УДК 519.83:517.7

Г.Ц. ЧИКРІЙ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *g.chikrii@gmail.com*.

В.М. КУЗЬМЕНКО
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *kvn_ukr@yahoo.com*.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ М'ЯКОГО ЗБЛИЖЕННЯ КЕРОВАНИХ КОЛИВНИХ СИСТЕМ З ВИКОРИСТАННЯМ ПРИНЦИПУ РОЗТЯГУВАННЯ ЧАСУ

Анотація. Розглянуто ігрову задачу про м'яку зустріч керованих коливних систем, тобто про їхнє одночасне зближення за геометричними координатами і швидкостями. Зазначено, що безпосереднє застосування першого прямого методу Л.С. Понтрягіна до розв'язання цієї задачі є неможливим, оскільки для неї не виконується умова, на якій базується цей метод. Вона полягає у миттєвій перевазі в ресурсах керування переслідувача (того, хто бажає такої зустрічі) над втікачем (тим, хто її уникає). У запропонованому методі застосовано принцип розтягування часу, який дає можливість послабити згадану умову та завершити гру за подовжений час. Описано метод розв'язання задачі, що використовує певну функцію розтягування часу, а також алгоритм, варіанти побудови керування переслідувача та приклад комп'ютерної реалізації процесу зближення на площині.

Ключові слова: диференціальна гра, м'яке зближення, функція розтягування часу, модифікована умова Понтрягіна, селектор багатозначного відображення.

ВСТУП

Задачі керування рухомими об'єктами в умовах конфлікту та невизначеності [1–6] залишаються актуальними, особливо в теперішній час.

У цій роботі розглядається ігрова задача м'якої зустрічі керованих коливних систем, тобто їхнього одночасного зближення за геометричними координатами та швидкостями. Коливні системи застосовують для опису вібрацій у механічних та електричних системах, у задачах перехоплення рухомих цілей у випадку орбітальної динаміки об'єктів.

Безпосереднє застосування основних схем прямих методів (першого прямого методу [5] та методу розв'язувальних функцій [6]) до розв'язання згаданої задачі є неможливим, оскільки для неї не виконується умова Л.С. Понтрягіна, на якій вони базуються. Ця умова полягає у миттєвій перевазі переслідувача над втікачем у ресурсах керування.

Проте до такої задачі може бути застосовано підхід, за яким виконується модифікована умова Понтрягіна. Цей підхід полягає у застосуванні функції розтягування часу, що послаблює умову Понтрягіна та дає змогу переслідувачу побудувати потрібне керування. Підхід був запропонований у [7] на основі аналізу згаданої умови в [8]. Пізніше він був розвинутий в [9–14].

Опишемо цей підхід для задачі зближення для лінійної диференціальної гри, окремим випадком якої є задача м'якого зближення керованих коливних систем.

ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЇ РОЗТЯГУВАННЯ ЧАСУ

Нехай динаміка конфліктно-керованого процесу описується системою лінійних диференціальних рівнянь

$$\dot{z} = Az - u + v, \tag{1}$$

де z — вектор n-вимірного Евклідового простору R^n, A — квадратна матриця порядку n; u та v — керування, що вибираються в кожний момент часу з компактів U та V відповідно, $U, V \subset R^n$. Задано початковий стан системи $z(0) = z_0$.

Гра розглядається з точки зору переслідувача, метою якого є приведення траєкторії системи (1) на термінальну множину M_0, $M_0 \subset R^n$, яка є лінійним підпростором у R^n. Позначимо π оператор ортогонального проєктування з R^n на L, де L є ортогональним доповненням до M_0 у R^n. Тоді вихід траєкторії гри на множину M_0 у деякий момент T еквівалентний виконанню рівності $\pi z(T)=0$.

Для досягнення цілі переслідувач у кожний момент часу будує своє керування на основі знання миттєвого керування супротивника. За першим прямим методом Л.С. Понтрягіна передбачається, що в процесі гри переслідувач вибирає своє керування з огляду на повну інформацію про поточне керування втікача. Водночас гравці вибирають свої керування так, щоб їхні реалізації у часі були вимірними за Лебегом функціями. Такі керування називають допустимими.

Наведемо умову Л.С. Понтрягіна, на якій базується цей вибір і яка відображає миттєву перевагу переслідувача над втікачем у ресурсах керування. Для її формулювання використовується операція геометричної різниці Мінковського

$$X \overset{*}{-} Y = \{z : z + Y \subset X\} = \bigcap_{y \in Y} (X - y), \;\; X \in R^n, \;\; Y \in R^n.$$

Умова 1 (Л.С. Понтрягіна [5]): $\pi e^{tA} U \overset{*}{-} \pi e^{tA} V \neq \varnothing \;\; \forall t \geq 0$.

На випадок, коли ця умова не виконується впродовж певного проміжку часу, пропонується її модифікація, яка полягає у тому, що переслідувач у процесі гри будує своє керування з огляду не на поточне керування втікача, а на його керування у минулому, так ніби інформація про керування втікача надходить до нього зі змінним запізненням у часі. Цей момент у минулому, а також час завершення гри визначаються за допомогою так званої функції розтягування часу.

Означення 1. Функцією розтягування часу будемо називати невід'ємну монотонно зростаючу неперервну функцію $I(t)$, $t \in [0, +\infty)$, $I(0)=0$, $I(t) > t$, $t > 0$, майже всюди диференційовану та таку, що $\sup\limits_{t \in [0, +\infty) \setminus \Delta} \dot{I}(t) < +\infty$, де Δ — множина точок розриву похідної функції $\dot{I}(t)$.

Модифікованою умовою, яка дає змогу переслідувачу досягти цілі, є така.

Умова 2. Існує функція розтягування часу $I(t)$ така, що багатозначне відображення $W(t) = \pi e^{tA} U \overset{*}{-} \dot{I}(t) \pi e^{I(t)A} V$ має непорожні образи для $t \in [0, +\infty)$.

