УДК 519.816

І.С. РОМАНЧЕНКО
Центральний науково-дослідний інститут Збройних Сил України, Київ, Україна,
e-mail: *1958.romancenko@gmail.com*.
М.М. ПОТЬОМКІН
Центральний науково-дослідний інститут Збройних Сил України, Київ, Україна,
e-mail: *favorite_p@ukr.net*.
О.П. КРАВЕЦЬ
Центральний науково-дослідний інститут Збройних Сил України, Київ, Україна,
e-mail: *kop19710303@gmail.com*.
А.А. СЕДЛЯР
Центральний науково-дослідний інститут Збройних Сил України, Київ, Україна,
e-mail: *saa66ua@ukr.net*.

ПІДХІД ДО ОЦІНЮВАННЯ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ, ОТРИМАНИХ БАГАТОКРИТЕРІЙНИМИ МЕТОДАМИ, ДО ПОХИБОК ЗНАЧЕНЬ КОЕФІЦІЄНТІВ ВАЖЛИВОСТІ ПОКАЗНИКІВ

Анотація. Показано, що на розв'язки, отримувані багатокритерійними методами (ранжування альтернатив та формування їхнього ядра), можуть впливати похибки значень коефіцієнтів важливості показників, якими характеризується досліджувана система. Зазначено, що оцінювання стійкості цих розв'язків є важливою складовою висновків про можливість практичного використання рекомендацій, розроблюваних на їхній основі. Запропоновано підхід до оцінювання стійкості, наведено декілька прикладів здійснення розрахунків з його використанням. Цей підхід дасть змогу підвищити обґрунтованість результатів розв'язання багатокритерійних задач за рахунок отримання достатньо об'єктивних підстав для висновків щодо їхньої стійкості.

Ключові слова: багатокритерійний метод, коефіцієнт важливості, похибка значення коефіцієнта важливості, ранжування альтернатив, стійкість розв'язку, ядро альтернатив.

ВСТУП

Як зазначено у роботі [1], змістова сутність багатьох практичних задач у різних предметних галузях полягає у виборі умов, за яких об'єкт досліджень у визначеній ситуації проявить свої найкращі якості, тобто чимало практичних задач можна звести до задачі багатокритерійної оптимізації.

Зрозуміло, що для розв'язання багатокритерійних задач потрібно застосовувати відповідні методи. Результати наукометричних досліджень, наведені у [2, 3], свідчать про широке використання багатокритерійних методів у різних галузях, зокрема, у машинобудуванні, будівництві, нафтопереробленні, управлінні ризиками тощо. Встановлено, що останнім часом виникла тенденція до комплексного використання цих методів. До прикладу, значення коефіцієнтів важливості показників визначають методом аналізу ієрархій, а ранжування альтернативних варіантів здійснюють методом TOPSIS. До того ж, розроблено нові методи (COPRAS, WASPAS, MULTIMOORA тощо), які поєднують в одному методі ідеї щодо порівняння альтернатив, реалізовані раніше в окремих методах.

Слід також зазначити, що нові методи розроблено і за концепціями компромісу та консенсусу, наведеними у [4].

Для прийняття оптимальних багатоцільових рішень в умовах невизначеності потрібно створити математичний апарат для отримання певних характеристик стійкості багатокритерійних задач оптимізації за умов можливих похибок і збурень у вхідних даних [5], розробити методи регуляризації цих задач [6], побудувати та обґрунтувати ефективні методи їхнього розв'язання.

Зрозуміло, що обґрунтованість рекомендацій, розроблюваних на основі багатокритерійних методів, для особи, яка приймає рішення (ОПР), фактично залежить від обґрунтованості результатів, отримуваних за цими методами. Тому проведення досліджень щодо підвищення обґрунтованості результатів розрахунків за багатокритерійними методами є, на наш погляд, актуальним науковим завданням.

ОЦІНЮВАННЯ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ, ОТРИМАНИХ БАГАТОКРИТЕРІЙНИМИ МЕТОДАМИ, ДО ПОХИБОК ЗНАЧЕНЬ КОЕФІЦІЄНТІВ ВАЖЛИВОСТІ ПОКАЗНИКІВ

Як відомо [7], за допомогою багатокритерійних методів розв'язують два основні типи задач: ранжування альтернатив та формування ядра альтернатив. Ранжування — це отримання пріоритетного ряду альтернатив, у якому вони впорядковані за деяким критерієм переваги. Під час формування ядра альтернатив з вихідної множини альтернатив вилучають альтернативи, які є гіршими згідно з вибраними критеріями порівняння. Альтернативи, які залишилися, формують ядро. Якщо ядро містить лише одну альтернативу, то вона є найкращою. Якщо альтернатив у ядрі декілька, то вони є непорівнянними і для вибору кращої з них потрібно залучати додаткові критерії.

Слід зазначити, що за постановкою ці типи задач є однаковими. Ця постановка має такий вигляд.

