УДК 517.977

А.О. ЧИКРІЙ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *g.chikrii@gmail.com.*

Й.С. РАППОПОРТ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *jeffrappoport@gmail.com.*

МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ В ІГРОВИХ ЗАДАЧАХ ЗБЛИЖЕННЯ КЕРОВАНИХ ОБ'ЄКТІВ З РІЗНОЮ ІНЕРЦІЙНІСТЮ

Анотація. Розглянуто проблему зближення керованих об'єктів з різною інерційністю в ігрових задачах динаміки. Сформульовано модифіковані достатні умови закінчення гри за кінцевий гарантований час у разі, коли умова Понтрягіна не виконується. Замість селектора Понтрягіна розглядаються деякі функції зсуву, а з їхньою допомогою вводяться спеціальні багатозначні відображення. Вони породжують верхні і нижні розв'язувальні функції спеціального типу і на їхній основі запропоновано два типи модифікованих схем: першого методу Понтрягіна та методу розв'язувальних функцій. Це забезпечує завершення конфліктно-керованого процесу для об'єктів з різною інерційністю в класі квазістратегій і контркерувань. Нові теоретичні результати проілюстровано на модельному прикладі.

Ключові слова: керовані об'єкти з різною інерційністю, квазілінійна диференціальна гра, багатозначне відображення, вимірний селектор, стробоскопічна стратегія, розв'язувальна функція.

ВСТУП

Робота присвячена вивченню проблеми зближення керованих об'єктів з різною інерційністю та перехоплення цілей в ігрових задачах динаміки на основі першого методу Понтрягіна [1], а також методу розв'язувальних функцій [2] і його сучасної версії [3]. Актуальність цієї проблеми зумовлена необхідністю теоретичного обґрунтування відомих проєктувальникам ракетної та космічної техніки методів кривої погоні Л. Ейлера, методу переслідування за променем і, зокрема, паралельного зближення. Умова Понтрягіна [1] є ключовою умовою в першому методі Понтрягіна та методу розв'язувальних функцій, і у разі її невиконуваності ці методи не працюють. Для керованих об'єктів з різною інерційністю характерним є те, що на деякому інтервалі часу не виконується умова Понтрягіна, що істотно ускладнює застосування методу розв'язувальних функцій до цього класу ігрових задач динаміки. Прикладом може бути задача «хлопчик і крокодил» [2].

У цій роботі описано випадок, коли умова Понтрягіна не виконується і замість селектора Понтрягіна розглядаються деякі функції зсуву, за допомогою яких вводяться спеціальні багатозначні відображення. Вони породжують верхні і нижні розв'язувальні функції спеціального типу і на їхній основі запропоновано модифіковані схеми першого методу Понтрягіна та методу розв'язувальних функцій. Це забезпечує завершення конфліктно-керованого процесу для об'єктів з різною інерційністю в класі квазістратегій і контркерувань. Нові теоретичні результати проілюстровано на модельному прикладі.

Робота продовжує дослідження [1–5], дотична до публікацій [6–12] і поширює клас ігрових задач зближення керованих об'єктів з різною інерційністю, які мають розв'язок.

МОДИФІКОВАНА СХЕМА ПЕРШОГО МЕТОДУ ПОНТРЯГІНА

Розглянемо конфліктно-керований процес, еволюцію якого описано рівністю

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t, \tau)\varphi(u(\tau), v(\tau))\, d\tau, \;\; t \geq 0\,. \tag{1}$$

Тут $z(t) \in R^n$, функція $g(t)$, $g: R_+ \to R^n$, вимірна за Лебегом [9] і обмежена для $t > 0$, матрична функція $\Omega(t, \tau)$, $t \geq \tau \geq 0$, вимірна за t, а також є сумовною за τ для кожного $t \in R_+$. Блок керування задається функцією $\varphi(u, v)$, $\varphi: U \times V \to R^n$, яка вважається безперервною за сукупністю змінних на прямому добутку непустих компактів U і V; m, l, n — натуральні числа.

Керування гравців $u(\tau)$, $u: R_+ \to U$, і $v(\tau)$, $v: R_+ \to V$, є вимірними функціями часу.

Крім процесу (1) задано термінальну множину M^*, що має циліндричний вигляд

$$M^* = M_0 + M, \tag{2}$$

де M_0 — лінійний підпростір з R^n, а M — компакт з ортогонального додатка L до підпростору M_0 у R^n.

Цілі першого (u) і другого (v) гравців протилежні. Перший гравець (переслідувач) намагається вивести траєкторію процесу (1) на термінальну множину (2) за найкоротший час, а другий гравець (втікач) — максимально відтягнути момент потрапляння траєкторії на множину M^* або взагалі уникнути зустрічі.

Станемо на бік першого гравця і вважатимемо, що у разі, коли гра (1), (2) триває на інтервалі $[0, T]$, керування першого гравця в момент t вибиратимемо на основі інформації про $g(T)$ і $v_t(\cdot)$, тобто у вигляді вимірної функції

$$u(t) = u(g(T), v_t(\cdot)), \ t \in [0, T], \ u(t) \in U, \tag{3}$$

де $v_t(\cdot) = \{v(s): s \in [0, t]\}$ — передісторія керування другого гравця до моменту t, або у вигляді контркерування

$$u(t) = u(g(T), v(t)), \ t \in [0, T], \ u(t) \in U. \tag{4}$$

Якщо, зокрема, $g(t) = e^{At} z_0, \Omega(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$, $z(0) = z_0$, а e^{At} — матрична експонента, то вважатимуть, що керування $u(t) = u(z_0, v_t(\cdot))$ реалізує квазістратегію [7], а контркерування [6] $u(t) = u(z_0, v(t))$ є проявом стробоскопічної стратегії Хайєка [8].

Сформулюємо необхідні факти з опуклого [1, 10] аналізу у вигляді леми.

Лема 1. Нехай $X \in R^n$ — опуклий компакт, $\omega(\tau)$ — невід'ємна обмежена вимірна числова функція. Тоді $\int_0^T \omega(\tau) X d\tau = \int_0^T \omega(\tau) d\tau X$, $T > 0$. До того ж якщо $0 \in X$, $f(\tau) \in \omega(\tau) X$ і $\int_0^T \omega(\tau) d\tau \leq 1$, то $\int_0^T f(\tau) d\tau \in X$, $f(\tau)$ — вимірна функція, $\tau \in [0, T]$.

Позначимо π оператор ортогонального проєктування з R^n у L. Поклавши $\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v): u \in U\}$, розглянемо багатозначні відображення

$$W(t, \tau, v) = \pi \Omega(t, \tau) \varphi(U, v), \ W(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} W(t, \tau, v)$$

на множинах $\Delta_\Theta \times V$ і Δ_Θ відповідно, де $\Delta_\Theta = \{(t, \tau): 0 \leq \tau \leq t \leq \Theta < \infty\}$, Θ — деяке позитивне число. Припустимо, що багатозначне відображення $W(t, \tau, v)$ має замкнені значення на множині $\Delta_\Theta \times V$.

Умова Понтрягіна. Багатозначне відображення $W(t, \tau)$ приймає непусті значення на множині Δ_Θ, Θ — деяке позитивне число.

З урахуванням припущень про матричну функцію $\Omega(t,\tau)$ можна зробити висновок, що для будь-якого фіксованого $t>0$ вектор-функція $\pi\Omega(t,\tau)\varphi(u,v)$ буде $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-вімірною за $(\tau,v)\in[0,t]\times V$ і безперервною за $u\in U$. Тому на підставі теореми про прямий образ [9] для будь-якого фіксованого $t>0$ багатозначне відображення $W(t,\tau,v)$ є $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-вимірним за $(\tau,v)\in[0,t]\times V$. Якщо умова Понтрягіна виконана, то на множині Δ існує принаймні один селектор $\gamma_0(t,\tau)$ відображення $W(t,\tau)$, $\gamma_0(t,\tau)\in W(t,\tau)$. Такий селектор називатимемо селектором Понтрягіна. Сформулюємо умову Понтрягіна в еквівалентному вигляді.

На множині Δ_Θ, де Θ — деяке позитивне число, існує селектор Понтрягіна $\gamma_0(t,\tau)$, для якого справедливе включення

$$0\in\bigcap_{v\in V}[W(t,\tau,v)-\gamma_0(t,\tau)].$$

Умова Понтрягіна є ключовою умовою для першого методу Понтрягіна, і якщо вона не виконана, то метод не працює. Сформулюємо модифіковану умову Понтрягіна для керованих об'єктів з різною інерційністю.

Нехай $\gamma(t,\tau)$, $\gamma:\Delta_\Theta\to L$, — деяка (майже всюди) обмежена вимірна за t і сумовна за τ, $\tau\in[0,t]$, для кожного $t>0$ функція, яку називатимемо функцією зсуву, $\Delta_\Theta=\{(t,\tau)\colon 0\le\tau\le t\le\Theta<\infty\}$, Θ — деяке позитивне число. Нехай M_1 — опуклий компакт із ортогонального додатку L до підпростору M_0 у R^n такий, що для $m\in M_1$ матимемо $-m\in M_1$, і $M_2=M \overset{*}{-} M_1=\{m\in L\colon m+M_1\subset M\}=\bigcap_{m\in M_1}(M-m)\ne\varnothing$, де $\overset{*}{-}$ — геометрична різниця Мінковського [1]. Називатимемо допустимими функцію зсуву $\gamma(t,\tau)$ і множини M_1, M_2, для яких справедливі зазначені умови та властивості.