Теорема 1. Якщо для диференціальної гри (1) виконана умова 2 та для заданого початкового стану z_0 існує скінченний момент часу

$$t_1 = \min \left\{ t \geq 0 : \pi \left(e^{I(t)A} z_0 - \int\limits_0^{I(t)-t} e^{(I(t)-\theta)A} U d\theta \right) \cap \int\limits_0^t W(\theta) d\theta \neq \varnothing \right\}, \qquad (2)$$

то перелідувач може завершити гру в момент часу $I(t_1)$ за будь-яких допустимих керувань втікача.

Доведення. Внаслідок непорожності перетину в визначенні часу t_1 (2) та непорожності образів багатозначного відображення $W_1(\theta)$ (умова 2) існують допустиме керування $u^{\tau_0}(\theta)$, $\theta \in [0, \tau_0)$, $\tau_0 = I(t_1) - t_1$, та вимірний селектор $w(\theta)$, $w(\theta) \in W_1(\theta)$, $0 \leq \theta \leq t_1$, багатозначного відображення $W_1(\theta)$ такі, що виконується рівність

$$\pi \left(e^{I(t_1)A} z_0 - \int\limits_0^{I(t_1)-t_1} e^{(I(t_1)-\theta)A} u^{\tau_0}(\theta) d\theta \right) = \int\limits_0^{t_1} w(\theta) d\theta. \qquad (3)$$

Поділимо інтервал часу $[0, I(t_1)]$ на дві частини: півінтервал $[0, \tau_0)$, де $\tau_0 = I(t_1) - t_1$, та відрізок часу $[\tau_0, I(t_1)]$. Представимо проєкцію траєкторії системи (1) у момент $I(t_1)$, використавши формулу Коші

$$\pi z(I(t_1)) = \pi e^{I(t_1)A} z_0 - \int_0^{I(t_1)-t_1} \pi e^{(I(t_1)-\theta)A} u^{\tau_0}(\theta) d\theta -$$

$$- \int_{I(t_1)-t_1}^{I(t_1)} \pi e^{(I(t_1)-\theta)A} u(\theta) d\theta + \int_0^{I(t_1)} \pi e^{(I(t_1)-\theta)A} \upsilon(\theta) d\theta.$$

Зробивши заміну змінних $\theta = (I(t_1) - t_1) + \theta_1$ у другому інтегралі та заміну $\theta = I(t_1) - I(t_1 - \theta_1)$ — у третьому, а потім, замінивши θ_1 на θ, матимемо

$$\pi z(I(t_1)) = \pi e^{I(t_1)A} z_0 - \int_0^{\tau_0} \pi e^{(I(t_1)-\theta)A} u^{\tau_0}(\theta) d\theta - \int_0^{t_1} \pi e^{(t_1-\theta)A} u(\tau_0 + \theta) d\theta +$$

$$+ \int_0^{t_1} \dot{I}(t_1 - \theta) \pi e^{I(t_1-\theta)A} \upsilon(\tau_0 + \theta - (I(t_1 - \theta) - (t_1 - \theta))) d\theta. \quad (4)$$

Розглянемо побудову керування переслідувача, яке дає йому змогу завершити гру у момент $I(t_1)$. Нехай на півінтервалі часу $[0, \tau_0)$ керування переслідувача становить $u^{\tau_0}(\theta)$, $\theta \in [0, \tau_0)$, а на відрізку часу $[\tau_0, \tau_0 + t_1]$ керування переслідувача визначається як вимірний розв'язок рівняння

$$\pi e^{(t_1-\theta)A} u(\tau_0 + \theta) = \dot{I}(t_1 - \theta) \pi e^{I(t_1-\theta)A} \upsilon(I(t_1) - I(t_1 - \theta)) + w(t_1 - \theta), \ \theta \in [0, t_1],$$

існування якого забезпечує теорема Філіпова–Кастена про вимірний вибір [15]. Отже, у кожний момент часу $\tau_0 + \theta$, $0 \le \theta \le t_1$, переслідувач вибирає своє керування з огляду на керування втікача в момент часу $I(t_1) - I(t_1 - \theta)$, який може бути представлений у вигляді $I(t_1) - I(t_1 - \theta) = \tau_0 + t_1 - I(t_1 - \theta) = \tau_0 + \theta - (I(t_1 - \theta) - (t_1 - \theta))$. Оскільки $I(t_1 - \theta) - (t_1 - \theta) \ge 0$, то можна сказати, що переслідувач вибирає своє керування так, ніби інформація про поточне керування втікача надходить до нього з запізненням у часі $\tau(\tau_0 + \theta) = I(t_1 - \theta) - (t_1 - \theta)$.

З урахуванням способу керування переслідувача (4) формула для траєкторії системи (1) набуває вигляду

$$\pi z(I(t_1)) = \pi e^{I(t_1)A} z_0 - \int_0^{\tau_0} \pi e^{(I(t_1)-\theta)A} u^{\tau_0}(\theta) d\theta -$$

$$- \int_0^{t_1} \dot{I}(t_1 - \theta) \pi e^{I(t_1-\theta)A} \upsilon(\tau_0 + \theta - (I(t_1 - \theta) - (t_1 - \theta))) d\theta +$$

$$+ \int_0^{t_1} \dot{I}(t_1 - \theta) \pi e^{I(t_1-\theta)A} \upsilon(\tau_0 + \theta - (I(t_1 - \theta) - (t_1 - \theta))) d\theta - \int_0^{t_1} w(\theta) d\theta,$$

звідси маємо

$$\pi z(I(t_1)) = \pi e^{I(t_1)A} z_0 - \int_0^{I(t_1)-t_1} \pi e^{(I(t_1)-\theta)A} u^{\tau_0}(\theta) d\theta - \int_0^{t_1} w(\theta) d\theta.$$

Із (3) випливає, що $\pi z(I(t_1)) = \{0\}$, де $\{0\}$ — нульовий вектор з R^n, тобто в момент часу $I(t_1)$ гра завершена.