Нехай є множина альтернативних варіантів деякої системи, кожний з яких характеризується множиною деяких показників. Значення цих показників задані матрицею $[E_{ij}]$ ($i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, m$, де n — кількість альтернатив, що підлягають порівнянню; m — кількість показників, які характеризують альтернативи). Крім того, є множина коефіцієнтів важливості показників (w_j, $j=1, 2, \ldots, m$), а також для кожного показника визначено критерій, якому повинні відповідати його кращі значення (максимізація або мінімізація показника). При цьому зазвичай накладають умову $\sum w_j = 1$. Однак, мету розрахунків формулюють відповідно до типу розв'язуваної задачі.

Доцільно підкреслити, що під час розв'язання багатокритерійних задач потрібно враховувати особливості, пов'язані зі стійкістю отримуваних результатів. Під стійкістю розуміють сталість рангів альтернатив (для методів ранжування) або складу ядра (для методів формування ядра) у разі зміни умов розрахунків. Для методів ранжування стійкість розв'язку пов'язана з можливим проявом відомої проблеми реверсу рангів, який залежить, наприклад, від зміни складу альтернатив [8] або критеріїв, що використовуються для їхнього порівняння [9, 10]. Зрозуміло, що ці чинники впливають і на стійкість ядра альтернатив.

З наведеної постановки багатокритерійних задач видно, що до переліку вихідних даних, необхідних для виконання розрахунків, входять значення коефіцієнтів важливості показників. Огляд методів, які застосовуються для оцінювання цих значень, наведено в [11]. Ці методи поділяють на експертні та чисельні. Експертні методи ґрунтуються на оціночних судженнях експертів, а в чисельних методах для розрахунку значень коефіцієнтів важливості використовують значення показників, якими характеризується досліджувана система.

Щодо впливу похибок експертних суджень на стійкість отримуваного розв'язку у [12] зазначено, що розв'язок є стійким у разі невеликих похибок оцінок експертів. Проте не надано жодних рекомендацій щодо способу оцінювання таких похибок.

Чисельні методи також не є абсолютно точними через те, що значення показників, якими характеризується досліджувана система, завжди мають похибку оцінювання.

Отже, можна дійти висновку про те, що стійкість розв'язків, отримуваних багатокритерійними методами, залежить від похибок значень коефіцієнтів важливості показників. Відповідно оцінювання стійкості є дуже важливим для практики використання багатокритерійних методів, оскільки усвідомлення можливої нестійкості результатів, на основі яких формуються рекомендації для ОПР, зменшує рівень довіри до них, а отже, їхню обґрунтованість. Інакше кажучи, виникає проблема практичного оцінювання стійкості розв'язків, отримуваних багатокритерійними методами.

Зауважимо, що підхід до оцінювання стійкості ранжування, отриманого експертним методом аналізу ієрархій, наведено у [13]. Тому потрібно розробити підхід до оцінювання стійкості розв'язків, отримуваних чисельними багатокритерійними методами ранжування та формування ядра.

Звернемо увагу на те, що для математичних постановок задач виду $y = A(x)$ стійкість за вихідними даними розуміють так: результатом малих відхилень вихідних даних (δx) є малі відхилення значень функції (δy), тобто $\| \delta y \| \to 0$ за умови $\| \delta x \| \to 0$ [14].

Зважаючи на те, що методи оцінювання значень коефіцієнтів важливості показників не є математично строгими, застосування математичних підходів до оцінювання стійкості є проблематичним. Тому доводиться замість вимоги $\| \delta x \| \to 0$ послуговуватися формулюванням «допустимий діапазон похибки». Водночас відсутність чітких рекомендацій щодо встановлення цього діапазону зумовлює потребу у наданні ОПР права на його визначення (виходячи з її досвіду).

Слід також зауважити, що зазвичай оцінюють стійкість конкретних результатів, отриманих деяким багатокритерійним методом (ранжування або формування ядра) для визначених вихідних даних. З огляду на зазначене, розроблений підхід до оцінювання стійкості буде складатися з такої послідовності дій.

Етап 1. Здійснюють підготовку таких вихідних даних:

- багатокритерійний метод, яким здійснено розрахунки;
- вихідні дані для цього методу (кількість альтернатив n, що підлягають порівнянню; кількість показників m, які характеризують альтернативи; матриця значень показників $[E_{ij}]$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$; значення коефіцієнтів важливості показників w_j, $j = 1, 2, \dots, m$; критерій для кожного показника, якому повинні відповідати його кращі значення (максимізація або мінімізація));
- результати розрахунків (ранги альтернатив або склад ядра альтернатив), отримані вибраним багатокритерійним методом;
- похибка значень коефіцієнтів важливості $\pm\Delta$, для якої буде оцінено стійкість. При цьому Δ $(0 < \Delta < 1)$ задають часткою від вихідних значень коефіцієнтів важливості показників w_j;
- крок δ, з яким будуть змінюватися значення коефіцієнтів важливості показників під час проведення розрахунків.

Етап 2. Визначають діапазон допустимих значень для кожного коефіцієнта важливості відповідно до таких умов:

$$(1-\Delta)w_j \le w_j \le (1+\Delta)w_j, \; j = 1, 2, \dots, m,$$

$$(1-\Delta)w_j > 0,$$

$$(1-\Delta)w_j < 1.$$

Етап 3. Формують вичерпну множину комбінацій значень коефіцієнтів важливості. Значення, з яких формують комбінації, для кожного коефіцієнта отримують шляхом поділу діапазону його змінювання з кроком δ.

