УДК 519.8

Т.В. ЖИГАЛЛО
Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна,
e-mail: *tetvas@ukr.net*.

Ю.І. ХАРКЕВИЧ
Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна,
e-mail: *kharkevich.juriy@gmail.com.*

ДЕЯКІ АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ ЛАПЛАСА В ОДИНИЧНОМУ КРУЗІ

Анотація. Розглянуто оптимізаційну задачу, у якій досліджується інтегральне представлення відхилення лінійних додатних операторів на класах (ψ,β)-диференційовних функцій в інтегральній метриці. Як додатний лінійний оператор взято інтеграл Пуассона, який є розв'язком рівняння Лапласа в полярних координатах з відповідними початковими умовами, заданими на межі одиничного круга. Інтеграл Пуассона відносять до операторів з дельта подібним ядром, а отже, він є найкращим апаратом для розв'язування багатьох задач прикладної математики, а саме: методів оптимізації та варіаційного числення, математичної теорії керування, теорії динамічних систем та ігрових задач динаміки, прикладного нелінійного аналізу та пошуку рухомих об'єктів. Класи (ψ,β)-диференційовних функцій, на яких досліджено асимптотичні властивості розв'язків рівнянь Лапласа в одиничному крузі, є узагальненнями добре відомих в оптимізаційних задачах класів Соболєва, Вейля–Надя тощо. Розв'язана задача дасть змогу будувати якісні математичні моделі багатьох природничих та соціальних процесів.

Ключові слова: рівняння Лапласа, (ψ,β)-похідна, оптимізаційні задачі, задача Колмогорова–Нікольського.

ВСТУП

Сучасний розвиток світового народного господарства все більше стає залежним від найоптимальніших розв'язків та їхніх найефективніших впроваджень різноманітних задач прикладної математики. На особливу увагу серед них заслуговують задачі варіаційного числення та методів оптимізації, теорії динамічних систем та ігрових задач динаміки, прикладного нелінійного аналізу і методів пошуку рухомих об'єктів тощо [1–4]. Характерною особливістю всіх цих прикладних задач є залежність їхніх розв'язків від деякого класу функцій [5–7], наділених певними властивостями. До того ж, як було зазначено Соболєвим, для розв'язання нагальних прикладних проблем стало бракувати класів неперервних функцій. Тому очевидно, що для найефективнішого розв'язання поставлених перед суспільством задач доводиться використовувати все нові і нові класи функцій. До таких класів належать класи (ψ,β)-диференційовних функцій, введених О.І. Степанцем [8, с. 132].

Запропонована ним класифікація функцій базується на основі перетворень їхніх рядів Фур'є за допомогою мультиплікаторів і зсувів за аргументом. Тому за цією класифікацією, з одного боку, з'являється можливість для деякої заданої функції вказати більш вузьку множину, в якій вона міститься. А це, своєю чергою, дасть змогу повніше використовувати її індивідуальні особливості, наприклад у теорії оптимальних рішень (під час ефективного застосування до неї сучасних методів наближення функцій). З другого боку, розглядувана в роботі класифікація функцій охоплює широкий спектр функцій, зокрема функції з розбіжними рядами Фур'є, гладкі нескінченно-диференційовні, а також аналітичні функції.

Отримані О.І. Степанцем [8, с. 132] класи функцій для фіксованих значень параметрів, які їх визначають, переходять у раніше відомі класи [9, 10], що вводилися за допомогою операцій диференціювання, відповідних тригонометричних перетворень і згорток з сумовними або узагальненими функціями. Вивчення властивостей інтегральних представлень [11–13] відхилень (ψ, β)-диференційовних функцій від певних розв'язків диференціальних рівнянь у частинних похідних еліптичного типу [14–16] стали невід'ємною складовою сучасних досліджень з математичної теорії керування, теорії динамічних систем та ігрових задач динаміки [17–19], теорії оптимальних рішень тощо.

Як конкретний приклад розв'язку інтегро-диференціального рівняння (рівняння Лапласа в полярних координатах у середині одиничного круга [20, 21]) у цій роботі розглядається інтеграл Пуассона. Також досліджуються його асимптотичні властивості на класах (ψ, β)-диференційовних функцій в інтегральній метриці.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ДЕЯКІ ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ

Нехай L_1 — простір сумовних на $(0, 2\pi)$ 2π-періодичних неперервних функцій $\varphi(x)$ з нормою $||\varphi||_{L_1} = ||\varphi||_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x)|\, dx$; L_∞ — простір вимірних та істотно обмежених 2π-періодичних функцій $\varphi(x)$ з нормою $||\varphi||_\infty = \operatorname{ess\,sup} |\varphi(x)|$; C — простір неперервних 2π-періодичних функцій з нормою $||\varphi||_C = \max_x |\varphi(x)|$.