Описану методику використано під час дослідження задачі про м'яку зустріч двох керованих коливних систем:

$$\ddot{x}+\omega_1^2 x=\rho u,\ x\in R^n,\ \|u\|\le 1,\ x(0)=x_0,\ \dot{x}(0)=\dot{x}_0, \tag{5}$$

$$\ddot{y}+\omega_2^2 y=\sigma v,\ y\in R^n,\ \|v\|\le 1,\ y(0)=y_0,\ \dot{y}(0)=\dot{y}_0, \tag{6}$$

де x та y — геометричні координати гравців, u та v — їхні керування, параметри ω_1 та ω_2 — частоти коливань, ρ та σ — силові коефіцієнти, $\omega_1, \omega_2, \rho, \sigma>0,\ \omega_1>\omega_2$.

За допомогою стандартної заміни змінних $z_1=x$, $z_2=\dot{x}$, $z_3=y$, $z_4=\dot{y}$ системи другого порядку (5), (6) зводяться до системи першого порядку вигляду (1) з вектором змінних $z=(z_1,z_2,z_3,z_4)$, $z\in R^{4n}$, початковою умовою $z(0)=$ $=(x_0,\dot{x}_0,y_0,\dot{y}_0)$, матрицею $A=\begin{pmatrix} O & E & O & O \\ -\omega_1^2 E & O & O & O \\ O & O & O & E \\ O & O & -\omega_2^2 E & O \end{pmatrix}$, множинами $U=\begin{pmatrix} O \\ \rho S \\ O \\ O \end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix} O \\ O \\ O \\ \sigma S \end{pmatrix}$,

де E та O — одинична та нульова квадратні матриці порядку n, а S, $S\subset R^n$, — куля одиничного радіуса з центром у нулі.

Термінальною множиною стає лінійний підпростір у R^{4n}:

$$M_0=\{z=(z_1,z_2,z_3,z_4),\, z_1,z_2,z_3,z_4\in R^n : z_1=z_3,\, z_2=z_4\},$$

а оператор ортогонального проєктування з R^{4n} на L визначається матрицею

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} E & O & -E & O \\ O & E & O & -E \\ -E & O & E & O \\ O & -E & O & E \end{pmatrix}.$$

Для подальших викладень будемо використовувати такий оператор (що є еквівалентним під час побудови керування переслідувача для розглядуваної задачі):

$$\pi=\begin{pmatrix} E & O & -E & O \\ O & E & O & -E \end{pmatrix}.$$

Збіг геометричнх координат та швидкостей у момент часу $t, t>0$, еквівалентний виконанню рівності $\pi z(t)=0$. Фундаментальна матриця об'єднаної системи є такою:

$$e^{At}=\begin{pmatrix} \cos\omega_1 t\cdot E & \frac{1}{\omega_1}\sin\omega_1 t\cdot E & O & O \\ -\omega_1\sin\omega_1 t\cdot E & \cos\omega_1 t\cdot E & O & O \\ O & O & \cos\omega_2 t\cdot E & \frac{1}{\omega_2}\sin\omega_2 t\cdot E \\ O & O & -\omega_2\sin\omega_2 t\cdot E & \cos\omega_2 t\cdot E \end{pmatrix}.$$

Умова 2 для цієї гри полягає у непорожності множини $W(t)$ для всіх $t\ge 0$, де

$$W(t)=\bigcap_{\|v\|\le 1}\bigcup_{\|u\|\le 1}\begin{pmatrix} \frac{\rho}{\omega_1}|\sin\omega_1 t|\,u-\frac{\sigma}{\omega_2}\dot{I}(t)|\sin\omega_2 I(t)|\,v \\ \rho|\cos\omega_1 t|\,u-\sigma\dot{I}(t)|\cos\omega_2 I(t)|\,v \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Звідси виводимо рівність, яку має задовольняти функція розтягування часу $I(t)$:

$$\frac{1}{\omega_1}|\sin \omega_1 t||\cos \omega_2 I(t)| = \frac{1}{\omega_2}|\cos \omega_1 t||\sin \omega_2 I(t)|. \tag{8}$$

З урахуванням аналізу цієї рівності поетапно, починаючи з півінтервалу часу $\left[0, \dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)$, будується функція розтягування часу

$$I(t) = \frac{1}{\omega_2}\left[(k-1)\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\operatorname{tg}\omega_1 t\right)\right],$$
$$t \in [(k-1)\pi / \omega_1,\ k\pi / \omega_1),\ k = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Тут під символом arctg розуміється головне значення арктангенса. До того ж, використовується багатозначніть цієї функції.

Функція $I(t)$ (9) має похідну

$$\dot{I}(t) = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 \cos^2 \omega_1 t + \omega_2^2 \sin^2 \omega_1 t},\ t \geq 0. \tag{10}$$

Множина $W(t)$ (7) може бути представлена у вигляді

$$W(t) = \rho \bigcup_{s \in R^n,\ \|s\| \leq 1} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\omega_1}|\sin \omega_1 t|s \\ |\cos \omega_1\ )t|s \end{pmatrix} \overset{*}{-} \sigma \dot{I}(t) \bigcup_{s \in R^n,\ \|s\| \leq 1} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\omega_2}|\sin \omega_2 I(t)|s \\ |\cos \omega_2 I(t)|s \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Використавши (8), можна показати, що

$$|\cos \omega_2 I(t)| = \sqrt{\dot{I}(t)}\,|\cos \omega_1 t|,$$
$$\frac{1}{\omega_2}|\sin \omega_2 I(t)| = \frac{1}{a}\sqrt{\dot{I}(t)}\,|\sin \omega_1 t|.$$

З урахуванням цих рівностей формула (11) набуває вигляду

$$W(t) = (\rho - \sigma \dot{I}^{\,3/2}(t))S(t), \tag{12}$$

де

$$S(t) = \bigcup_{s \in R^n,\ \|s\| \leq 1} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\omega_1}|\sin \omega_1 t|s \\ |\cos \omega_1 t|s \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Згідно з (10) $\sup\limits_{t \in [0, +\infty)} \dot{I}(t) = \omega_1^2 / \omega_2^2$. Тому множина $W(t)$ містить у собі множину $\left(\rho - \sigma \dfrac{\omega_1^3}{\omega_2^3}\right) S(t)$. Бачимо, що обмеження на параметри гри

$$\omega_1 > \omega_2,\ \frac{\rho}{\omega_1^3} \geq \frac{\sigma}{\omega_2^3} \tag{14}$$

гарантують виконання умови 2 про непорожність множини $W(t)$ (7).

