2}{9t^2}$$

і досягається на ф.р.: $F_{\mu 2}(x) = p_1 + \frac{xp_2}{x_2^{1/2}}, x \in (0, x_2^{1/2})$, де $p_1 = 1 - p_2$, $x_2^{1/2} = \frac{3t}{2}$, $p_2 = \frac{4m_2}{3t^2}$ (щільність становить $f_{\mu 2}(x) = \frac{p_2}{x_2^{1/2}}$, $x \in (0, x_2^{1/2})$, з масою p_1 в моді $m = 0$).

Доведення. Перейдемо від випадкової величини μ до випадкової величини η, використовуючи перетворення Джонсона — Роджерса (3)–(5) та інтегрування частинами. Оскільки $m = 0$, то із (4) випливає

$$dF_\eta(x) = -xdf_\mu(x). \tag{10}$$

Враховуючи (2), (10) і інтегруючи частинами, знаходимо другий момент ф.р. $F_\eta(x)$:

$$s_2 := \int_0^\infty x^2 dF_\eta(x) =$$

$$= -\int_0^\infty x^3 df_\mu(x) = [-x^3 f_\mu(x)]_0^\infty + \int_0^\infty 3x^2 f_\mu(x)dx = \int_0^\infty 3x^2 dF_\mu(x) = 3m_2.$$

Далі знаходимо функціонал $R(F_\eta)$, що дорівнює заданому функціоналу $I(F_\mu)$.

Із (2), (10), інтегруючи частинами, знаходимо

$$I(F_\mu) = \int_t^\infty f_\mu(x)dx =$$

$$= -tf_\mu(t) - \int_t^\infty xdf_\mu(x) = \int_t^\infty tdf_\mu(x) + \int_t^\infty dF_\eta(x) = \int_t^\infty \left(1 - \frac{t}{x}\right) dF_\eta(x) := R(F_\eta).$$

Перейдемо від випадкової величини η до нової випадкової величини $\zeta = \eta^2$ з ф.р. $F_\zeta(x)$. Отримаємо $F_\eta(x) = P\{\eta < x\} = P\{\eta^2 < x^2\} = P\{\zeta < x^2\}$, а також

$F_\eta(x) = F_\zeta(x^2),\ dF_\eta(x) = dF_\zeta(x^2)$. Знайдемо момент ф.р. $F_\zeta(x)$, що відповідає моменту s_2: $s_2 = \int_0^\infty x^2 dF_\eta(x) = \int_0^\infty x^2 dF_\zeta(x^2) = \int_0^\infty u dF_\zeta(u) := r_1 = 3m_2$.

Наступний крок — знаходження функціонала $J(F_\zeta)$, що дорівнює $R(F_\eta)$:

$$R(F_\eta) = \int_t^\infty \left(1 - \frac{t}{x}\right) dF_\eta(x) = \int_t^\infty \left(1 - \frac{t}{x}\right) dF_\zeta(x^2).$$

Зробимо заміну змінної в останньому інтегралі: $x^2 = u$, отримаємо

$$R(F_\eta) = \int_{t^2}^\infty \left(1 - \frac{t}{\sqrt{u}}\right) dF_\zeta(u).$$

Позначимо

$$J(F_\zeta) := \int_0^\infty g(x) dF_\zeta(x), \tag{11}$$

де

$$g(x) = 0,\ x \in [0, t^2];\ g(x) = 1 - \frac{t}{\sqrt{x}},\ x > t^2;\ \ g'(x) = \frac{t}{2x\sqrt{x}};\ g''(x) < 0.$$

Внаслідок всіх перетворень маємо $I(F_\mu) = R(F_\eta) = J(F_\zeta),\ M\zeta = r_1 = 3m_2$.

Для завершення доведення теореми 3 потрібно знайти максимальне значення функціонала $J(F_\zeta)$ (див. (11)) за умови, що ф.р. $F_\zeta(x)$ належить класу розподілів, у яких фіксовано тільки перший момент: $\int_0^\infty x dF_\zeta(x) = r_1 = s_2 = 3m_2$.

З теореми 1 і прикладу 1 випливає, що клас E_1 можливих екстремальних ф.р. складається із одноточкової ф.р. $F_{\zeta 1}(x)$ з однією точкою росту в s_1 і стрибком в ній, який дорівнює 1, або із двохточкових ф.р. $F_{\zeta 2}$ з точками росту x_1, x_2. Необхідною умовою існування ф.р. $F_{\zeta 2}$ є нерівності $0 \le x_1 < r_1 < x_2$.