Розглянемо компактнозначне вимірне багатозначне відображення $\overline{V}(t)$, $\overline{V}(t)\subset V$ і безперервну матричну функцію $B(t)$ із значеннями порядку k, де k — розмірність вектора $\overline{v}\in\overline{V}(t)$, $t\in[0,\Theta]$, Θ — деяке позитивне число. Зазначимо, що для відображення $\overline{V}(t)$ існує вимірний селектор $\overline{v}_s(t)$, $\overline{v}_s(t)\in\overline{V}(t)$, $t\in[0,\Theta]$. Далі припускатимемо, шо багатозначне відображення $\overline{V}(t)$ є компактнозначним вимірним відображенням, а матрична функція $B(t)$ є безперервною функцією.

Позначимо $W_B(t,\tau,v)=\pi\Omega(t,\tau)\varphi(U,B(t-\tau)\overline{v})$, $\varphi_B(t,u,v,\overline{v})=\varphi(u,B(t,\tau)\overline{v})-\varphi(u,v)$, $(t,\tau)\in\Delta_\Theta$, $u\in U$, $v\in V$, $\overline{v}\in\overline{V}(t)$ і розглянемо для $(t,\tau)\in\Delta_\Theta$, $v\in V$, $\overline{v}\in\overline{V}(t)$ багатозначне відображення

$$\Lambda_B(t,\tau,v,\overline{v})=\{\lambda\ge 0\colon \pi\Omega(t,\tau)\varphi_B(t,U,v,\overline{v})\subset\lambda M_1\}.$$

Якщо на множині $\Delta_\Theta\times V\times\overline{V}(t)$ виконано умову $\Lambda_B(t,\tau,v,\overline{v})\ne\varnothing$, то розглянемо скалярну функцію $\lambda_B(t,\tau,v,\overline{v})=\inf\{\lambda\colon\lambda\in\Lambda_B(t,\tau,v,\overline{v})\}$, $\tau\in[0,t]$, $v\in V,\overline{v}\in\overline{V}(t)$. Покажемо [12], що багатозначне відображення $\Lambda_B(t,\tau,v,\overline{v})$ є замкненозначним, $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}\otimes\mathfrak{B}$-вимірним за сукупністю $(\tau,v,\overline{v})$, $\tau\in[0,t]$, $v\in V$, $\overline{v}\in\overline{V}(t)$, а функція $\lambda_B(t,\tau,v,\overline{v})$ є $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}\otimes\mathfrak{B}$-вимірною за сукупністю $(\tau,v,\overline{v})$, $\tau\in[0,t]$, $v\in V$, $\overline{v}\in\overline{V}(t)$, і тому вона суперпозиційно вимірна [12], тобто $\lambda_B(t,\tau,v(\tau),\overline{v}(\tau))$ вимірна за τ, $\tau\in[0,t]$, за будь-яких вимірних функцій $v(\tau)$ і $\overline{v}(\tau)$, $v(\cdot)\in V(\cdot)$, $\overline{v}(\cdot)\in\overline{V}_t(\cdot)$, де $V(\cdot)$ — сукупність вимірних функцій $v(\tau)$, $\tau\in[0,+\infty]$, зі значеннями із V, $\overline{V}_t(\cdot)$ — сукупність вимірних функцій $\overline{v}(\tau)$, $\tau\in[0,+\infty]$, зі значеннями із $\overline{V}(t)$. Зазначимо також, що функція $\sup_{v\in V,\overline{v}\in\overline{V}(t)}\lambda_B(t,\tau,v,\overline{v})$ вимірна за τ, $\tau\in[0,t]$.

Умова 1. Існують багатозначне відображення $\bar{V}(t)$, $\bar{V}(t) \subset V$ і матрична функція $B(t)$, $t \in [0, \Theta]$, Θ — деяке позитивне число, допустимі функція зсуву $\gamma_0(t, \tau)$ та множина M_1, для яких справедливі співвідношення $\Lambda_B(t, \tau, \upsilon, \bar{\upsilon}) \neq \varnothing$, $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$, $\upsilon \in V$, $\bar{\upsilon} \in \bar{V}(t)$, нерівність $\int_0^t \sup_{\upsilon \in V, \bar{\upsilon} \in \bar{V}(t)} \lambda_B(t, \tau, \upsilon, \bar{\upsilon}) d\tau \leq 1$ і включення

$$0 \in \bigcap_{\bar{\upsilon} \in \bar{V}(t)} [W_B(t, \tau, \bar{\upsilon}) - \gamma_0(t, \tau)], \ \varphi_B(t, U, V, \bar{V}(t)) \subset \sup_{\upsilon \in V, \bar{\upsilon} \in \bar{V}(t)} \lambda_B(t, \tau, \upsilon, \bar{\upsilon}) M_1 .$$

Позначимо $\xi_0(t) = \xi(t, g(t), \gamma_0(t, \cdot)) = \pi g(t) + \int_0^t \gamma_0(t, \tau) d\tau$ і розглянемо множину $\mathrm{P}(g(\cdot), \gamma_0(\cdot, \cdot)) = \{t \in [0, \Theta] : \xi_0(t) \in M_2\}$. Якщо співвідношення у фігурних дужках не виконується для жодних $t \in [0, \Theta]$, то покладемо $\mathrm{P}(g(\cdot), \gamma_0(\cdot, \cdot)) = \varnothing$.

Теорема 1. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2) існують багатозначне відображення $\bar{V}(t)$, $\bar{V}(t) \subset V$, і матрична функція $B(t)$, $t \in [0, \Theta]$, Θ — деяке позитивне число, допустимі функція зсуву $\gamma_0(t, \tau)$ і множини M_1, M_2 такі, що на множині Δ_Θ виконана умова 1, множина $\mathrm{P}(g(\cdot), \gamma_0(\cdot, \cdot))$ не є порожньою і $\mathrm{P} \in \mathrm{P}(g(\cdot), \gamma_0(\cdot, \cdot))$. Тоді гра може бути закінчена в момент P з використанням керування вигляду (4).

Доведення. Нехай $\upsilon(\tau)$ — довільний вимірний селектор компакта V, $\tau \in [0, \mathrm{P}]$. Зазначимо спосіб вибору керування переслідувачем.

Розглянемо для $\bar{\upsilon} \in \bar{V}(t)$, $\tau \in [0, \mathrm{P}]$ компактнозначне багатозначне відображення

$$U(\tau, \bar{\upsilon}) = \{u \in U : \pi\Omega(\mathrm{P}, \tau)\varphi(u, B(\mathrm{P} - \tau)\bar{\upsilon}) - \gamma(\mathrm{P}, \tau) = 0\} .$$

Унаслідок властивостей параметрів процесу (1) компактнозначне відображення $U(\tau, \bar{\upsilon})$ є $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірним [12] для $\bar{\upsilon} \in \bar{V}(t)$, $\tau \in [0, \mathrm{P}]$. Тому за теоремою про вимірний вибір селектора [9] багатозначне відображення $U(\tau, \bar{\upsilon})$ містить $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірний селектор $u(\tau, \bar{\upsilon})$, який є суперпозиційно вимірною функцією [12].

Нехай $\bar{\upsilon}_s(\cdot)$ є вимірним селектором відображення $\bar{V}(t)$. Покладемо для $\tau \in [0, \mathrm{P}]$ керування першого гравця $u(\tau) = u(\tau, \bar{\upsilon}(\tau))$, де

$$\bar{\upsilon}(\tau) = \begin{cases} \upsilon(\tau), & \text{якщо } \upsilon(\tau) \in \bar{V}(t - \tau), \\ \bar{\upsilon}_s(\tau), & \text{якщо } \upsilon(\tau) \notin \bar{V}(t - \tau). \end{cases}$$

З урахуванням формули (1) отримаємо

$$\pi z(\mathrm{P}) = -\int_0^{\mathrm{P}} \pi\Omega(\mathrm{P}, \tau)\varphi_B(\mathrm{P}, u(\tau), \upsilon(\tau), \bar{\upsilon}(\tau)) d\tau +$$

$$+ \xi_0(\mathrm{P}) + \int_0^{\mathrm{P}} (\pi\Omega(\mathrm{P}, \tau)\varphi(u(\tau), B(\mathrm{P} - \tau)\bar{\upsilon}(\tau)) - \gamma_0(\mathrm{P}, \tau)) d\tau.$$

Тоді внаслідок умови 1 щодо визначення моменту P маємо

$$\pi\Omega(\mathrm{P}, \tau)\varphi_B(\mathrm{P}, u(\tau), \upsilon(\tau), \bar{\upsilon}(\tau)) \in \sup_{\upsilon \in V, \bar{\upsilon} \in \bar{V}(t)} \lambda_B(\mathrm{P}, \tau, \upsilon, \bar{\upsilon}) M_1$$

і

$$\int_0^{\mathrm{P}} \sup_{\upsilon \in V, \bar{\upsilon} \in \bar{V}(t)} \lambda_B(\mathrm{P}, \tau, \upsilon, \bar{\upsilon}) d\tau \leq 1 .$$

Тому згідно з лемою 1 справедливе включення

$$\int_0^{\mathrm{P}} \pi\Omega(\mathrm{P},\tau)\varphi_B(\mathrm{P}, u(\tau), \upsilon(\tau), \overline{\upsilon}(\tau))d\tau \in M_1$$

і, отже,

$$-\int_0^{\mathrm{P}} \pi\Omega(\mathrm{P},\tau)\varphi_B(\mathrm{P}, u(\tau), \upsilon(\tau), \overline{\upsilon}(\tau))d\tau \in M_1.$$

З урахуванням закону вибору керування першим гравцем отримаємо $\pi z(\mathrm{P}) \in M_1 + \xi_0(\mathrm{P}) \in M_1 + M_2 \subset M$ і $z(\mathrm{P}) \in M^*$. що й завершує доказ теореми.