Опишемо спосіб керування переслідувача, що забезпечує існування моменту часу t_1, визначеного формулою (2).

На першому півінтервалі $\theta \in [0, \tau_0)$ переслідувач вибирає керування для найшвидшої м'якої зустрічі без урахування поточного керування втікача. Починаючи з моменту τ_0, переслідувач будує керування, враховуючи керування втікача з моменту 0.

Позначимо координати та швидкості гравців у момент τ_0 як x_{τ_0}, y_{τ_0}, $\dot{x}_{\tau_0}, \dot{y}_{\tau_0}$. Тоді згідно з (2) шуканий момент часу t_1 є тим моментом, коли вперше здійсниться включення

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega_2 I(t))E & \dfrac{\sin(\omega_2 I(t))}{\omega_2}E \\ -\omega_2 \sin(\omega_2 I(t))E & \cos(\omega_2 I(t))E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{\tau_0} \\ \dot{y}_{\tau_0} \end{pmatrix} -$$

$$-\begin{pmatrix} \cos(\omega_1 I(t))E & \dfrac{\sin(\omega_1 I(t))}{\omega_1}E \\ -\omega_1 \sin(\omega_1 I(t))E & \cos(\omega_1 I(t))E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{\tau_0} \\ \dot{x}_{\tau_0} \end{pmatrix} \in \int_0^t W(\theta)\, d\theta. \qquad (15)$$

Знаходження мінімального часу t_1 та побудова керування переслідувача до моменту τ_0 і після нього здійснюється як розв'язання задачі оптимального керування за швидкодією. Ця задача та її розв'язання описані далі.

Вектор, що фігурує у лівій частині включення (15), з ростом t не буде полишати певної кулі $r\widetilde{S}$, $\widetilde{S} \subset R^{2n}$, радіуса r з центром у початку координат. Унаслідок умов (14) множина з правої частини включення (15), містить кулю в просторі R^{2n}, яка для $t \to +\infty$ прямує до кулі нескінченного радіуса з центром у нулі. Тому в деякий скінченний момент часу t_1 вона поглине кулю $r\widetilde{S}$ і здійсниться включення (15).

Отже, якщо виконані умови (14) для параметрів гри, то за теоремою 1 переслідувач, вибираючи певним чином своє керування, може досягти м'якої зустрічі з втікачем у скінченний момент часу $I(t_1)$ у випадку довільного допустимого керування втікача та для довільних початкових положень та швидкостей супротивників.

ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСУ $I(t_1)$ ЗАВЕРШЕННЯ ГРИ

Оскільки в розглядуваній задачі множини керувань належать R^n, а фундаментальна матриця має порядок $4n$, то знадобляться допоміжні матриці B_u, B_v для переходу з R^n у R^{4n}, а саме $B_u = (O\,E\,O\,O)^{\mathrm{T}}$, $B_v = (O\,O\,O\,E)^{\mathrm{T}}$. Тоді компакти в умові 2 є такими: $U = \rho B_u S$, $V = \sigma B_v S$, $S \subset R^n$.

Гарантований час досягнення переслідувачем цілі $I(t_1)$ визначається часом t_1, що знаходиться в результаті розв'язання загальної задачі (2).

Для коливних систем (5), (6) задачу (2) запишемо у такому вигляді:

$$t_1 = \min\left\{ t \ge 0 : -\pi\left(e^{I(t)A} z_0 + \int_0^{I(t)-t} e^{(I(t)-\theta)A} \rho B_u S d\theta \right) \cap \int_0^t W(\theta) d\theta \ne \varnothing \right\}. \quad (16)$$

Тут враховано, що керування u входить у (5) зі знаком плюс, а не мінус, та обидва керування належать кулі з центром у нулі, з чого витікає, що $W(\theta) = -W(\theta)$. Знак перед проєкцією π змінено для більш зручного подальшого викладення.

Оскільки проекція π є адитивною, вираз (16) еквівалентний

$$t_1 = \min\left\{ t \ge 0 : -\pi(e^{I(t)A} z_0) \in \left(\int_0^{I(t)-t} \pi e^{(I(t)-\theta)A} \rho B_u S\, d\theta \oplus \int_0^t W(\theta) d\theta \right) \right\}, \quad (17)$$

де $\oplus$ — знак суми Мінковського (або алгебраїчної суми) множин.

Підінтегральний вираз $\pi e^{(I(t)-\theta)A}\rho B_u S$ можна розглядати як множину $W(\cdot)$ умови 2 за нульової можливості керування втікача, тобто коли $V=\{0\}$. Позначимо її W_0. Тоді (17) можна записати так:

$$t_1 = \min\left\{ t \ge 0 : -\pi e^{tA} z_0 \in \left(\int\limits_0^{I(t)-t} W_0(I(t)-\theta)d\theta \oplus \int\limits_{I(t)-t}^{I(t)} W(I(t)-\theta)d\theta \right) \right\}.$$

Використовуючи вирази для фундаментальної матриці та функції розтягування часу, конкретизуємо вигляд підінтегральних множин (друга визначена в (12), (13))

$$W_0(\theta) = \bigcup_{s\in R^n,\ \|s\|\le 1} \rho \begin{pmatrix} \dfrac{\sin\omega_1\theta}{\omega_1} E \\ \cos\omega_1\theta E \end{pmatrix} s, \ \ t<\theta\le I(t),$$

$$W(\theta) = \bigcup_{s\in R^n,\ \|s\|\le 1} \rho \left(1-\frac{\sigma}{\rho}(\dot I(\theta))^{3/2}\right) \begin{pmatrix} \dfrac{\sin\omega_1\theta}{\omega_1} E \\ \cos\omega_1\theta E \end{pmatrix} s, \ \ 0\le\theta\le t.$$

Багатозначне відображення $W_0(\theta)$ можна розглядати як продовження багатозначного відображення $W(\theta)$ на часовий інтервал $t<\theta\le I(t)$.