З теореми 2 і її наслідку випливає, що класу ф.р. із множини E_1 відповідає клас многочленів, що є лінійними функціями (прямими). Так, одноточковій ф.р. $F_{\zeta 1}(x)$ відповідає многочлен $U_{\zeta 1}(x) = g(r_1) + g'(r_1)(x - r_1)$. Якщо $r_1 \in (0, t^2)$, то $g(r_1) = g'(r_1) = 0 \to U_{\zeta 1}(x) \equiv 0$ (див. (11)) і цей многочлен не задовольняє умову 3 теореми 2, а тому $F_{\zeta 1}(x)$ не буде екстремальною. (Аналогічну ситуацію маємо для $F_{\zeta 2}$, коли $x_2 < t^2$.)

Нехай тепер $r_1 > t^2$. Тоді ф.р. $F_{\zeta 1}(x)$ відповідає многочлен $U_{\zeta 1}(x) = 1 - \frac{t}{\sqrt{r_1}} + \frac{t(x - r_1)}{2r_1\sqrt{r_1}}$. Мінімальною необхідною умовою, щоб многочлен $U_{\zeta 1}(x)$ задовольняє умову 3 теореми 2 є умова $U_{\zeta 1}(0) - g(0) \ge 0 \leftrightarrow \sqrt{r_1} \ge \frac{3t}{2} \leftrightarrow \sqrt{3m_2} \ge \frac{3t}{2} \leftrightarrow \frac{3}{4}t^2 \le m_2$. Якщо вона виконується, тоді матимемо

$$\forall x \in (0, t^2):\ \{U_{\zeta 1}(0) - g(0) \ge 0,\ U'_{\zeta 1}(x) - g'(x) > 0\} \to U_{\zeta 1}(x) \ge g(x)\ \ \forall x \in (0, t^2),$$

$$\forall x \in (t^2, \infty):\ \{g(r_1) = U_{\zeta 1}(r_1),\ g'(r_1) = U'_{\zeta 1}(r_1),\ g''(r_1) < 0,$$
$$U''_{\zeta 1}(x) = 0\} \to U_{\zeta 1}(x) \ge g(x)\ \ \forall x > t^2.$$

Таким чином, всі умови теореми 2 для ф.р. $F_{\zeta 1}(x)$ виконано і на ній досягається максимум функціонала $J(F_\zeta) = I(F_\mu)$ в області $\frac{3}{4} t^2 \le m_2 \leftrightarrow t^2 \le \frac{4m_2}{3}$. Цей максимум дорівнює $g(x_1) = 1 - \frac{t}{r_1^{1/2}}$. Отже, за мінімальною необхідною умовою екстремуму ф.р. $F_{\zeta 1}(x)$ доведено її екстремальність, отримано область параметрів, в якій вона екстремальна, і максимум відповідного функціонала, який дорівнює максимуму початкового функціонала $I(F_\mu)$, оскільки $J(F_\zeta) = I(F_\mu)$.

Далі розглянемо двохточкову ф.р. $F_{\zeta 2}(x)$ з точками росту $x_1 = 0, x_2 > t^2$, з відповідними скачками в них p_1, p_2 і з першим моментом $r_1 = 3m_2 = x_2 p_2$.

Оскільки функція $g(x)$ диференційовна для $x > t^2$, то функції розподілу $F_{\zeta 2}(x)$ відповідає многочлен $U_{\zeta 2}(x) = g(x_2) + g'(x_2)(x - x_2)$ і $U_{\zeta 2}(0) = g(0) = 0$ (перша умова і наслідок з теореми 2). Із двох останніх рівностей випливає $g'(x_2) = \frac{U_{\zeta 2}(x_2) - U_{\zeta 2}(0)}{x_2 - 0} \leftrightarrow U_{\zeta 2}(x_2) = g'(x_2) x_2 \leftrightarrow \sqrt{x_2} = \frac{3t}{2}$. Отже, точка x_2 знайдена. Стрибок в цій точці знаходимо за формулою $p_2 = \frac{r_1}{x_2} = \frac{4m_2}{3t^2}$. Необхідною умовою існування ф.р. $F_{\zeta 2}(x)$ є нерівність $r_1 < x_2 \leftrightarrow \sqrt{r_1} < \frac{3t}{2} \leftrightarrow$ $\leftrightarrow m_2 < 3t^2 / 4 \ge m_2 \leftrightarrow t^2 \ge 4m_2 / 3$. Остання нерівність визначає область параметрів, в якій ф.р. $F_{\zeta 2}(x)$ може бути екстремальною. Легко бачити, що вона дійсно є екстремальною, бо для неї виконуються умови 1 і 3 теореми 2. Відповідний максимум дорівнює $g(x_2) p_2 = 4m_2 / 9t^2$. Теорему 3 доведено.