Якщо $\varphi \in L_1$, то згідно з [22] будемо позначати

$$P_r(\varphi; \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta + x) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta + x) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kx \right\} dx, \quad 0 \le r < 1, \tag{1}$$

інтеграл Пуассона, який є розв'язком рівняння Лапласа в полярних координатах

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = 0 \quad (0 \le r < 1, \ -\pi \le \theta \le \pi), \tag{2}$$

що здовольняє крайові умови

$$F(r, \theta)|_{r=1} = \varphi(\theta), \quad \left.\frac{\partial F(r, \theta)}{\partial r}\right|_{r=1} = 0, \tag{3}$$

де $\varphi(\theta)$ — сумовна 2π-періодична функція.

Поклавши в правій частині рівності (1) $r = e^{-1/\delta}$, $\delta > 0$ (див., наприклад, [23]), розв'язок крайової задачі (2), (3) запишемо у вигляді

$$P_r(\varphi; \theta) := P_\delta(\varphi; \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta + x) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k/\delta} \cos kx \right\} dx. \tag{4}$$

Якісно новий підхід до означення класів періодичних функцій був запропонований О.І. Степанцем у [8, с. 132]. Він започаткував розбиття функцій на класи в залежності від швидкості спадання до нуля їхніх коефіцієнтів Фур'є.

Нехай $\psi(k)$ — довільна фіксована функція натурального аргумента і β — фіксоване дійсне число. Припустимо, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k(\varphi) \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k(\varphi) \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right)$$

є рядом Фур'є деякої функції з $L_{(0,2\pi)}$. Цю функцію згідно з О.І. Степанцем [8, с. 132] позначимо $\varphi_{\beta}^{\psi}(\cdot)$ і назвемо (ψ,β)-похідною функції $\varphi(\cdot)$. Відповідно множину функцій, які задовольняють такі умови позначають L_{β}^{ψ}. Підмножину неперервних функцій із L_{β}^{ψ} позначають C_{β}^{ψ}.

Нехай далі $\mathfrak{M}$ — деяка підмножина функцій із $L_{(0,2\pi)}$. Тоді якщо $\varphi \in L_{\beta}^{\psi}$ і крім того $\varphi_{\beta}^{\psi} \in \mathfrak{M}$, то кажуть, що $\varphi(x)$ належить класу $L_{\beta}^{\psi}\mathfrak{M}$. Підмножину неперервних функцій із $L_{\beta}^{\psi}\mathfrak{M}$ позначають $C_{\beta}^{\psi}\mathfrak{M}$. Якщо $\mathfrak{M}$ збігається з множиною M 2π-періодичних істотно обмежених функцій $\varphi(x)$, які задовольняють умову

$$\operatorname{ess\,sup} |\varphi(x)| \le 1, \tag{5}$$

то в цьому випадку клас $C_{\beta}^{\psi}\mathfrak{M}$ позначають $C_{\beta,\infty}^{\psi}$. У випадку, коли $\mathfrak{M}$ збігається з класом L_1 2π-періодичних сумовних функцій $\varphi(x)$, для яких

$$||\varphi(x)||_{L_1} \le 1, \tag{6}$$

клас $L_{\beta}^{\psi}\mathfrak{M}$ позначають $L_{\beta,1}^{\psi}$.

Наслідуючи О.І. Степанця [8, с. 198], задачу про відшукання асимптотичних рівностей для величин

$$\mathcal{E}(L_{\beta,1}^{\psi}; P(\delta))_1 = \sup_{f \in L_{\beta,1}^{\psi}} ||\varphi(\cdot) - P_{\delta}(\varphi;\cdot)||_1 \tag{7}$$

для $\delta \to \infty$ називатимемо задачею Колмогорова–Нікольського для інтеграла Пуассона та класу $L_{\beta,1}^{\psi}$ в інтегральній метриці.

Отже, основною метою роботи є дослідження асимптотичної поведінки величини (7), тобто знаходження верхньої межі відхилення функцій класу $L_{\beta,1}^{\psi}$ від їхніх інтегралів Пуассона в середньому.

ОСНОВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ РОБОТИ

Множина $\mathfrak{M}$ всіх опуклих вниз для $v \ge 1$ функцій $\psi(v)$, які задовольняють умову $\lim_{v\to\infty} \psi(v) = 0$, не є однорідною за швидкістю їхнього спадання до нуля. В зв'язку з цим у процесі вивчення апроксимативних властивостей класів (ψ,β)-диференційовних функцій О.І. Степанець запропонував [8, с. 159] виокремлювати із $\mathfrak{M}$ підмножину $\mathfrak{M}_0$ згідно з такою характеристикою:

$$\mathfrak{M}_0 = \left\{ \varphi \in \mathfrak{M} :\ 0 < \frac{x}{\eta(x) - x} \le K \quad \forall x \ge 1 \right\},$$

де $\eta(x) = \eta(\psi, x) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(x)\right)$, ψ^{-1} — функція, обернена до функції ψ, а K — стала, яка може залежати від ψ.

У прийнятих позначеннях має місце теорема, наведена далі.

Теорема 1. Нехай ψ з множини $\mathfrak{M}_0$ така, що функція $u\psi(u)$ опукла вниз для всіх $v \in [1, \infty)$ і

$$\lim_{v\to\infty} v\psi(v) = K < \infty, \tag{8}$$

$$\lim_{\delta\to\infty} \int_1^{\delta} \psi(v)\,dv = \infty. \tag{9}$$

Тоді для $\sin\dfrac{\beta\pi}{2}\neq 0$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1};P(\delta))_1=\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{1}{\delta}\int\limits_1^{\pi}\psi(v)dv+O\left(\frac{1}{\delta}\right). \tag{10}$$

Доведення. Для інтеграла Пуассона $P_\delta(\varphi;\theta)$, заданого за допомогою співвідношення (4), аналогічно до [24] (див. формулу (4)), уведемо підсумовувальну функцію

$$\mu_\delta(v)=\mu_\delta(v;\psi)=\begin{cases}(1-e^{-v})\dfrac{\psi(1)}{\psi(\delta)},\ 0\le v\le\dfrac{1}{\delta},\\[2ex] (1-e^{-v})\dfrac{\psi(\delta v)}{\psi(\delta)},\ v\ge\dfrac{1}{\delta},\end{cases} \tag{11}$$

перетворення Фур'є якої згідно з лемою 1 [25]

$$\hat{\mu}_\delta(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\mu_\delta(v)\cos\left(vx+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv \tag{12}$$

є сумовним на всій числовій осі, тобто є збіжним інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\mu_\delta(v)\cos\left(vx+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dx. \tag{13}$$

Врахувавши позначення (12), розглянемо для всіх $\varphi(\theta)\in L^{\psi}_{\beta,1}$ функцію

$$I^{\psi}_{\beta,1}(\delta,\theta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi^{\psi}_{\beta}\left(\theta+\frac{x}{\delta}\right)\hat{\mu}_\delta(x)dx,\ \delta>0,\theta\in R. \tag{14}$$

Причому невласний інтеграл у правій частині (14) слід розуміти, як границю інтегралів по симетричних проміжках, що мають здатність розширятися.

Оскільки періодичність функції (14) є очевидною, аналогічно до [26], скориставшись узагальненою нерівністю Міньковського, отримаємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|I^{\psi}_{\beta,1}(\delta,\theta)\right|d\theta\le\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\hat{\mu}_\delta(x)|\left|\varphi^{\psi}_{\beta}\left(\theta+\frac{x}{\delta}\right)\right|d\theta dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\hat{\mu}_\delta(x)|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\varphi^{\psi}_{\beta}\left(\theta+\frac{x}{\delta}\right)\right|d\theta dx<\infty.$$

Тим самим показана сумовність функції $I^{\psi}_{\beta,1}(\delta,\theta)$. Слідуючи методам [8], знаходимо коефіцієнти Фур'є цієї функції $I^{\psi}_{\beta,1}(\delta,\theta)$. Маємо

$$a_k(I^{\psi}_{\beta,1}(\delta,\theta))=\frac{1}{\psi(k)}\mu\left(\frac{k}{\delta}\right)a_k(f),$$

$$b_k(I^{\psi}_{\beta,1}(\delta,\theta))=\frac{1}{\psi(k)}\mu\left(\frac{k}{\delta}\right)b_k(f),$$