Задача (17) знаходження t_1 еквівалентна задачі оптимального керування за швидкодією: знайти мінімальний час t, використовуючи змінну вимірну функцію $s(\theta)$, $\|s(\theta)\|\le 1$, для якого наведена далі система має розв'язок

$$\begin{cases} y_0\cos\omega_2 I(t) + \dot y_0 \dfrac{\sin\omega_2 I(t)}{\omega_2} - x_0\cos\omega_1 I(t) - \dot x_0 \dfrac{\sin\omega_1 I(t)}{\omega_1} \\ -y_0\omega_2\sin\omega_2 I(t) + \dot y_0\cos\omega_2 I(t) + x_0\omega_1\sin\omega_1 I(t) - \dot x_0\cos\omega_1 I(t) \end{cases} =$$

$$= \rho \begin{cases} \int\limits_0^{I(t)-t} \dfrac{\sin\omega_1(I(t)-\theta)}{\omega_1} s(\theta)d\theta + \int\limits_{I(t)-t}^{I(t)} \left(1-\dfrac{\sigma}{\rho}(\dot I(I(t)-\theta))^{3/2}\right) \dfrac{\sin\omega_1(I(t)-\theta)}{\omega_1} s(\theta)d\theta, \\ \int\limits_0^{I(t)-t} \cos\omega_1(I(t)-\theta)s(\theta)d\theta + \int\limits_{I(t)-t}^{I(t)} \left(1-\dfrac{\sigma}{\rho}(\dot I(I(t)-\theta))^{3/2}\right) \cos\omega_1(I(t)-\theta)s(\theta)d\theta. \end{cases} \quad (18)$$

Розв'язок визначає часові параметри t_1, τ_0 керування переслідувача та селектор $w(\cdot)\in W(\cdot)$, що використовується в рівнянні (3) для відрізку часу $[\tau_0, I(t_1)]$, а саме

$$w(I(t_1)-\theta) = \rho \begin{cases} \left(1-\dfrac{\sigma}{\rho}(\dot I(I(t_1)-\theta))^{3/2}\right) \dfrac{\sin\omega_1(I(t_1)-\theta)}{\omega_1} s(\theta), \\ \left(1-\dfrac{\sigma}{\rho}(\dot I(I(t_1)-\theta))^{3/2}\right) \cos\omega_1(I(t_1)-\theta)s(\theta), \end{cases} \quad \theta\in[\tau_0, I(t_1)].$$

На часовому інтервалі $\theta\in[0,\tau_0)$ селектор $w_0(\cdot)\in W_0(\cdot)$ має вигляд

$$w_0(I(t_1)-\theta) = \rho \begin{cases} \dfrac{\sin\omega_1(I(t_1)-\theta)}{\omega_1} s(\theta), \\ \cos\omega_1(I(t_1)-\theta)s(\theta), \end{cases} \quad \theta\in[0,\tau_0].$$

Далі, розглядаючи рівняння (3) на об'єднаному часовому інтервалі $[0, I(t_1)]$, знаходимо складову керування переслідувача $u_s(\theta)$, яка не залежить від миттєвого переслідування втікача. Маємо

$$\pi e^{(I(t_1)-\theta)A} \rho B_u u_s(\theta) = w(I(t_1)-\theta),\ \theta \in [0, I(t_1)].$$

Звідси

$$u_s(\theta) = \begin{cases} s(\theta), & \theta \in [0, \tau_0), \\ \left(1 - \dfrac{\sigma}{\rho} (\dot{I}(I(t_1)-\theta))^{3/2}\right) s(\theta), & \theta \in [\tau_0, I(t_1)]. \end{cases}$$

Коефіцієнт $K(\theta) = \dfrac{\sigma}{\rho} (\dot{I}(I(t_1)-\theta))^{3/2}$ $(0 < K(\theta) \le 1)$ визначає частину ресурсу керування переслідувача, яку він резервує, починаючи з моменту $\tau_0 = I(t_1) - t_1$, для «нейтралізації» невідомого в момент часу 0 керування втікача у майбутньому.

ПОШУК РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ (18)

Задача (18) не включає невідомого керування втікача і є задачею оптимального керування. Для спрощення позначень уведемо час $T = I(t)$ і будемо його розглядати як незалежну змінну. Момент τ_0 також є змінним і залежним від T. Уведемо коефіцієнт $Q(\theta) = 1 - K(\theta)$ такий, що дорівнює 1 на інтервалі $[0, \tau_0)$. Позначимо $b_1(T),\ b_2(T) \in R^n$ складові вектора лівої частини системи (18), які відповідають координатам і швидкостям.

Для кожного заданого часу T ліва частина системи (18) — фіксований вектор $b(T) = (b_1(T), b_2(T)) \in R^{2n}$. Вектор-функція $s(\theta)$ стає керуванням. Потрібно знайти таку функцію $s(\theta)$, $\|s(\theta)\| \le 1$, $\theta \in [0, T]$, аби рівність (18) була виконана в момент T.

Якщо за якогось T це вдається, то, зменшуючи T, можна знайти мінімальний час $I(t_1)$ досягнення цілі. Раніше було доведено, що такий мінімальний час існує для розглядуваної коливної системи.