Зауваження 1. Теорема 1 є аналогом першого прямого методу Понтрягіна [1] для керованих об'єктів із різною інерційністю. Зазначимо, що допустима функція зсуву $\gamma_0(t,\tau)$ в умові 1 є селектором Понтрягіна для багатозначного відображення $\overline{V}(t)$, $\overline{V}(t) \subset V$. Якщо виконано умову Понтрягіна, то покладемо $\overline{V}(t) = V$, $B(t) = E$, E — одинична матриця, і перетворимо умову 1 на умову Понтрягіна. Отже, умову 1 вважатимемо модифікованою умовою Понтрягіна першого типу для керованих об'єктів із різною інерційністю.

Позначимо $\xi(t) = \xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot)) = \pi g(t) + \int_0^t \gamma(t,\tau)d\tau$ та розглянемо для $(t,\tau) \in \Delta_\Theta$, $\Theta > 0$, $\overline{\upsilon} \in \overline{V}(t)$ багатозначне відображення

$$\mathfrak{A}(t,\tau,\overline{\upsilon}) = \{\alpha \ge 0 \colon [W_B(t,\tau,\overline{\upsilon}) - \gamma(t,\tau)] \cap \alpha[M_2 - \xi(t)] \ne \varnothing\}. \tag{5}$$

Якщо на множині $\Delta_\Theta \times \overline{V}$ виконано умову $\mathfrak{A}(t,\tau,\overline{\upsilon}) \ne \varnothing$, то розглянемо верхню і нижню скалярні розв'язувальні функції [4]

$$\alpha^*(t,\tau,\overline{\upsilon}) = \sup\{\alpha \colon \alpha \in \mathfrak{A}(t,\tau,\overline{\upsilon})\},$$

$$\alpha_*(t,\tau,\overline{\upsilon}) = \inf\{\alpha \colon \alpha \in \mathfrak{A}(\mathrm{t},\tau,\overline{\upsilon})\},\ (t,\tau) \in \Delta_\Theta,\ \overline{\upsilon} \in \overline{V}(t).$$

Можна показати [12], що багатозначне відображення $\mathfrak{A}(t,\tau,\overline{\upsilon})$ є замкненозначним, $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірним за сукупністю (τ, υ), $(t,\tau) \in \Delta_\Theta$, $\overline{\upsilon} \in \overline{V}(t)$, а верхня і нижня розв'язувальні функції є $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірними за сукупністю (τ, υ), $(t,\tau) \in \Delta_\Theta$, $\overline{\upsilon} \in \overline{V}(t)$ і тому вони суперпозиційно вимірні [12], тобто $\alpha^*(t,\tau,\overline{\upsilon}(\tau))$ і $\alpha_*(t,\tau,\overline{\upsilon}(\tau))$ вимірні за τ, $(t,\tau) \in \Delta_\Theta$, для будь-якої вимірної функції $\overline{\upsilon}(\cdot) \in \overline{V}_t(\cdot)$. Зазначимо також, що верхня розв'язувальна функція напівбезперервна зверху, нижня — напівбезперервна знизу за змінною $\overline{\upsilon}$ та функції $\inf\limits_{\overline{\upsilon} \in \overline{V}(t)} \alpha^*(t,\tau,\overline{\upsilon})$ і $\sup\limits_{\overline{\upsilon} \in \overline{V}(t)} \alpha_*(t,\tau,\overline{\upsilon})$ є вимірними за τ, $(t,\tau) \in \Delta_\Theta$.

Умова 2. Існують багатозначне відображення $\overline{V}(t)$, $\overline{V}(t) \subset V$, і матрична функція $B(t)$, $t \in [0,\Theta]$, Θ — деяке позитивне число, допустимі функція зсуву $\gamma(t,\tau)$ і множини M_1, M_2, для яких справедливі співвідношення $\Lambda_B(t,\tau,\upsilon,\overline{\upsilon}) \ne \varnothing$, $(t,\tau) \in \Delta_\Theta$, $\upsilon \in V$, $\overline{\upsilon} \in \overline{V}(t)$, нерівності $\int_0^t \sup\limits_{\upsilon \in V,\, \overline{\upsilon} \in \overline{V}(t)} \lambda_B(t,\tau,\upsilon,\overline{\upsilon})\,d\tau \le 1$, $\int_0^t \sup\limits_{\overline{\upsilon} \in \overline{V}(t)} \alpha_*(t,\tau,\overline{\upsilon})\,d\tau < 1$ і включення

$$\varphi_B(t, U, V, \overline{V}(t)) \subset \sup_{\upsilon \in V,\, \overline{\upsilon} \in \overline{V}(t)} \lambda_B(t,\tau,\upsilon,\overline{\upsilon}) M_1,$$

$$0 \in \bigcap_{\overline{\upsilon} \in \overline{V}(t)} \{[W_B(t,\tau,\overline{\upsilon}) - \gamma(t,\tau)] - \mathfrak{A}(t,\tau,\overline{\upsilon})[M_2 - \xi(t)]\}.$$

Розглянемо множину

$$\mathrm{P}_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \{t \in [0, \Theta]: \xi(t) \in M_2\}. \tag{6}$$

Якщо включення в фігурних дужках співвідношення (6) не виконується для жодних $t \in [0, \Theta]$, то покладемо $\mathrm{P}_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \varnothing$.

Теорема 2. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2) існують багатозначне відображення $\overline{V}(t)$, $\overline{V}(t) \subset V$, і матрична функція $B(t)$, $t \in [0, \Theta]$, Θ — деяке позитивне число, допустимі функція зсуву $\gamma(t, \tau)$ і множини M_1, M_2 такі, що на множині Δ_Θ виконана умова 2, множина $\mathrm{P}_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не є порожньою і $\mathrm{P}_* \in \mathrm{P}_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$. Тоді гра може бути закінчена в момент P_* з використанням керування вигляду (4).

Доведення. Нехай $\upsilon(\tau)$ — довільний вимірний селектор компакта V, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*]$. Зазначимо спосіб вибору керування переслідувачем.

Розглянемо для $\overline{\upsilon} \in \overline{V}(t)$, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*]$ компактнозначне багатозначне відображення

$$U_*(\tau, \overline{\upsilon}) =$$
$$= \{u \in U: \pi\Omega(\mathrm{P}_*, \tau)\varphi(u, B(\mathrm{P}_* - \tau)\overline{\upsilon}) - \gamma(\mathrm{P}_*, \tau) \in \alpha_*(\mathrm{P}_*, \tau, \overline{\upsilon})[M_2 - \xi(\mathrm{P}_*)]\}.$$

Внаслідок властивостей параметрів процесу (1) та нижньої розв'язувальної функції $\alpha_*(\mathrm{P}_*, \tau, \overline{\upsilon})$ компактнозначне відображення $U_*(\tau, \overline{\upsilon})$ є $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірним [12] за $\overline{\upsilon} \in \overline{V}(t)$, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*]$. Тому за теоремою про вимірний вибір селектора [9] багатозначне відображення $U_*(\tau, \overline{\upsilon})$ містить $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірний селектор $u_*(\tau, \overline{\upsilon})$, який є суперпозиційно вимірною функцією [12].

Нехай $\overline{\upsilon}_s(\cdot)$ є вимірним селектором відображення $\overline{V}(t)$. Покладемо для $\tau \in [0, \mathrm{P}_*]$ керування першого гравця $u_*(\tau) = u_*(\tau, \overline{\upsilon}(\tau))$, де

$$\overline{\upsilon}(\tau) = \begin{cases} \upsilon(\tau), & \text{якщо } \upsilon(\tau) \in \overline{V}(t - \tau), \\ \overline{\upsilon}_s(\tau), & \text{якщо } \upsilon(\tau) \notin \overline{V}(t - \tau). \end{cases}$$

З урахуванням формули (1) отримаємо

$$\pi z(\mathrm{P}_*) = -\int_0^{\mathrm{P}_*} \pi\Omega(\mathrm{P}_*, \tau)\varphi_B(\mathrm{P}_*, u_*(\tau), \upsilon(\tau), \overline{\upsilon}(\tau))d\tau +$$
$$+\xi(\mathrm{P}_*) + \int_0^{\mathrm{P}_*} (\pi\Omega(\mathrm{P}_*, \tau)\varphi(u_*(\tau), B(\mathrm{P}_* - \tau)\overline{\upsilon}(\tau)) - \gamma(\mathrm{P}_*, \tau))d\tau. \tag{7}$$