Зазначимо важливий факт, згідно з яким за виконанням тільки окремих необхідних умов теореми 2 може бути доведено виконання всіх необхідних і достатніх умов теореми 2. Це може залежати від властивостей функції $g(x)$ в досліджуваному функціоналі або від існування функцій розподілу і відповідних їм многочленів, або з виконання умов теореми 2 в окремих точках, або околів точок росту. Для більшого сприйняття доведення нерівностей Гауса їх представлено у табл. 1 і табл. 2. Під «спектром екстремального розподілу» вважатимемо точки росту і відповідні їм стрибки екстремальної ф.р.

УЗАГАЛЬНЕНА НЕРІВНІСТЬ ГАУСА

Друга нерівність Гауса є розв'язком другої задачі, анонсованої на початку статті. Її розв'язок є аналогічним доведенню теореми 3. Цю нерівність Гауса можна знайти в книзі Р. Барлоу і Ф. Прошана [2] без доведення і знаходження екстремальних функцій розподілу. Автори цієї книги посилаються на [7–10], де доведено розглянуті у цій статті обидві нерівності. На жаль, джерела [7–10] за 1880, 1922, 1950 роки недоступні для авторки. Метод, запропонований в [1], датується 1976 роком (російський переклад). Авторка спростила його і додала явний вигляд екстремальних функцій розподілу, на яких досягаються розглянуті нерівності Гауса. Розв'язок узагальненої нерівності Гауса представлено в табл. 2. Додамо тільки декілька зауважень.

1. Розв'язок обох задач, сформульованих на початку статті, зводиться до найпростішої задачі типу нерівностей Чебишова: знайти максимум функціонала

$I(F_\varsigma) = \int\limits_0^\infty g(x) dF_\zeta(x)$, де функція $g(x)$ відома, а ф.р. $F_\zeta(x)$ не є унімодальною і у неї відомий тільки перший момент $s_1 = \int\limits_0^\infty x dF_\zeta(x) = (r+1)m_r,\ r \ge 2$.

Для узагальненої нерівності Гауса маємо

$$g(x) = \left\{ \begin{matrix} 0, & \text{якщо } (0 \le x \le t^r) \\ 1 - t / x^{1/r}, & \text{якщо } (x \ge t^r) \end{matrix} \right\},\ r \ge 2.$$

2. У розглянутих тут двох задачах викладено просте знаходження розбиття області параметрів $t, m_r, r \ge 2$, в яких визначено дві ф.р. $F_{\zeta 1}(x), F_{\zeta 2}(x)$ і легко доводиться їхня екстремальність.

3. За спектрами ф.р. $F_{\zeta 1}(x), F_{\zeta 2}(x)$ знаходяться відповідні екстремальні ф.р. $F_{\mu 1}(x), F_{\mu 2}(x)$, враховуючи, що крайніми точками в класі унімодальних ф.р. з одним фіксованим моментом є кусково-постійні щільності і кусково-лінійні функції розподілу (див. зауваження 2 і табл. 1, 2).

Щільність $f_{\mu 2} = F'_{\mu 2}(x)$ має δ-функцію Дірака в моді $(m=0)$ з масою p_1, а функція $F_{\mu 2}$ має в моді стрибок, який дорівнює p_1.

Таблиця 1. Нерівність Гауса і екстремальні функції розподілу

Максимальні значення імовірності $P\{\mu > t\},\ F_\mu \in A_2$	**Області параметрів**	**Спектри екстремальних функцій розподілів $F_{\zeta i}(x), i = 1,2$**	**Екстремальні функції розподілу $F_{\mu i}(x), i = 1,2$**
$1 - \frac{t}{\sqrt{3m_2}}$	$t^2 \le \frac{4m_2}{3}$	$F_{\zeta 1}$: $x_1 = (3m_2)^{1/2},\ p_1 = 1,$ $x \in (0, (3m_2)^{1/2})$	$F_{\mu 1}(x) = \frac{x}{\sqrt{3m_2}},$ $x \in (0, \sqrt{3m_2})$
$\frac{4m_2}{9t^2}$	$t^2 \ge \frac{4m_2}{3}$	$F_{\zeta 2}(x)$: $x_1 = 0,\ p_1 = 1 - \frac{4m_2}{3t^2},$ $x_2^{1/2} = \frac{3}{2}t,\ p_2 = \frac{4m_2}{3t^2},$ $x \in (0, x_2^{1/2})$	$F_{\mu 2}(x) = p_1 + xp_2 / x_2^{1/2},$ $p_1 = 1 - p_2;\ x_2^{1/2} = \frac{3t}{2};$ $p_2 = \frac{4m_2}{3t^2};\ x \in (0, x_2^{1/2})$