Опишемо пошук розв'язку задачі (18) серед кусково-сталих функцій зі скінченною кількістю інтервалів сталості.

Нехай за фіксованого T задана множина інтервалів $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, m$, така, що $t_i - t_{i-1} > 0$, $t_0 = 0$, $t_m = T$. Тоді система (18) набуває такого вигляду:

$$b_1(T) = \frac{\rho}{\omega_1} \sum_{i=1}^{m} s_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} Q(\theta) \sin \omega_1 (T-\theta) d\theta,$$

$$b_2(T) = \rho \sum_{i=1}^{m} s_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} Q(\theta) \cos \omega_1 (T-\theta) d\theta,$$

де s_i — невідомі вектори, постійні на інтервалах $[t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, \dots, m-1$, $[t_{m-1}, t_m]$.

На запитання про існування розв'язку задачі (18) для моменту T з обраним виглядом функції керування можна відповісти, розв'язавши задачу квадратичного програмування

$$\min_{s_i} \left\| b(T) - \sum_{i=1}^{m} A_i(T, m) s_i \right\|,\ \|s_i\| \le 1,\ i = 1, \dots, m, \tag{19}$$

де матриці $A_i(T, m)$ формуються так: $A_i(T, m) = \begin{pmatrix} a_{i1}(T, m) E \\ a_{i2}(T, m) E \end{pmatrix}$, $a_{i1}(T, m) = \dfrac{\rho}{\omega_1} \times$

$\times \displaystyle\int_{t_{i-1}}^{t_i} Q(\theta) \sin \omega_1 (T-\theta) d\theta$, $a_{i2}(T, m) = \rho \displaystyle\int_{t_{i-1}}^{t_i} Q(\theta) \cos \omega_1 (T-\theta) d\theta$.

Розв’язок задачі (18) існує, якщо оптимальне значення (19) дорівнює 0.

Можливі різні способи розбиття часового проміжку $[0, T]$ на інтервали, наприклад, розбиття на інтервали різної довжини. Можливий пошуку розв’язку задачі (18) серед інших типів керувань. Один з таких варіантів наведено далі у прикладі.

СКЛАДОВА КЕРУВАННЯ, ЩО НІВЕЛЮЄ КЕРУВАННЯ ВТІКАЧА

Для знаходження складової керування переслідувача $u_p \in S$, яка застосовується ним на інтервалі $[\tau_0, I(t_1)]$ та дає змогу нівелювати керування втікача і успішно завершити гру в визначений момент часу $I(t_1)$, використовуємо таку рівність:

$$\pi\left(\int_0^{I(t_1)} e^{(I(t_1)-\theta)A}\sigma B_v v\, d\theta + \int_{\tau_0}^{I(t_1)} e^{(I(t_1)-t)A}\rho B_u u_p\, d\theta\right) = 0,\ v \in S,\ u_p \in S.$$

Заміною змінних та приведенням інтегралів до однакових границь інтегрування від 0 до t_1 встановлюємо миттєвий зв’язок між складовою $u_p(\tau_0 + \theta)$ та керуванням втікача у минулому $v(I(t_1) - I(t_1 - \theta))$, що відповідає рівнянню (3),

$$\pi e^{(t_1-\theta)A}\rho B_u u_p(\tau_0 + \theta) = -\dot{I}(t_1 - \theta)\pi e^{I(t_1-\theta)A}\sigma B_v v(I(t_1) - I(t_1 - \theta)),\ \theta \in [0, t_1].$$

Знайдемо вираз для u_p, конкретизувавши цю рівність та виконавши проєкцію,

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\sin\omega_1(t_1-\theta)}{\omega_1} u_p(\tau_0+\theta) = \dot{I}(t_1-\theta)\sigma \dfrac{\sin\omega_2 I(t_1-\theta)}{\omega_2} v(I(t_1) - I(t_1-\theta)), \\ \rho\cos\omega_1(t_1-\theta) u_p(\tau_0+\theta) = \dot{I}(t_1-\theta)\sigma\cos\omega_2 I(t_1-\theta) v(I(t_1)-I(t_1-\theta)), \end{cases} \theta \in [0, t_1]. \tag{19}$$

Оскільки функція розтягування часу забезпечує виконання пропорції $\dfrac{\sin\omega_1(t_1-\theta)}{\omega_1\cos\omega_1(t_1-\theta)} = \dfrac{\sin\omega_2 I(t_1-\theta)}{\omega_2\cos\omega_2 I(t_1-\theta)}$, друга половина системи лінійно залежна від першої.

Отже, u_p знаходимо, розв’язуючи першу половину системи (19) з n рівняннями та n невідомими, і з урахуванням властивостей функції розтягування часу (9) та її похідної (10) отримуємо

$$u_p(\tau_0 + \theta) = \frac{\sigma}{\rho}(\dot{I}(t_1 - \theta))^{3/2} v(I(t_1) - I(t_1 - \theta)),\ \theta \in [0, t_1].$$

Для θ у часовому інтервалі $[\tau_0, I(t_1)]$ ця рівність має вигляд

$$u_p(\theta) = \frac{\sigma}{\rho}(\dot{I}(I(t_1) - \theta))^{3/2} v(I(t_1) - I(I(t_1) - \theta)),\ \theta \in [\tau_0, I(t_1)].$$

У цілому керування переслідувача на інтервалі часу $[0, I(t_1)]$ складається з суми знайдених складових, а саме:

— на першому півінтервалі $\theta \in [0, \tau_0)$ керування переслідувача дорівнює складовій його керування $u_s(\theta)$, яка знаходиться внаслідок розв’язання задачі (18), $u(\theta) = u_s(\theta) = s(\theta)$;

— на другому півінтервалі $\theta \in [\tau_0, I(t_1)]$ керування переслідувача є сумою складових u_s та u_p, де u_p побудована за керуванням втікача,

$$u(\theta) = u_p(\theta) + u_s(\theta) = \frac{\sigma}{\rho}(\dot{I}(I(t_1) - \theta))^{3/2} v(I(t_1) - I(I(t_1) - \theta)) +$$

$$+\left(1-\frac{\sigma}{\rho}(\dot{I}(t_e-\theta))^{3/2}\right)s(\theta)=K(\theta)\cdot v(I(t_1)-I(I(t_1)-\theta))+(1-K(\theta))\cdot s(\theta)=$$

$$=K(\theta)\cdot v(\theta-\tau(\theta))+(1-K(\theta))\cdot s(\theta)\,.$$

Тут $\tau(\theta)$ — функція запізнення часу, що введена у доведенні теореми 1.