Внаслідок умови 2 щодо визначення моменту P_* маємо

$$0 \in M_1,\ \pi\Omega(\mathrm{P}_*, \tau)\varphi_B(\mathrm{P}_*, u_*(\tau), \upsilon(\tau), \overline{\upsilon}(\tau)) \in \sup_{\upsilon \in V,\, \overline{\upsilon} \in \overline{V}(t)} \lambda_B(\mathrm{P}_*, \tau, \upsilon, \overline{\upsilon})M_1,$$
$$\int_0^{\mathrm{P}_*} \sup_{\upsilon \in V,\, \overline{\upsilon} \in \overline{V}(t)} \lambda_B(\mathrm{P}_*, \tau, \upsilon, \overline{\upsilon})\, d\tau \le 1.$$

Тоді з урахуванням леми 1 справедливе включення

$$\int_0^{\mathrm{P}_*} \pi\Omega(\mathrm{P}_*, \tau)\varphi_B(\mathrm{P}_*, u_*(\tau), \upsilon(\tau), \overline{\upsilon}(\tau))d\tau \in M_1$$

та за припущенням

$$-\int_0^{\mathrm{P}_*} \pi\Omega(\mathrm{P}_*, \tau)\varphi_B(\mathrm{P}_*, u_*(\tau), \upsilon(\tau), \overline{\upsilon}(\tau))d\tau \in M_1.$$

З урахуванням вибору керування та з визначення моменту P_* маємо

$$0 \in M_2 - \xi(\mathrm{P}_*),$$

$$\pi\Omega(\mathrm{P}_*, \tau)\varphi(u_*(\tau), B(\mathrm{P}_* - \tau)\overline{v}(\tau)) - \gamma(\mathrm{P}_*, \tau) \in \alpha_*(\mathrm{P}_*, \tau, \overline{v}(\tau))[M_2 - \xi(\mathrm{P}_*)],$$

$$\int_0^{\mathrm{P}_*} \sup_{\overline{v} \in \overline{V}(t)} \alpha_*(\mathrm{P}_*, \tau, \overline{v})\, d\tau \le 1.$$

Тоді з урахуванням леми 1 справедливе включення

$$\int_0^{\mathrm{P}_*} (\pi\Omega(\mathrm{P}_*, \tau)\varphi(u_*(\tau), B(\mathrm{P}_* - \tau)\overline{v}(\tau)) - \gamma(\mathrm{P}_*, \tau))d\tau \in M_2 - \xi(\mathrm{P}_*).$$

Отже, співвідношення (7) визначає

$$\pi z(\mathrm{P}_*) \in M_1 + \xi(\mathrm{P}_*) + M_2 - \xi(\mathrm{P}_*) = M_1 + M_2 \subset M$$

і $z(\mathrm{P}_*) \in M^*$, що й завершує доказ теореми.

Лема 2. Для конфліктно-керованого процесу (1), (2) виконано умову 1 тоді і тільки тоді, коли існують багатозначне відображення $\overline{V}(t)$, $\overline{V}(t) \subset V$, і матрична функція $B(t)$, $t \in [0, \Theta]$, Θ — деяке позитивне число, допустимі функція зсуву $\gamma(t, \tau)$, множини M_1, M_2, для яких справедливою є умова 2 і $0 \in \mathfrak{A}(t, \tau, \overline{v})$ на множині $\Delta_\Theta \times \overline{V}(t)$.

Доведення. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2) існують багатозначне відображення $\overline{V}(t)$, $\overline{V}(t) \subset V$, і матрична функція $B(t)$, $t \in [0, \Theta]$, Θ — деяке позитивне число, допустимі функція зсуву $\gamma(t, \tau)$ і множини M_1, M_2 такі, що виконана умова 2 і $0 \in \mathfrak{A}(t, \tau, \overline{v})$ на множині $\Delta_\Theta \times \overline{V}(t)$. Тоді нульове значення α забезпечує не пустоту перетину у виразі (5) і тому з урахуванням умови $\Lambda(t, \tau, v, \overline{v}) \ne \varnothing$, $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$, $v \in V$, $\overline{v} \in \overline{V}(t)$, маємо $0 \in W_B(t, \tau, \overline{v}) - \gamma(t, \tau)$, $(t, \tau, \overline{v}) \in \Delta_\Theta \times \overline{V}(t)$.

Звідси випливає, що для $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$ маємо $0 \in \bigcap_{\overline{v} \in \overline{V}(t)} [W_B(t, \tau, \overline{v}) - \gamma(t, \tau)]$, тобто справедлива умова 1. Виходячі з міркувань про зворотний порядок, дійдемо потрібного висновку.

Зауваження 2. Якщо є багатозначне відображення $\overline{V}(t)$, $\overline{V}(t) \subset V$, і матрична функція $B(t)$, $t \in [0, \Theta]$, Θ — деяке позитивне число, допустимі функція зсуву $\gamma(t, \tau)$, множини M_1, M_2, для яких виконана умова 1, то з використанням леми 2 отримуємо $\alpha_*(t, \tau, \overline{v}) = \inf\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(\mathrm{t}, \tau, \overline{v})\} = 0$ на множині $\Delta_\Theta \times \overline{V}(t)$.

МОДИФІКОВАНА СХЕМА МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Умову 2 вважатимемо модифікованою умовою Понтрягіна другого типу. Вона є ключовою в модифікованій схемі методу розв'язувальних функцій для керованих об'єктів із різною інерційністю. Сформулюємо модифіковану схему методу розв'язувальних функцій.

Умова 3. Існують багатозначне відображення $\overline{V}(t)$, $\overline{V}(t) \subset V$, і матрична функція $B(t)$, $t \in [0, \Theta]$, Θ — деяке позитивне число, допустимі функція зсуву $\gamma(t, \tau)$ і множини M_1, M_2 такі, що на множині Δ_Θ виконана умова 2 та справедливе включення

$$0 \in \bigcap_{\overline{v} \in \overline{V}(t)} \{[W_B(t, \tau, \overline{v}) - \gamma(t, \tau)] - \sup_{\overline{v} \in \overline{V}(t)} \alpha_*(t, \tau, \overline{v})[M_2 - \xi(t)]\}.$$

Зауваження 3. Якщо існують багатозначне відображення $\overline{V}(t)$, $\overline{V}(t) \subset V$, і матрична функція $B(t)$, $t \in [0, \Theta]$, Θ — деяке позитивне число, допустимі функція зсуву $\gamma(t, \tau)$, множини M_1, M_2, для яких виконано умову 1, то з використанням леми 2 виконано умову 3 і рівність $\sup\limits_{\overline{v} \in \overline{V}(t)} \alpha_*(t, \tau, \overline{v}) = 0$.

Розглянемо множину

$$T(g(t), \gamma(\cdot, \cdot)) = \left\{ t \in [0, \Theta] : \int_0^t \inf_{\overline{v} \in \overline{V}(t)} \alpha^*(t, \tau, \overline{v})\, d\tau \geq 1 \right\}. \tag{8}$$

Якщо $\alpha^*(t, \tau, \overline{v}) \equiv +\infty$ для $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$, $\overline{v} \in \overline{V}(t)$, то значення відповідного інтеграла у фігурних дужках співвідношення (8) природно вважатимемо $+\infty$ і $t \in T(g(t), \gamma(\cdot, \cdot))$. У разі, коли нерівність співвідношення (8) не справджується для всіх $t \in [0, \Theta]$, покладемо $T(g(t), \gamma(\cdot, \cdot)) = \varnothing$.

Теорема 3. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2) існують багатозначне відображення $\overline{V}(t)$, $\overline{V}(t) \subset V$, і матрична функція $B(t)$, $t \in [0, \Theta]$, Θ — деяке позитивне число, допустимі функція зсуву $\gamma(t, \tau)$ і множини M_1, M_2 такі, що виконано умову 3, множина $T(g(t), \gamma(\cdot, \cdot))$ не є порожньою і $T \in T(g(t), \gamma(\cdot, \cdot))$. Тоді гра може бути закінчена в момент T з використанням керування вигляду (3).

Доведення. Нехай $v(\cdot)$ є довільним вимірним селектором компакта V, а $\overline{v}_s(\cdot)$ є вимірним селектором відображення $\overline{V}(t)$. Покладемо для $\tau \in [0, T]$

$$\overline{v}(\tau) = \begin{cases} v(\tau), & \text{якщо } v(\tau) \in \overline{V}(t - \tau), \\ \overline{v}_s(\tau), & \text{якщо } v(\tau) \notin \overline{V}(t - \tau). \end{cases}$$

Зазначимо спосіб вибору керування переслідувачем.

Розглянемо насамперед випадок $\xi(T, g(T), \gamma(\cdot, \cdot)) \notin M_2$ та запровадимо контрольну функцію

$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha^*(T, \tau, \overline{v}(\tau))d\tau - \int_t^T \sup_{\overline{v} \in \overline{V}(t)} \alpha_*(T, \tau, \overline{v})d\tau, \ t \in [0, T].$$

За визначенням T маємо

$$h(0) = 1 - \int_0^T \sup_{\overline{v} \in \overline{V}(t)} \alpha_*(T, \tau, \overline{v})\, d\tau > 0,$$

$$h(T) = 1 - \int_0^T \alpha^*(T, \tau, \overline{v}(\tau))d\tau \leq 1 - \int_0^T \inf_{\overline{v} \in \overline{V}(t)} \alpha^*(T, \tau, \overline{v})\, d\tau \leq 0.$$

Внаслідок безперервності функції $h(t)$ існує такий момент часу t_*, $t_* \in (0, T]$, що $h(t_*) = 0$. Зазначимо, що момент перемикання t_* залежить від передісторії керування другого гравця $v_{t_*}(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t_*]\}$.