Таблиця 2. Узагальнена нерівність Гауса і екстремальні функції розподілу

Максимум $P\{\mu > t\},\ F_\mu \in A_r$	**Області параметрів**	**Спектри екстремальних функцій розподілів $F_{\zeta i}(x), i = 1,2$**	**Екстремальні функції розподілу $F_{\mu i}(x), i = 1, 2$**
$1 - \frac{t}{[(r+1)m_r]^{1/r}}$	$t^r \le \frac{r^r m_r}{(r+1)^{r-1}}$	$F_{\zeta 1}$: $x_1 = [(r+1)m_r]^{1/r},\ p_1 = 1,$ $x \in (0, [(r+1)m_r]^{1/r})$	$F_{\mu 1}(x) = \frac{x}{[(r+1)m_r]^{1/r}},$ $x \in (0, [(r+1)m_r]^{1/r})$
$\frac{r^r m_r}{[(r+1)t]^r}$	$t^r \ge \frac{r^r m_r}{(r+1)^{r-1}}$	$F_{\zeta 2}$: $x_1 = 0.\ x_2^{1/r} = [(r+1)t]/r,$ $p_1 = 1 - p_2,$ $p_2 = \frac{r^r m_r}{(r+1)^{r-1} t^r},\ x \in (0, x_2^{1/r})$	$F_{\mu 2}(x) = p_1 + xp_2 / x_2^{1/r};$ $x_2^{1/r} = [(r+1)t]/r,$ $p_1 = 1 - p_2;$ $p_2 = r^r m_r / t^r (r+1)^{r-1};$ $x \in (0, x_2^{1/r})$

ВИСНОВКИ

У цій роботі на прикладі нерівностей Гауса досить детально викладено метод знаходження екстремумів лінійних функціоналів від класів унімодальних розподілів. Зазначено важливі моменти щодо спрощення знаходження розбиття області параметрів задачі і отримання екстремальних унімодальних функцій розподілу і їхніх щільностей.

Складніша задача, фрагмент якої розв'язано в [11], потребує подальшого розв'язання за пропонованим методом.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. Москва: Наука, 1976. 568 с.
2. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. Москва: Сов. радио, 1969. 488 с.
3. Johnson N.L., Rogers C.A. The moment problem for unimodal distribution. *Ann. Math. Stat.* 1951. Vol. 22. P. 433–439.
4. Mulholland H.P., Rogers C.A. Representation theorems for distribution functions. *Proc. London Math. Soc.* 1958. Vol. 3, N 8. P. 177–223.
5. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Москва: Наука, 1973. 551 с.
6. Stoikova L.S., Kovalchuk L.V. Exact estimates for some linear functionals of unimodal distribution functions under incomplete information. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2019. Vol. 55, N 6. P. 914–925. https://doi.org.10.1007.s10559-019-00201-z.
7. Gauss C.F. Theoria combination observation. *Werk.* 1880. N 4, P. 10–11. (Goettingen).
8. Camp B.H. A new generalization of Thebyscheff's statistical inequality. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1922. Vol. 28. P. 427–432.
9. Meidel B. Sur une problem due calcul des probabilites et les statistiques mathematiques. C.R. Acad. Sci., 1922. Vol. 175. P. 806–808.
10. Frechet M. Generalities sur probabilities. Elements aleatoires (2 nd ed.). Borel Senes.*Traite du calcul des probabilities et de ses applications.* 1950. Div. 1, Pt. III, Vol. 1. Gauthier–Villars, Paris.
11. Stoikova L.S. Exacte estimates of the probability of a non-negative unimodal random value hitting special intervals under incomplete information. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2021. Vol. 57, N 2. P. 264–267. https://doi.org.10.1007.s10559-021-00351-z.

L.S. Stoikova

ALTERNATIVE PROOF OF GAUSS'S INEQUALITIES

Abstract. A clear formulation of Gauss's inequalities is given. A transparent proof based on the well-known fundamental results is presented. In this proof, a simple way of constructing a partition of the domain of the problem parameters is proposed. An explicit form of the extremum distribution functions is also formulated.

Keywords: extreme values, linear functionals, classes of unimodal distribution functions.

Надійшла до редакції 30.08.2022