Модуль вектора $u(\theta)$ не перевищує 1, оскільки $\|v\|\le 1$, $\|s\|\le 1$ та $0< K\le 1$. Отже, вимірна вектор-функція $u(\theta)$ є допустимим керуванням і розв'язком рівняння (3) для коливної системи (5), (6).

Приклад 1. На рис. 1 *а*, *б* наведено фазові траєкторії переслідувача та втікача на площині, а на рис. 1, *в* — знайдене керування, в якому використані

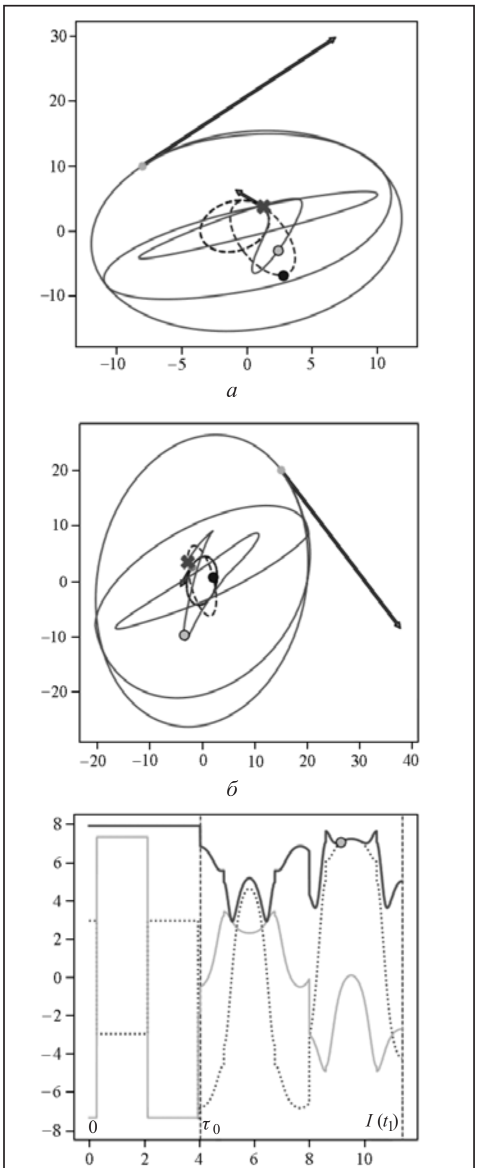

Рис. 1. Втікач у середині еліпса переслідувача. Переслідувач «стискає» свою траєкторію як за координатами (*а*), так і за швидкістю (*б*), та м'яко «перехоплює» втікача, використовуючи знайдене керування (*в*)

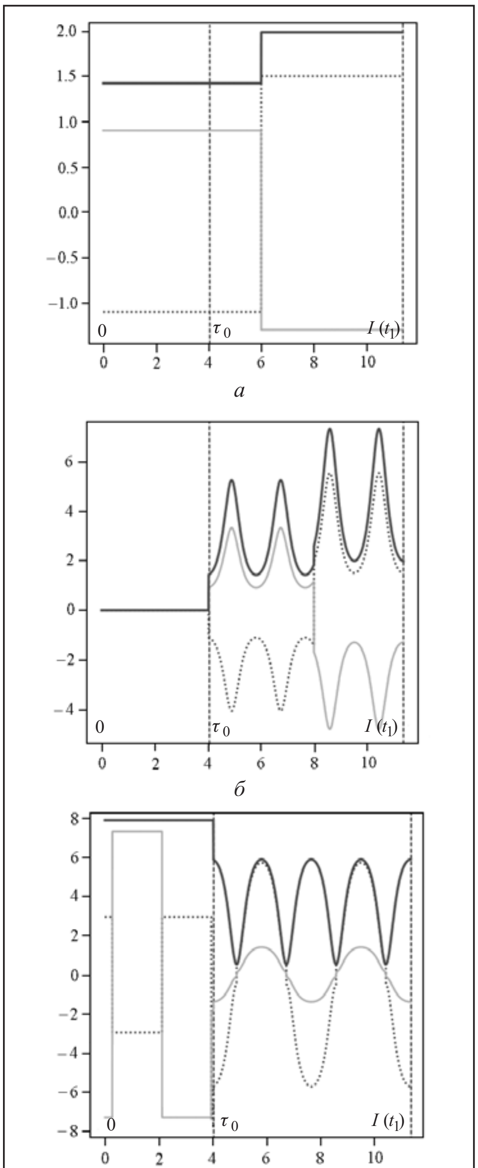

Рис. 2. Керування втікача (*а*) та складові u_p (*б*), u_s (*в*) керування переслідувача (модулі та компоненти)

тільки два базові вектори: спочатку s_1, а потім s_2. Вектори змінюють напрямок на протилежний згідно зі значенням функцій $\operatorname{sign}(\sin \omega_1 (T-\theta))$ для s_1 та $\operatorname{sign}(\cos \omega_1 (T-\theta))$ для s_2. Частоти коливань $\omega_1 = 1.7$, $\omega_2 = 1.1$. Заміна вектора s_1 на s_2 відбувається в деякий момент часу t_{sw} такий, що $|| s_1 || = || s_2 ||$. Керування вважається знайденим, коли $|| s_1 || = || s_2 || = 1$.