Проміжки часу $[0, t_*)$, $[t_*, T]$ називатимемо активним і пасивним відповідно. Запишемо спосіб керування першиго гравця на кожному проміжку. Для цього розглянемо компактні відображення

$$U^*(\tau, \overline{v}) = \{u \in U : \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, B(T - \tau)\overline{v}) - \gamma(T, \tau)) \in$$
$$\in \alpha^*(T, \tau, \overline{v})[M_2 - \xi(T)]\}, \ \tau \in [0, t_*), \tag{9}$$

$$U_*(\tau, \upsilon) = \{u \in U : \pi\Omega(T,\tau)\varphi(u, B(T-\tau)\overline{\upsilon}) - \gamma(T,\tau)) \in$$
$$\in \sup_{\overline{\upsilon}\in\overline{V}(t)} \alpha_*(T,\tau,\overline{\upsilon})[M_2 - \xi(T)]\}, \ \tau \in [t_*, T]. \tag{10}$$

Багатозначні відображення $U^*(\tau, \overline{\upsilon})$ і $U_*(\tau, \overline{\upsilon})$ має непорожні образи. З урахуванням властивостей параметрів процесу (1), функцій $\alpha^*(T,\tau,\overline{\upsilon})$ і $\sup_{\overline{\upsilon}\in\overline{V}(t)} \alpha_*(T,\tau,\overline{\upsilon})$ компактнозначні відображення $U^*(\tau,\overline{\upsilon})$, $\tau\in[0, t_*)$, і $U_*(\tau,\overline{\upsilon})$, $\tau\in[t_*, T]$, для $\overline{\upsilon}\in\overline{V}(t)$ є $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-вимірними [12]. Тому за теоремою про вимірний вибір селектора [9] у кожному з них існує хоча б по одному $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-вимірному селектору $u^*(\tau,\overline{\upsilon})$ і $u_*(\tau,\overline{\upsilon})$, які є суперпозиційно вимірними функціями [12]. Покладемо керування першого гравця на активному проміжку $u^*(\tau) == u^*(\tau, \overline{\upsilon}(\tau))$, $\tau\in[0, t_*)$, а на пасивному проміжку покладемо $u_*(\tau) = u_*(\tau, \overline{\upsilon}(\tau))$, $\tau\in[t_*, T]$.

На основі формули (1) для визначених керувань отримаємо

$$\pi z(T) = -\left[\int_0^{t_*} \pi\Omega(T,\tau)\varphi_B(T, u^*(\tau), \upsilon(\tau), \overline{\upsilon}(\tau))d\tau + \right.$$
$$\left. + \int_{t_*}^{T} \pi\Omega(T,\tau)\varphi_B(T, u_*(\tau), \upsilon(\tau), \overline{\upsilon}(\tau))d\tau \right] +$$
$$+\xi(T) + \int_0^{t_*} (\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u^*(\tau), B(T-\tau)\overline{\upsilon}(\tau)) - \gamma(T,\tau))d\tau +$$
$$+\int_{t_*}^{T} (\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u_*(\tau), B(T-\tau)\overline{\upsilon}(\tau)) - \gamma(T,\tau))d\tau. \tag{11}$$

Унаслідок умови 2 матимемо

$$0\in M_1, \ \int_0^T \sup_{\upsilon\in V, \overline{\upsilon}\in\overline{V}(t)} \lambda_B(T,\tau,\upsilon,\overline{\upsilon})\,d\tau \le 1,$$
$$\pi\Omega(T,\tau)\varphi_B(T, u^*(\tau), \upsilon(\tau), \overline{\upsilon}(\tau)) \in \sup_{\upsilon\in V, \overline{\upsilon}\in\overline{V}(t)} \lambda_B(T,\tau,\upsilon,\overline{\upsilon})M_1, \ \tau\in[0, t_*),$$
$$\pi\Omega(T,\tau)\varphi_B(T, u_*(\tau), \upsilon(\tau), \overline{\upsilon}(\tau)) \in \sup_{\upsilon\in V, \overline{\upsilon}\in\overline{V}(t)} \lambda_B(T,\tau,\upsilon,\overline{\upsilon})M_1, \ \tau\in[t_*, T].$$

Тоді з урахуванням леми 1 отримаємо

$$\int_0^{t_*} \pi\Omega(T,\tau)\varphi_B(T, u^*(\tau), \upsilon(\tau), \overline{\upsilon}(\tau))d\tau + \int_{t_*}^{T} \pi\Omega(T,\tau)\varphi_B(T, u_*(\tau), \upsilon(\tau), \overline{\upsilon}(\tau))d\tau \in M_1$$

та за припущенням маємо

$$-\left[\int_0^{t_*} \pi\Omega(T,\tau)\varphi_B(T, u^*(\tau), \upsilon(\tau), \overline{\upsilon}(\tau))d\tau + \right.$$
$$\left. + \int_{t_*}^{T} \pi\Omega(T,\tau)\varphi_B(T, u_*(\tau), \upsilon(\tau), \overline{\upsilon}(\tau))\,d\tau \right] \in M_1.$$

З урахуванням останнього включення співвідношення (9)–(11) визначають

$$\pi z(T) \in M_1 + \xi(T) + \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \overline{\upsilon}(\tau))[M_2 - \xi(T)]d\tau +$$

$$+\int_{t_*}^{T} \sup_{\overline{\upsilon} \in \overline{V}(t)} \alpha_*(T, \tau, \overline{\upsilon})[M_2 - \xi(T)]d\tau =$$

$$= M_1 + \xi(T) + \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \overline{\upsilon}(\tau))d\tau[M_2 - \xi(T)] + \int_{t_*}^{T} \sup_{\overline{\upsilon} \in \overline{V}(t)} \alpha_*(T, \tau, \overline{\upsilon})d\tau[M_2 - \xi(T)] =$$

$$= M_1 + \xi(T)[1 - \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \overline{\upsilon}(\tau))d\tau - \int_{t_*}^{T} \sup_{\overline{\upsilon} \in \overline{V}(t)} \alpha_*(T, \tau, \overline{\upsilon})d\tau] +$$

$$+[\int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \overline{\upsilon}(\tau))d\tau + \int_{t_*}^{T} \sup_{\overline{\upsilon} \in \overline{V}(t)} \alpha_*(T, \tau, \overline{\upsilon})d\tau]M_2 = M_1 + M_2 \subset M.$$

Тут враховано лему 1, рівність $h(t_*) = 0$ і включення $M_1 + M_2 \subset M$.

Для випадку $\xi(T, g(T), \gamma(\cdot, \cdot)) \in M_2$ достатньо застосувати теорему 2.

Умова 4. Існують багатозначне відображення $\overline{V}(t)$, $\overline{V}(t) \subset V$, і матрична функція $B(t)$, $t \in [0, \Theta]$, Θ — деяке позитивне число, допустимі функція зсуву $\gamma(t, \tau)$ і множини M_1, M_2 такі, що на множині Δ_Θ виконано умову 2 та справедливе включення

$$0 \in \bigcap_{\upsilon \in V} \{[W_B(t, \tau, \upsilon) - \gamma(t, \tau)] - \inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(t, \tau, \upsilon)[M_2 - \xi(t)]\}.$$

Теорема 4. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2) існують багатозначне відображення $\overline{V}(t)$, $\overline{V}(t) \subset V$, і матрична функція $B(t)$, $t \in [0, \Theta]$, Θ — деяке позитивне число, допустимі функція зсуву $\gamma(t, \tau)$ і множини M_1, M_2 такі, що виконано умови 3, 4, множина $T(g(t), \gamma(\cdot, \cdot))$ не є порожньою і $T \in T(g(t), \gamma(\cdot, \cdot))$. Тоді гра може бути закінчена в момент T з використанням керування вигляду (4).

Доведення. Нехай $\upsilon(\cdot)$ є довільним вимірним селектором компакта V, $\overline{\upsilon}_s(\cdot)$ є вимірним селектором відображення $\overline{V}(t)$. Покладемо для $\tau \in [0, T]$

$$\overline{\upsilon}(\tau) = \begin{cases} \upsilon(\tau), & \text{якщо } \upsilon(\tau) \in \overline{V}(t - \tau), \\ \overline{\upsilon}_s(\tau), & \text{якщо } \upsilon(\tau) \notin \overline{V}(t - \tau). \end{cases}$$

Зазначимо спосіб вибору керування переслідувачем.