де функція $\mu\left(\dfrac{k}{\delta}\right)$ задана за допомогою співвідношення (11), і відповідно

$a_k(f)$ і $b_k(f)$ — коефіцієнти Фур'є функції $f \in L^{\psi}_{\beta,1}$. Таким чином, згідно з позначеннями в [27] ряд Фур'є функції $I^{\psi}_{\beta,1}(\delta,\theta)$ матиме вигляд

$$S[I^{\psi}_{\beta,1}(\delta,\theta)] = S\left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{\psi}_{\beta}\left(\theta + \frac{x}{\delta}\right)\hat{\mu}_{\delta}(x)dx\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mu\left(\frac{k}{\delta}\right)(a_k(\varphi)\cos k\theta + b_k(\varphi)\sin k\theta). \qquad (15)$$

Якщо, як і раніше, функція $\psi(v)$ визначена і неперервна для всіх $v \ge 1$ у точках $v = k$ набуває значення $\psi(v) = \psi(k)$, то для функції $\mu_{\delta}(v)$, заданої за допомогою співвідношення (11), згідно з рівністю (15) для всіх $\varphi(\theta) \in L^{\psi}_{\beta,1}$ отримуємо

$$S\left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{\psi}_{\beta}\left(\theta + \frac{x}{\delta}\right)\hat{\mu}_{\delta}(x)dx\right] = \frac{1}{\psi(\delta)} S[\varphi(x) - P_{\delta}(\varphi;\theta)].$$

Звідки випливає, якщо функція $\mu_{\delta}(v)$, задана за допомогою співвідношення (11), перетворення Фур'є якої є сумовним на всій числовій осі (див. лему 1 із [25]), то $\forall \varphi(\theta) \in L^{\psi}_{\beta,1}$ майже для всіх θ буде виконуватися рівність

$$||\varphi(x) - P_{\delta}(\varphi;\theta)||_1 = \left\|\psi(\delta)\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{\psi}_{\beta}\left(\theta + \frac{x}{\delta}\right)\hat{\mu}_{\delta}(x)dx\right\|_1. \qquad (16)$$

Тому з урахуванням рівностей (7), (16) та (13), аналогічно до міркувань із [26], можна показати, що

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1}; P(\delta))_1 = \mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; P(\delta))_C +$$

$$+O\left(\psi(\delta)\int_{|x|\ge\delta\pi/2}\left|\int_0^{\infty}\mu_{\delta}(v)\cos\left(vx + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dx\right), \qquad (17)$$

де $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; P(\delta))_C = \sup\limits_{\varphi\in C^{\psi}_{\beta,\infty}} ||\varphi(\theta) - P_{\delta}(\varphi;\theta)||_C$.

Згідно з формулою (59) із [25] маємо

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; P(\delta))_C = \frac{\psi(\delta)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^{\infty}\mu_{\delta}(v)\cos\left(vx + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dx + O\left(\frac{1}{\delta}\right). \qquad (18)$$

Для оцінки інтеграла в правій частині (18) скористаємося формулою (60) із [25]. У результаті чого матимемо

$$\frac{\psi(\delta)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^{\infty}\mu_{\delta}(v)\cos\left(vx + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\int_1^{\delta}\psi(v)dv + \frac{1}{\psi(v)}\int_{\delta}^{\infty}\frac{\psi(v)}{v}dv\right) + O\left(1 + \frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right). \qquad (19)$$

Тому, об'єднавши співвідношення (18) та (19), можемо записати

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; P(\delta))_C = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\int_1^{\delta}\psi(v)dv + \frac{1}{\psi(v)}\int_{\delta}^{\infty}\frac{\psi(v)}{v}dv\right) + O\left(\frac{1}{\delta}\right). \qquad (20)$$

Із (11) випливає, що $\mu_\delta(0)=0$ і $\lim\limits_{v\to\infty}\mu_\delta(v)=\lim\limits_{v\to\infty}\mu'_\delta(v)=0$. Тож, двічі використавши метод інтегрування частинами, отримаємо

$$\int_0^\infty \mu_\delta(v)\cos\left(vx+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv=\int_0^{1/\delta}\mu_\delta(v)\cos\left(vx+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv+$$

$$+\int_{1/\delta}^\infty \mu_\delta(v)\cos\left(vx+\frac{\beta\pi}{2}\right)dx=-\int_0^{1/\delta}\frac{\mu''_\delta(\delta)}{x^2}\cos\left(vx+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv-$$

$$-\int_{1/\delta}^\infty \frac{\mu''_\delta(v)}{x^2}\cos\left(vx+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv-\frac{1}{x^2}\mu'_\delta(0)\cos\frac{\beta\pi}{2}.$$