Компоненти вектора керування переслідувача та його модуль показані на рис. 1, *в*. Втікач має початкову траєкторію у формі малого еліпса (див. рис 1, *а*), який змінюється на більший. Траєкторія переслідувача — великий еліпс з центром (0, 0), якщо керування дорівнює 0. У процесі переслідування його траєкторія змінюється. Темний і світлий кружечки — положення втікача і переслідувача в $t = 9.1$ с. Аналогічно для швидкостей (див. рис 1, *б*). Стрілки показують швидкості та прискорення у початковий момент. Хрестик — точка м'якої зустрічі. Час досягнення цілі $I(t_1) = 11.37$ с, $\tau_0 = 4.03$ с, момент зміни s_1 на s_2 $t_{sw} = 3.96$ с (див. рис. 1, *в*).

На рис. 2 показано керування втікача та обидві складові керування переслідувача (компоненти векторів та модулі).

У час $t = 6$ с вектор керування втікача (–1.1, 0.9) змінюється на (1.5, –1.3) (див. рис. 2, *а*). У час $t = \tau_0$ переслідувач починає враховувати керування втікача, у час $t = 8$ с реагує на зміну його керування (див. рис. 2, *б*).

Силові коефіцієнти $\rho = 7.9$, $\sigma = 2$. Для $t < \tau_0$ модуль складової u_s дорівнює 7.9, що вказує на те, що переслідувач використовує увесь свій ресурс керування для зближення (див. рис. 2, *в*). Після цього моменту модулі складових u_p та u_s змінюються відповідно до значення $K(t)$ та $Q(t) = 1 - K(t)$ (див. рис. 2, *б*, *в*).

ВИСНОВКИ

Для розв'язання ігрової задачі про м'яку зустріч керованих коливних систем у роботі застосовано принцип розтягування часу. Одержано умови для параметрів систем, що забезпечують переслідувачу можливість такої зустрічі у скінченний момент часу. Вказано спосіб керування переслідувача з огляду на керування втікача у минулому, що знаходиться за допомогою відповідної функції розтягування часу. З використанням програмних засобів створено візуальну ілюстрацію процесу такого зближення на площині за умови одноразової зміни орбіти втікачем. Наведений алгоритм обчислення формули поточного керування переслідувача гарантує одночасний збіг геометричних координат та швидкостей протидійних сторін.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Isaacs R.F. Differential games. New York; London; Sydney: Wiley Interscience, 1965. 479 p.
2. Siouris G. Missile guidance and control systems. New York: Springer, 2004. 653 p. https://doi.org/10.1007/b97614.
3. Friedman A. Differential games. Courier Corporation, 2013. 368 p.
4. Yavin Y., Pachter M. Pursuit-evasion differential games. Elsevier, 2014, Mathematics. 351 p.
5. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды: в 3 т. Дифференциальные уравнения. Теория операторов. Оптимальное управление. Дифференциальные игры. Т. 2. Москва: Наука, 1988. 576 с.
6. Chikrii A.A. Conflict-controlled processes. Dordrecht; Boston; London: Springer Science and Busines Media, 2013. 424 p.

7. Зонневенд Д. Об одном типе превосходства игрока. *ДАН СССР*. 1973. Т. 208, № 3. С. 520–523.

8. Никольский М.С. О применении первого прямого метода в линейных дифференциальных играх. *Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетики*. 1972. № 10. С. 51–56.

9. Chikrii G.Ts. Using the effect of information delay in differential pursuit games. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2007. Vol. 43, N 2. P. 233–245. https://doi.org/10.1007/s10559-007-0042-x.

10. Chikrii G.Ts. Principle of time stretching in evolutionary games of approach. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2016. Vol. 48, Iss. 5. P. 12–26. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i5.20.

11. Chikrii G.Ts. Principle of time stretching for motion control in condition of conflict. In: Advanced Control Systems: Theory an Applications. Ch. 3. River Publishers, 2021. P. 52–82.

12. Chikrii G.Ts. Principle of time dilation in game problems of dynamics. In: Recent Developments in Automatic Control Systems. Ch. 5. River Publishers (Denmark), 2022. P. 113–129.

13. Chikrii G.Ts., Chikrii A.O. Time dilation principle in dynamic game problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2022. Vol. 58, N 1. P. 36–44. https://doi.org/10.1007/s10559-022-00433-6.

14. Чикрій Г.Ц., Кузьменко В.М. Реалізація зближення коливних систем на основі принципу розтягування часу. *Проблеми керування та інформатики.* 2022. № 1. С. 25–36. http://doi.org/10.34229/1028-0979-2022-1-3.

15. Filippov A.F. Differential equations with discontinuous righthand sides. Dordrecht; Boston: Kluwer Publishers, 1988. 258 p. https://doi.org/10.1007/978-94-015-7793-9.

G.Ts. Chikrii, V.M. Kuzmenko

SOLVING THE PROBLEM OF SOFT MEETING FOR CONTROLLED OSCILLATORY SYSTEMS BASED ON THE PRINCIPLE OF TIME STRETCHING

Abstract. The game problem of a soft meeting of controlled oscillating systems, i.e., their simultaneous coincidence of geometric coordinates and velocities, is considered. Applying Pontryagin's first direct method [1] to solve this problem is impossible since the condition underlying this method is not satisfied. This condition is an instantaneous advantage of the pursuer (the one who strives to achieve this meeting) over the evader (the one who tries to avoid it). In the method, we apply the principle of time stretching, which weakens this condition and makes it possible to terminate the game in a finite time. The paper outlines the problem solution method that employs a certain time-stretching function. Also, an algorithm, variants of constructing the pursuer control, and an example of computer implementation of the convergence process on the plane are provided.

Keywords: differential game, soft meeting, time stretching function, modified Pontryagin's condition, selection of set-valued mapping.

Надійшла до редакції 03.01.2023