Розглянемо спочатку випадок $\xi(T, g(T), \gamma(\cdot, \cdot)) \notin M_2$ та запровадимо контрольну функцію

$$h(t) = 1 - \int_0^t \inf_{\overline{\upsilon} \in \overline{V}(t)} \alpha^*(T, \tau, \overline{\upsilon})d\tau - \int_t^T \sup_{\overline{\upsilon} \in \overline{V}(t)} \alpha_*(T, \tau, \overline{\upsilon})d\tau, \ t \in [0, T].$$

За визначенням T маємо

$$h(0) = 1 - \int_0^T \sup_{\overline{\upsilon} \in \overline{V}(t)} \alpha_*(T, \tau, \overline{\upsilon})\, d\tau > 0, \ h(T) = 1 - \int_0^T \inf_{\overline{\upsilon} \in \overline{V}(t)} \alpha^*(T, \tau, \overline{\upsilon})\, d\tau \le 0.$$

Внаслідок безперервності функції $h(t)$ існує такий момент часу t_*, $t_* \in (0, T]$, що $h(t_*) = 0$. Зазначимо, що момент перемикання t_* не залежить від передісторії керування другого гравця $\upsilon_{t_*}(\cdot) = \{\upsilon(s) : s \in [0, t_*]\}$.

Проміжки часу $[0, t_*)$, $[t_*, T]$ називатимемо активним і пасивним відповідно. Запишемо спосіб керування першиго гравця на кожному проміжку. Для цього розглянемо компактні відображення

$$\widetilde{U}^*(\tau, \overline{v}) = \{u \in U : \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, B(T-\tau)\overline{v}) - \gamma(T, \tau) \in$$

$$\in \inf_{\overline{v} \in \overline{V}(t)} \alpha^*(T, \tau, \overline{v})[M_2 - \xi(T)]\}, \ \tau \in [0, t_*), \tag{12}$$

$$\widetilde{U}_*(\tau, \overline{v}) = \{u \in U : \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, B(T-\tau)\overline{v}) - \gamma(T, \tau) \in$$

$$\in \sup_{\overline{v} \in \overline{V}(t)} \alpha_*(T, \tau, \overline{v})[M_2 - \xi(T)]\}, \ \tau \in [t_*, T]. \tag{13}$$

Багатозначні відображення $\widetilde{U}^*(\tau, \overline{v})$ і $\widetilde{U}_*(\tau, \overline{v})$ мають непорожні образи. З урахуванням властивостей параметрів процесу (1), функцій $\inf\limits_{\overline{v} \in \overline{V}(t)} \alpha^*(T, \tau, \overline{v})$ і $\sup\limits_{\overline{v} \in \overline{V}(t)} \alpha_*(T, \tau, \overline{v})$ компактнозначні відображення $\widetilde{U}^*(\tau, \overline{v})$, $\tau \in [0, t_*)$, і $\widetilde{U}_*(\tau, \overline{v})$, $\tau \in [t_*, T]$, для $\overline{v} \in \overline{V}(t)$ є $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірними [12]. Тому за теоремою про вимірний вибір селектора [9] в кожному з них існує хоча б по одному $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірному селектору $\widetilde{u}^*(\tau, \overline{v})$ і $\widetilde{u}_*(\tau, \overline{v})$, які є суперпозиційно вимірними функціями [12]. Покладемо керування першого гравця на активному проміжку $\widetilde{u}^*(\tau) = \widetilde{u}^*(\tau, \overline{v}(\tau))$, $\tau \in [0, t_*)$, а на пасивному проміжку $\widetilde{u}_*(\tau) = \widetilde{u}_*(\tau, \overline{v}(\tau))$, $\tau \in [t_*, T]$.

На основі формули (1) для вибраних керувань отримаємо

$$\pi z(T) = -\left[\int_0^{t_*} \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T, \widetilde{u}^*(\tau), v(\tau), \overline{v}(\tau))d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{t_*}^{T} \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T, \widetilde{u}_*(\tau), v(\tau), \overline{v}(\tau))\, d\tau \right] +$$

$$+ \xi(T) + \int_0^{t_*} (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(\widetilde{u}^*(\tau), B(T-\tau)\overline{v}(\tau)) - \gamma(T, \tau))d\tau +$$

$$+ \int_{t_*}^{T} (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(\widetilde{u}_*(\tau), B(T-\tau)\overline{v}(\tau)) - \gamma(T, \tau))d\tau. \tag{14}$$

Унаслідок умови 2 маємо

$$0 \in M_1, \ \int_0^T \sup_{v \in V, \overline{v} \in \overline{V}(t)} \lambda_B(T, \tau, v, \overline{v})\, d\tau \le 1,$$

$$\pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T, \widetilde{u}^*(\tau), v(\tau), \overline{v}(\tau)) \in \sup_{v \in V, \overline{v} \in \overline{V}(t)} \lambda_B(T, \tau, v, \overline{v}) M_1, \ \tau \in [0, t_*),$$

$$\pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T, \widetilde{u}_*(\tau), v(\tau), \overline{v}(t)) \in \sup_{v \in V, \overline{v} \in \overline{V}(t)} \lambda_B(T, \tau, v, \overline{v}) M_1, \ \tau \in [t_*, T].$$

Тоді з урахуванням леми 1 отримаємо

$$\int_0^{t_*} \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T, \widetilde{u}^*(\tau), v(\tau), \overline{v}(t))d\tau + \int_{t_*}^{T} \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T, \widetilde{u}_*(\tau), v(\tau), \overline{v}(\tau))d\tau \in M_1$$

і тому маємо
$$-\left[\int_0^{t_*}\pi\Omega(T,\tau)\varphi_B(T,\widetilde{u}^*(\tau),\upsilon(\tau),\overline{\upsilon}(\tau))d\tau+\right.$$
$$\left.+\int_{t_*}^{T}\pi\Omega(T,\tau)\varphi_B(T,\widetilde{u}_*(\tau),\upsilon(\tau),\overline{\upsilon}(\tau))\,d\tau\right]\in M_1.$$

З урахуванням останнього включення співвідношення (12)–(14) визначають
$$\pi z(T)\in M_1+\xi(T)+\int_0^{t_*}\inf_{\overline{\upsilon}\in\overline{V}(t)}\alpha^*(T,\tau,\overline{\upsilon})[M_2-\xi(T)]d\tau+$$
$$+\int_{t_*}^{T}\sup_{\overline{\upsilon}\in\overline{V}(t)}\alpha_*(T,\tau,\overline{\upsilon})[M_2-\xi(T)]d\tau=$$
$$=M_1+\xi(T)+\int_0^{t_*}\inf_{\overline{\upsilon}\in\overline{V}(t)}\alpha^*(t,\tau,\overline{\upsilon})\,d\tau[M_2-\xi(T)]+$$
$$+\int_{t_*}^{T}\sup_{\overline{\upsilon}\in\overline{V}(t)}\alpha_*(T,\tau,\overline{\upsilon})d\tau[M_2-\xi(T)]=$$
$$=M_1+\xi(T)\left[1-\int_0^{t_*}\inf_{\overline{\upsilon}\in\overline{V}(t)}\alpha^*(t,\tau,\overline{\upsilon})d\tau-\int_{t_*}^{T}\sup_{\overline{\upsilon}\in\overline{V}(t)}\alpha_*(T,\tau,\overline{\upsilon})d\tau\right]+$$
$$+\left[\int_0^{t_*}\inf_{\overline{\upsilon}\in\overline{V}(t)}\alpha^*(t,\tau,\overline{\upsilon})d\tau+\int_{t_*}^{T}\sup_{\overline{\upsilon}\in\overline{V}(t)}\alpha_*(T,\tau,\overline{\upsilon})d\tau\right]M_2=M_1+M_2\subset M.$$

Тут враховано лему 1, рівність $h(t_*)=0$ і включення $M_1+M_2\subset M$.

У випадку $\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))\in M_2$ достатньо застосувати теорему 2.

МОДЕЛЬНИЙ ПРИКЛАД («ХЛОПЧИК І КРОКОДИЛ»)

Динаміку переслідувача і втікача задамо рівняннями відповідно
$$\ddot{x}=u,\ x\in R^n,\ n\ge 2,\ u\in S_r^{\rho},$$
$$\dot{y}=\upsilon,\ y\in R^n,\ n\ge 2,\ \upsilon\in S_0^{\sigma},\ \rho>\sigma>r>0, \tag{15}$$
$S_b^a\subset R^n$ — кільце з центром в нулі, зовнішнім радіусом a і внутрішнім радіусом b.

Переслідування вважатимемо завершеним, якщо $\|x-y\|\le\varepsilon$.