А отже, згідно з формулою (82) із [25] матимемо

$$\int\limits_{|x|\geq\delta\pi/2}\left|\int_0^\infty \mu_\delta(v)\cos\left(vx+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dx=O\left(\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right),\ \delta\to\infty. \tag{21}$$

Якщо підставити (20) та (21) у праву частину (17), то очевидно

$$\mathcal{E}(L^\psi_{\beta,1};P(\delta))_1=\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\int_1^\delta\frac{\psi(v)dv}{\delta\psi(\delta)}+\int_\delta^\infty\frac{\psi(v)}{\psi(\delta)}\frac{dv}{v}\right)+O\left(\frac{1}{\delta}\right). \tag{22}$$

Згідно з умовою теореми функція $v\psi(v)$ для всіх $v\geq 1$ є опуклою вниз. Тому за достатньо великих значень δ отримуємо

$$\int_\delta^\infty\frac{\psi(v)}{\psi(\delta)}\frac{dv}{v}=\int_\delta^\infty\frac{v\psi(v)}{\psi(\delta)}\frac{dv}{v^2}=O(1). \tag{23}$$

Підставивши (23) замість відповідного доданку правої частини (22) та врахувавши при цьому співвідношення (8) та (9) із умови теореми, легко показати, що для всіх $\psi\in\mathfrak{M}_0$ виконується оцінка (10). Тим самим теорему доведено.

Зауваження 1. Зазначимо, що функції $\psi(v)=\dfrac{e^{-v}+K}{v}$ та $\psi(v)=\dfrac{(\ln(v+K))^\alpha}{v}$ (де сталі $K>0$ і $\alpha\in[-1;0]$ підібрані так, що функція $v\psi(v)$ є опуклою вниз для всіх $v\geq 1$) задовольняють умову теореми.

Зауваження 2. Повертаючись до означення класів функцій $L^\psi_{\beta,1}$ та $C^\psi_{\beta,\infty}$, наведених раніше, згідно з [8, с. 132] матимемо, що для $\psi(k)=k^{-r}$, $r>0$, класи $C^\psi_{\beta,\infty}$ збігаються з добре відомими класами $W^r_\beta C$, які для $\beta=r$ перетворюються в класи W^r функцій $\varphi(\theta)$, r-ті похідні яких у розумінні Вейля задовольняють умову (5). Водночас класи $L^\psi_{\beta,1}$ для $\psi(k)=k^{-r}$, $r>0$, перетворюються в добре відомі класи $W^r_\beta L$, які для $\beta=r$ стають класами W^rL функцій $\varphi(\theta)$, r-ті похідні яких у розумінні Вейля задовольняють умову (6). Тому з урахуванням викладеного маємо такий наслідок.

Наслідок 1. Якщо в рівності (10) покласти $\psi(v)=\dfrac{1}{v^r}$ для всіх $v>1$, то для $\beta=r=1$ отримаємо асимптотичну рівність

$$\mathcal{E}(W^1_1L;P(\delta))_C=\frac{2}{\pi}\frac{\ln\delta}{\delta}+O\left(\frac{1}{\delta}\right),\ \delta\to\infty.$$

ВИСНОВКИ

У процесі проведених у роботі досліджень було розв'язано оптимізаційну задачу Колмогорова–Нікольського для розв'язку рівняння Лапласа (у полярних координатах за певних крайових умов) на класах (ψ, β)-диференційовних функцій в інтегральній метриці. Тобто були отримані асимптотичні характеристики для верхніх меж відхилень функцій класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ від їхнього інтеграла Пуассона в середньому.

Водночас інтеграл Пуассона можна розглядати як розв'язок інтегро-диференціального рівняння еліптичного типу. І відповідно він є лінійним додатним операторам з так званим дельта подібним ядром [28–31]. А отже, за допомогою отриманих у цій роботі оцінок відхилення (ψ, β)-диференційовних функцій від інтеграла Пуассона в метриці простору L можна буде розв'язувати деякі оптимізаційні задачі.

Мало того, з доведеної теореми за конкретного значення параметра $\psi(k) = \dfrac{1}{k}$ було як наслідок отримано раніше відомий результат, за допомогою якого свого часу були розв'язані прикладні задачі [32–37].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Chikrii A.A., Chikrii G.Ts. Matrix resolving functions in game problems of dynamics. *Proc. of the Steklov Institute of Mathematics.* 2015. Vol. 291. P. 56–65. https://doi.org/10.1134/S0081543815090047.
2. Chikrii A.A., Matichin I.I. Game problems for fractional-order linear systems. *Proc. of the Steklov Institute of Mathematics.* 2010. Vol. 268. P. 54–70. https://doi.org/10.1134/S0081543810050056.
3. Kharkevych Yu.I. On some asymptotic properties of solutions to biharmonic equations. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2022. Vol. 58, N 2. P. 251–258. https://doi.org/10.1007/s10559-022-00457-y.
4. Chikrii A.A., Prokopovich P.V. Simple pursuit of one evader by a group. *Cybernetics and Systems Analysis.* 1992. Vol. 28, N 3. P. 438–444. https://doi.org/10.1007/ BF01125424.
5. Kharkevych Yu.I. Approximative properties of the generalized Poisson integrals on the classes of functions determined by a modulus of continuity. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2019. Vol. 51, N 4. P. 43–54. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i4.40.
6. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson operators in the classes $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$. *Ukr. Math. J.* 2017. Vol. 69, N 5. P. 757–765. https://doi.org/10.1007/s11253-017-1393-8.
7. Kal'chuk I.V. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions defined on the real axis by Weierstrass operators. *Ukr. Math. J.* 2007. Vol. 59, N 9. P. 1342–1363. https://doi.org/10.1007/s11253-007-0091-3.
8. Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций. Київ: Наук. думка, 1987. 268 с.
9. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel-Poisson integrals. *Ukr. Math. J.* 2009. Vol. 61, N 1. P. 86–98. https://doi.org/10.1007/s11253-009-0196-y.
10. Kal'chuk I., Kharkevych Yu. Approximation properties of the generalized Abel–Poisson integrals on the weyl-nagy classes. *Axioms*. 2022. Vol. 11, N 4. P. 161. https://doi.org/10.3390/axioms11040161.

11. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions by Weierstrass integrals. *Ukr. Math. J.* 2007. Vol. 59, N 7. P. 1059–1087. https://doi.org/10.1007/s11253-007-0069-1.

12. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the classes $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. J.* 2011. Vol. 63, N 7. P. 1083–1107. https://doi.org/10.1007/s11253-011-0565-1.

13. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. J.* 2012. Vol. 63, N 12. P. 1820–1844. https://doi.org/10.1007/s11253-012-0616-2.

14. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. 4-е изд. Москва: Наука, 1981. 512 с.

15. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. J.* 2009. Vol. 61, N 3. P. 399–413. https://doi.org/10.1007/s11253-009-0217-x.

16. Zhigallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by biharmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. J.* 2000. Vol. 52, N 7. P. 1113–1117. https://doi.org/10.1023/A:1005285818550.

17. Chikrii A., Matichin I. Riemann-Liouville, Caputo, and sequential fractional derivatives in differential games. In: Breton M., Szajowski K. (Eds.). *Advances in Dynamic Games. Annals of the International Society of Dynamic Games.* Birkhäuser Boston. 2011. Vol. 11. P. 61–81. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8089-3_4.

18. Zajac J., Korenkov M.E., Kharkevych Yu.I. On the asymptotics of some Weierstrass functions. *Ukr. Math. J.* 2015. Vol. 67, N 1. 154–158. https://doi.org/10.1007/s11253-015-1070-8.

19. Albus J., Meystel A., Chikrii A.A., Belousov A.A., Kozlov A.I. Analytical method for solution of the game problem of soft landing for moving objects. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2001. Vol. 37, N 1. P. 75–91. https://doi.org/10.1023/A:1016620201241.

20. Bushev D.N., Kharkevich Yu.I. Finding solution subspaces of the Laplace and heat equations isometric to spaces of real functions, and some of their applications. *Math. Notes.* 2018. Vol. 103, N 6. P. 869–880. https://doi.org/ 10.1134/S0001434618050231.

21. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. J.* 2002. Vol. 54, N 1. P. 51–63. https://doi.org/10.1023/A:1019789402502.

22. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Fourier transform of the summatory Abel–Poisson function. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2022. Vol. 58, N 6. P. 957–965. https://doi.org/10.1007/s10559-023-00530-0.

23. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of the classes $W^{r}_{\beta,\infty}$ by generalized Abel–Poisson integrals. *Ukr. Math. J.* 2022. Vol. 74, N 9. P. 575–585. https://doi.org/10.1007/s11253-022-02084-4.

24. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the class $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukr. Math. J.* 2009. Vol. 61, N 12. P. 1893–1914. https://doi.org/10.1007/s11253-010-0321-y.

25. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukr. Math. J.* 2009. Vol. 61, N 11. P. 1757–1779. https://doi.org/10.1007/s11253-010-0311-0.

26. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. On approximation of functions from the class $L^{\psi}_{\beta,1}$ by the Abel–Poisson integrals in the integral metric. *Carpathian Math. Publ.* 2022. Vol. 14, N 1. P. 223–229. https://doi.org/10.15330/cmp.14.1.223-229.

27. Abdullayev F.G., Kharkevych Yu.I. Approximation of the classes $C_{\beta}^{\psi}H^{\alpha}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. J.* 2020. Vol. 72, N 1. P. 21–38. https://doi.org/10.1007/s11253-020-01761-6.

28. Bushev D.M., Kharkevych Yu.I. Conditions of convergence almost everywhere for the convolution of a function with delta-shaped kernel to this function. *Ukr. Math. J.* 2016. Vol. 67, N 11. P. 1643–1661. https://doi.org/10.1007/s11253-016-1180-y.

29. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V., Filozof L.I. Approximative properties of the three-harmonic Poisson integrals on the classes $W_{\beta}^{r}H^{\alpha}$. *J. Math. Sci. (N.Y.)*. 2021. Vol. 254, N 3. P. 397–405. https://doi.org/10.1007/s10958-021-05311-8.

30. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. J.* 2002. Vol. 54, N 9. P. 1462–1470. https://doi.org/10.1023/A:1023463801914.

31. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson integrals in the classe $W_{\beta}^{r}H^{\alpha}$. *Ukr. Math. J.* 2017. Vol. 68, N 11. P. 1727–1740. https://doi.org/0.1007/s11253-017-1323-9.

32. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. J.* 2007. Vol. 59, N 8. P. 1224–1237. https://doi.org/10.1007/s11253-007-0082-4.

33. Kharkevych Yu. Approximation theory and related applications. *Axioms.* 2022. Vol. 11, N 12. P. 736. https://doi.org/10.3390/axioms11120736.

34. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepanyuk T.A. Approximation of functions from the classes $W_{\beta}^{r}H^{\alpha}$ by Weierstrass integrals. *Ukr. Math. J.* 2017. Vol. 69, N 4. P. 598–608. https://doi.org/10.1007/s11253-017-1383-x.

35. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in an abstract parabolic system. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2016. Vol. 293 (Suppl 1). P. 254–269. https://doi.org/10.1134/S0081543816050229.

36. Pilipenko Yu.V., Chikrij A.A. The oscillation processes of conflict control. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika.* 1993. Vol. 57, N 3. P. 3–14.

37. Chikrii A.A., Rappoport I.S. Method of resolving functions in the theory of conflict-controlled processes. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2012. Vol. 48, N 4. P. 512–531. https://doi.org/10.1007/s10559-012-9430-y.

T.V. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych

SOME ASYMPTOTIC PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF LAPLACE EQUATIONS IN THE UNIT DISC

Abstract. The authors consider the optimization problem related to the integral representation of the deviation of positive linear operators on the classes of (ψ,β)-differentiable functions in the integral metric. The Poisson integral is taken as a positive linear operator, being the solution of the Laplace equation in polar coordinates with the corresponding initial conditions given on the boundary of the unit disc. The Poisson integral refers to operators with a delta-like kernel; therefore, it is the best apparatus for solving many problems of applied mathematics, namely: optimization methods and calculus of variations, mathematical control theory, theory of dynamical systems and game problems of dynamics, applied nonlinear analysis and moving objects search. The classes of (ψ,β)-differentiable functions are generalizations of the well-known Sobolev, Weyl–Nagy, etc. classes in optimization problems, on which the asymptotic properties of solutions of Laplace equations in the unit disc are analyzed. The problem solved in the paper will make it possible to generate high-quality mathematical models of many natural and social processes.

Keywords: Laplace equation, (ψ,β)-derivative, optimization problems, Kolmogorov–Nikol'skii problem.

Надійшла до редакції 04.01.2023