Вихідна задача (15) зводиться до конфліктно-керованого процесу в такий спосіб. Уведемо нові змінні
$$(z_1,z_2)=z,$$
$$z_1=x-y,\ \dot{z}_2=\dot{x}. \tag{16}$$
Продиференціюємо за часом співвідношення (16). З урахуванням вихідних рівнянь (15) отримаємо
$$\dot{z}_1=z_2-\upsilon,$$
$$\dot{z}_2=u. \tag{17}$$
Термінальна множина $M^*=\{z\colon z_1\in S_0^{\varepsilon}\}$, $M_0=\{z\colon z_1=0\}$, $M=\{z\colon z_1\in S_0^{\varepsilon},$ $z_2=0\}$. Позначимо
$$M_1=\varepsilon_1S_0^1,\ M_2=\varepsilon_2S_0^1=M\,\underline{*}\,M_1=\varepsilon S_0^1\,\underline{*}\,\varepsilon_1S_0^1=(\varepsilon-\varepsilon_1)S_0^1,\ \varepsilon_2=\varepsilon-\varepsilon_1,\ \varepsilon>\varepsilon_1.$$

Тоді
$$L=\{z: z_2=0\},\ \pi=\begin{pmatrix} E\,0\\ 0\,0\end{pmatrix},\ \pi z=z_1\ ,\ A=\begin{pmatrix} 0 & E\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Області керувань мають вигляд
$$U=\left\{\begin{pmatrix}0\\ u\end{pmatrix}: u\in S_r^{\rho}\right\},\ V=\left\{\begin{pmatrix}v\\ 0\end{pmatrix}: v\in S_0^{\sigma}\right\},\ \overline{V}=\left\{\begin{pmatrix}\overline{v}\\ 0\end{pmatrix}: \overline{v}\in \overline{S}\right\},\ \overline{S}=S_{\sigma r/\rho}^{\sigma},\ \overline{V}\subset V.$$

Фундаментальна матриця однорідної системи (17) має вигляд $e^{At}=\begin{pmatrix} E & tE\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Тоді отримаємо
$$\pi e^{At}U=tS_r^{\rho}\ ,\ \pi e^{At}V=S_0^{\sigma}\ ,\ \pi e^{At}\overline{V}=\overline{S}\ ,\ M=S_0^{\varepsilon}\subset L\,.$$

Умову Понтрягіна не виконано на інтервалі $[0,\sigma/\rho)$:
$$\pi e^{At}U \overset{*}{-} \pi e^{At}V=tS_r^{\rho}\overset{*}{-} S_0^{\sigma}=\varnothing,\ t\in[0,\sigma/\rho)\,.$$

Визначимо функцію зсуву $\gamma(t)\equiv 0$ і покладемо
$$B(t)=\begin{cases}(\rho/\sigma)tE,\ 0\le t\le \sigma/\rho,\\ E,\ t>\sigma/\rho.\end{cases}\qquad \overline{V}(t)=\begin{cases}\overline{V},\ 0\le t\le \sigma/\rho,\\ V,\ t>\sigma/\rho.\end{cases}$$

Тоді маємо
$$W_B(t,\tau,\overline{v})=\pi e^{At}[U-B(t)\overline{v}],\ \overline{v}\in\overline{S},$$
$$0\in\bigcap_{\overline{v}\in\overline{S}}[W_B(t,\tau,\overline{v})-\gamma(t,\tau)]=\pi e^{At}U\overset{*}{-}\pi e^{At}B(t)\overline{V}(t)=\{0\},\ t\in[0,\sigma/\rho]\,. \tag{18}$$

У результаті простих обчислень маємо
$$\lambda(t,v,\overline{v})=\begin{cases}\dfrac{(\|v\|-(\rho/\sigma)t)\|\overline{v}\|}{\varepsilon_1},\ t\in[0,\sigma/\rho],\\ 0, \qquad\qquad t>\sigma/\rho,\end{cases}$$
$$\max_{v\in S_0^{\sigma},\,\overline{v}\in\overline{S}}\lambda(t,v,\overline{v})=\begin{cases}\dfrac{\sigma-\rho t}{\varepsilon_1},\ t\in[0,\sigma/\rho],\\ 0, \qquad t>\sigma/\rho.\end{cases}$$

Оскільки
$$\varphi_B(t,U,V,\overline{V}(t))=\pi e^{At}(V-B(t)\overline{V}(t))=\begin{cases}S_0^{\sigma}-\overline{S},\ t\in[0,\ \sigma/\rho],\\ \{0\},\qquad t>\sigma/\rho,\end{cases}$$
то
$$\varphi_B(t,U,V,\overline{V}(t))\subset \max_{v\in S_0^{\sigma},\,\overline{v}\in\overline{S}}\lambda(t,v,\overline{v})S_0^{\varepsilon_1}. \tag{19}$$

Якщо $\varepsilon_1\ge\sigma^2/2\rho$, то для всіх $t\ge 0$ справедлива нерівність
$$(\rho t^2/2)-\sigma t+\varepsilon_1\ge 0\,. \tag{20}$$

Тому для $\varepsilon_1\ge\sigma^2/2\rho$ для всіх $t\ge 0$ виконується нерівність
$$\int_0^t\max_{v\in S_0^{\sigma},\,\overline{v}\in\overline{S}}\lambda(\tau,v,\overline{v})d\tau\le\frac{\sigma t-(\rho t^2/2)}{\varepsilon_1}\le 1\,. \tag{21}$$

Отже, унаслідок співвідношень (18), (19), (21) виконано умову 1. Покладемо $\xi(t)=\pi e^{At}z=z_1+tz_2$. Оскільки виконано умову 1, то справедливі умови 2, 3 і для $t \in [0, \sigma / \rho]$, $\overline{v} \in \overline{S}$ маємо $\alpha_*(t, \tau, \overline{v}) = \sup_{\overline{v} \in \overline{S}} \alpha_*(t, \tau, \overline{v}) = 0$. Якщо $\xi(t) \in \varepsilon_2 S_0^1$, то унаслідок теореми 1 або теореми 2 гра може бути закінчена в момент t з використанням керування вигляду (4). До того ж з урахуванням нерівності (20) найменший момент часу задовольняє рівнянню

$$\| z_1 + t z_2 \| = (\rho t^2 / 2) - \sigma t + \varepsilon, \; t \le \sigma / \rho.$$

Нехай $\xi(t) \notin \varepsilon_2 S_0^1$. Тоді для $t - \tau \le \sigma / \rho$ верхня розв'язувальна функція $\alpha^*(t, \tau, \overline{v})$ визначається із співвідношення

$$\alpha^*(t, \tau, \overline{v}) = \sup \{\alpha \ge 0 \colon \alpha[\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(t)] \cap (t - \tau)[S_r^\rho - \overline{v}]\} =$$
$$= \sup \{\alpha \ge 0 \colon \| \rho(t - \tau)\overline{v} - \alpha \xi(t) \| = \alpha \varepsilon_2 + \rho(t - \tau)\}, \; \overline{v} \in \overline{S},$$

і функція $\alpha^*(t, \tau, \overline{v})$ є більшим позитивним коренем квадратного рівняння

$$(\| \xi(t) \|^2 - (\varepsilon_2)^2)\alpha^2 - 2[(\overline{v}, \xi(t)) + \rho(t - \tau)\varepsilon_2]\alpha - [\rho^2 (t - \tau)^2 (\sigma^2 - ||\overline{v}||^2)] = 0$$

стосовно α, коли $\xi(t) \notin \varepsilon_2 S$, $\overline{v} \in \overline{S}$.

У результаті обчислень отримаємо

$$\min_{\overline{v} \in S} \alpha^*(t, \tau, \overline{v}) = 0, \; t - \tau \le \sigma / \rho, \tag{22}$$

до того ж мінімум досягається на векторі $\overline{v} = -\sigma(\xi(t) / \| \xi(t) \|)$.

Нехай $\xi(t) \notin \varepsilon_2 S$ і $t - \tau > \sigma / \rho$. Тоді багатозначне відображення $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ має вигляд

$$\mathfrak{A}(t, \tau, v) = \{\alpha \ge 0 \colon \alpha[\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(t)] \cap [(t - \tau)S_r^\rho - v]\}, \; v \in S_0^\sigma.$$

Вочевидь, $\mathfrak{A}(t, \tau, v) \ne \varnothing$, тому справедливе включення

$$0 \in \bigcap_{v \in S_0^\sigma} \{[(t - \tau)S_r^\rho - v] - \mathfrak{A}(t, \tau, v)[\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(t)]\}. \tag{23}$$

Верхня розв'язувальна функція $\alpha^*(t, \tau, v)$ визначається із співвідношення

$$\alpha^*(t, \tau, v) = \sup \{\alpha \ge 0 \colon \alpha[\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(t)] \in (t - \tau)S_r^\rho - v\} =$$
$$= \sup \{\alpha \ge 0 \colon \| v - \alpha \xi(t) \| = \alpha \varepsilon_2 + \rho(t - \tau)\}, \; v \in S_0^\sigma,$$

і функція $\alpha^*(t, \tau, v)$ є більшим позитивним коренем квадратного рівняння

$$(\| \xi(t) \|^2 - (\varepsilon_2)^2)\alpha^2 - 2[(v, \xi(t)) + \rho(t - \tau)\varepsilon_2]\alpha - [\rho^2 (t - \tau)^2 - \| v \|^2] = 0$$

стосовно α для $\xi(t) \notin \varepsilon_2 S$, $v \in S_0^\sigma$.

У результаті обчислень для $t - \tau > \sigma / \rho$ отримаємо $\min_{v \in S_0^\sigma} \alpha^*(t, \tau, v) = \dfrac{\rho(t - \tau) - \sigma}{\| \xi(t) \| - \varepsilon_2}$ і мінімум досягається на векторі

$$v = -\sigma \frac{\xi(t)}{\| \xi(t) \|}. \tag{24}$$

Визначимо момент закінчення гри для $t > \sigma / \rho$. Покладемо

$$\pi e^{At} \overline{V}(t) = \begin{cases} \overline{S},\ 0 \le t \le \sigma / \rho, \\ S_0^{\sigma},\ t > \sigma / \rho. \end{cases}$$

З урахуванням рівностей (22), (24) запишемо

$$\int_0^t \min_{\overline{v} \in \pi e^{At} \overline{V}(t)} \alpha^*(t, \tau, \overline{v})\, d\tau =$$

$$= \int_0^{t-(\sigma/\rho)} \min_{\overline{v} \in \overline{S}} \alpha^*(t, \tau, \overline{v})\, d\tau + \int_{t-(\sigma/\rho)}^{t} \min_{v \in S_0^{\sigma}} \alpha^*(t, \tau, v)\, d\tau = \int_0^{t-(\sigma/\rho)} \frac{\rho(t-\tau) - \sigma}{\| \xi(t) \| - \varepsilon_2}\, d\tau = 1 .$$

З останньої рівності отримаємо рівняння

$$\| z_1 + t z_2 \| = (\rho t^2 / 2) - \sigma t + \varepsilon - \varepsilon_1 . \tag{25}$$

Найменший позитивний корінь рівняння (25) є моментом закінчення гри. Для $t = 0$ ліва частина рівняння (25) становить $\| z_1 \|$ і зі зростанням t зростає лінійно, а права частина дорівнює $\varepsilon - \varepsilon_1$ і росте квадратично. Оскільки $\| z_1 \| > \varepsilon - \varepsilon_1$, то для будь-яких z_1 і z_2 момент закінчення гри є кінцевим. Рівність $z_1 + t z_2 = 0$ може бути виконана лише пізніше за виконання рівності (25), тому цей випадок не розглядається.

Нехай $\xi(t) \notin \varepsilon_2 S$ і $\sigma / R < t - \tau \le \sigma / r$. Тоді для $v \in S_0^{\sigma}$ нижня розв'язувальна функція $\alpha_*(t, \tau, v)$ визначається зі співвідношення

$$\alpha_*(t, \tau, v) = \inf \{ \alpha \ge 0 \colon \alpha [\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(t)] \cap [(t - \tau) S_r^{\rho} - v] \} .$$

Однак для $v \in (t - \tau) S_0^r$ маємо

$$\alpha_*(t, \tau, v) = \alpha_*^r(t, \tau, v) = \sup \{ \alpha > 0 \colon [v - \alpha \xi(t)] \in (t - \tau) S_0^r + \alpha \varepsilon_2 S_0^1 \} =$$

$$= \sup \{ \alpha > 0 \colon \| v - \alpha \xi(t) \| = (t - \tau) r + \alpha \varepsilon_2 \}$$

і функція $\alpha_*^r(t, \tau, v)$ є більшим позитивним коренем квадратного рівняння

$$(\| \xi(t) \|^2 - (\varepsilon_2)^2) \alpha^2 - 2[(v, \xi(t)) + r(t - \tau) \varepsilon_2] \alpha - [r^2 (t - \tau)^2 - \| v \|^2] = 0$$

стосовно α, коли $\xi(t) \notin \varepsilon_2 S,\ \sigma / R < t - \tau \le \sigma / r,\ v \in (t - \tau) S_0^r$.

Оскільки справедливо співвідношення $(t - \tau) S_r^{\rho} \overset{*}{-} S_{(t-\tau)r}^{\sigma} = S_0^{(t-\tau)\rho - \sigma}$, то для $v \in S_{(t-\tau)r}^{\sigma}$ маємо

$$\alpha_*(t, \tau, v) = \max_{v \in S_{(t-\tau)r}^{\sigma}} \alpha_*(t, \tau, v) = 0 .$$

Отже, для $\sigma / R < t - \tau \le \sigma / r,\ v \in S_0^{\sigma}$ виконується рівність $\alpha_*(t, \tau, v) = \alpha_*^r(t, \tau, v)$ і водночас отримаємо

$$\max_{v \in S_0^{\sigma}} \alpha_*(t, \tau, v) = \max_{v \in (t-\tau) S_0^r} \alpha_*^r(t, \tau, v) = \frac{r(t - \tau) + r}{\| \xi(t) \| + \varepsilon_2}$$

і максимум досягається на векторі $v = r \dfrac{\xi(t)}{\| \xi(t) \|}$.

Нехай $\xi(t) \notin \varepsilon_2 S$, $t-\tau > \sigma / r$, $v \in S_0^\sigma$. Тоді матимемо $\max\limits_{v \in S_0^\sigma} \alpha_*(t,\tau,v) = \frac{r(t-\tau)+\sigma}{\|\xi(t)\|+\varepsilon_2}$ і максимум досягається на векторі $v = \sigma \frac{\xi(t)}{\|\xi(t)\|}$.

Якщо параметри гри для $t-\tau > \sigma / \rho$, $\rho > \sigma > r > 0$, задовольняють нерівність

$$\frac{r(t-\tau)+\sigma}{\|\xi(t)\|+\varepsilon_2} < \frac{\rho(t-\tau)-\sigma}{\|\xi(t)\|-\varepsilon_2}, \tag{26}$$

то отримаємо

$$\max_{v \in S_0^\sigma} \alpha_*(t,\tau,v) < \min_{v \in S_0^\sigma} \alpha^*(t,\tau,v)$$

і тому справедлива нерівність

$$\int_0^T \max_{v \in S_0^\sigma} \alpha_*(t,\tau,v)\, d\tau < \int_0^T \min_{v \in S_0^\sigma} \alpha^*(t,\tau,v)\, d\tau = 1. \tag{27}$$

Отже, з урахуванням співвідношень (19), (21), (23) і (27), якщо параметри гри для $t-\tau > \sigma / \rho$ задовольняють нерівність (26), виконано умову 2.

За побудовою для всіх $v \in S_0^\sigma$ справедливе включення

$$\alpha_*(t,\tau,v)[\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(t)] \in (t-\tau) S_r^\rho - v.$$

Тому з урахуванням нерівності (26) маємо

$$\max_{v \in S_0^\sigma} \alpha_*(t,\tau,v)[\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(t)] \in (t-\tau) S_r^\rho - v.$$

Таким чином, виконується включення

$$0 \in \bigcap_{v \in S_0^\sigma} [[(t-\tau) S_r^\rho - v] - \max_{v \in S_0^\sigma} \alpha_*(t,\tau,v)[\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(t)]]$$

і справедлива умова 3. Найменший позитивний корінь рівняння (25) є моментом закінчення гри за теоремою 3 з використанням керування вигляду (3).

Перевіримо справедливість умови 4. За побудовою для всіх $v \in S_0^\sigma$ справедливе включення

$$\alpha^*(t,\tau,v)[\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(t)] \in (t-\tau) S_r^\rho - v.$$

Тому з урахуванням нерівності (26) маємо

$$\inf_{v \in S_0^\sigma} \{\alpha^*(t,\tau,v)[\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(t)]\} \in (t-\tau) S_r^\rho - v.$$

Отже, виконується включення

$$0 \in \bigcap_{v \in S_0^\sigma} [[(t-\tau) S_r^\rho - v] - \inf_{v \in S_0^\sigma} \alpha_*(t,\tau,v)[\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(t)]]$$

і справедлива умова 4. Найменший позитивний корінь рівняння (25) є моментом закінчення гри за теоремою 4 з використанням керування вигляду (4).

ВИСНОВКИ

Розглянуто проблему зближення керованих об'єктів із різною інерційністю в ігрових залачах динаміки. Сформульовано достатні умови закінчення гри за кінцевий гарантований час у разі, коли умова Понтрягіна не виконується. Уведено верхні та нижні розв'язувальні функції спеціального типу та на їхній основі запропоновано модифіковані схеми методу Понтрягіна та методу розв'язувальних функцій, що забезпечує завершення конфліктно-керованого процесу для об'єктів із різною інерційністю у класі квазістратегій та контркерувань. Наведено модельний приклад.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Т. 2. Москва: Наука, 1988. 576 с.
2. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Springer Science and Business Media, 2013. 424 p.
3. Chikrii A.A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proc. Steklov Institute of Mathematics*. 2010. Vol. 271. P. 69–85.
4. Chikrii A.A., Chikrii V.K. Image structure of multivalued mappings in game problems of motion control. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48, N 3. P. 20–35.
5. Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций для игровых задач сближения управляемых объектов с различной инерционностью. *Кибернетика и системный анализ*. 2021. Т. 57, № 2. С. 147–166.
6. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. Москва: Наука, 1974. 455 с.
7. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. Москва: Наука, 1981. 288 с.
8. Hajek O. Pursuit Games. New York: Acad. Press, 1975. Vol. 12. 266 p.
9. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.
10. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. Москва: Мир, 1973. 470 с.
11. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. Москва: Наука, 1974. 480 с.
12. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. Т. 48, № 4. С. 40–64.

A.A. Chikrii, I.S. Rappoport

RESOLVING FUNCTIONS MODIFIED METHOD FOR GAME PROBLEMS OF APPROACH OF CONTROLLED OBJECTS WITH DIFFERENT INERTIA

Abstract. The problem of approach of controlled objects with different inertia in dynamic game problems is considered. Modified sufficient conditions for ending the game in the finite guaranteed time in the case where the Pontryagin condition is not satisfied are formulated. Some shift functions are considered instead of the Pontryagin selector, and special multivalued mappings are introduced with their help. They generate the upper and lower resolving functions of a special type and, based on them, two types of modified schemes of the first Pontryagin method and the method of resolving functions are proposed, which ensure the completion of the conflict-controlled process for objects with different inertia in the class of quasi-strategies and counter-controls. New theoretical results are illustrated by a model example.

Keywords: controlled objects with different inertia, quasilinear differential game, multi-valued mapping, measurable selector, stroboscopic strategy, resolving function.

Надійшла до редакції 05.09.2022