Етап 4. З отриманої множини комбінацій вилучають ті комбінації, для яких не виконується умова

$$\sum_{j=1}^{m} w_{jk} = 1, \ k = 1, 2, \ldots, r, \tag{1}$$

де r — кількість комбінацій значень коефіцієнтів важливості у вичерпній їхній множині.

Етап 5. За допомогою вибраного багатокритерійного методу отримують результати розрахунків (ранги альтернатив або склад ядра) для всіх комбінацій значень коефіцієнтів важливості, які залишилися після виконання етапу 4.

Етап 6. Здійснюють порівняння результатів розрахунків, отриманих на попередньому етапі, з результатами розрахунків, заданих у вихідних даних. Суть порівняння на цьому етапі (залежно від типу розв'язуваної задачі) є такою. У разі розв'язання задачі ранжування порівнянню підлягають ранги альтернатив, задані у вихідних даних та отримані на п'ятому етапі. Якщо кожна альтернатива має однакові ранги в усіх випадках, то вважають, що результати ранжування альтернатив, отримані багатокритерійним методом, є стійкими. В іншому разі вони є нестійкими.

У разі розв'язання задачі формування ядра альтернатив порівнянню підлягають номери альтернатив у складі ядер, заданих у вихідних даних та отриманих на п'ятому етапі. Якщо номери альтернатив у складі всіх ядер є однаковими, то вважають, що ядро альтернатив, отримане багатокритерійним методом, є стійким. У іншому разі воно є нестійкими. На цьому розрахунки за розробленим підходом завершуються.

Додатково зазначимо, що застосування розробленого підходу дає змогу розв'язати пряму задачу — оцінити стійкість отриманого деяким багатокритерійним методом розв'язку до похибок значень коефіцієнтів важливості показників. Проте за його допомогою можна розв'язати й обернену задачу — визначити величину мінімальної похибки значень коефіцієнтів важливості, за якої розв'язок втрачає стійкість. Для цього розроблений підхід застосовують декілька разів, поступово збільшуючи значення Δ. Отримавши величину похибки, за якої стійкість втрачається, оцінюють, чи може метод, яким визначено значення коефіцієнтів важливості, мати таку похибку. Якщо цей метод є настільки точним, що виключає наявність похибки такої величини, то розв'язок, отриманий використовуваним багатокритерійним методом, вважається стійким.

ПРИКЛАДИ ПРАКТИЧНОГО ЗАСТОСУВАННЯ РОЗРОБЛЕНОГО ПІДХОДУ

Перш ніж проілюструвати можливість практичного використання розробленого підходу на конкретних прикладах, наведемо короткий опис багатокритерійних методів, використаних для розрахунків.

Як метод ранжування застосуємо метод трикритерійного ранжування альтернатив [15], згідно з яким виконують таку послідовність дій.

Етап 1. Здійснюють підготовку вихідних даних відповідно до постановки багатокритерійної задачі, наведеної вище.

Етап 2. Здійснюють нормування вихідних значень показників з використанням лінійної функції корисності.

Етап 3. Для врахування важливості показників нормалізовані дані масштабують за формулою

$$r_{ij} = w_{ij} e_{ij}, \ i = 1, 2, \ldots, n, \ j = 1, 2, \ldots, m,$$

де e_{ij} — нормовані значення показників.

Етап 4. Для кожного показника за масштабованими даними визначають його найкраще e_j^+ значення. Через те, що для нормування використано лінійну функцію корисності, найгіршим значенням для кожного показника є 0.

Етап 5. Для кожної *i*-ї альтернативи розраховують значення показника S_i, який характеризує її наближеність до найкращого значення, за формулою:

$$S_i = \sum_{j=1}^{m} |(e_j^+ - r_{ij})|, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Етап 6. Для кожної *i*-ї альтернативи розраховують значення показника R_i, який характеризує її максимальну віддаленість від найкращої точки за показником з найбільшою віддаленістю, за формулою:

$$R_i = \max_j [|(e_j^+ - r_{ij})|], \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Етап 7. Для кожної альтернативи визначають значення адитивної згортки

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Етап 8. Для кожної альтернативи розраховують узагальнений показник переваги

$$Q_i = \frac{S_i + R_i}{y_i}, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Найкраща альтернатива має бути максимально наближеною до найкращої точки та максимально віддаленою від найгіршої, тобто мати найменші значення S_i і R_i та найбільше значення y_i. Виходячи з цього, на заключному етапі 9 впорядковують альтернативи за збільшенням Q_i. Найкращою буде перша альтернатива в отриманому пріоритетному ряду.

Для формування ядра альтернатив скористаємося методом трикритерійного формування ядра, який ґрунтується на тій самій ідеї, що й метод, розглянутий вище. Перші сім етапів цих двох методів є однаковими. Проте для формування ядра цим методом на восьмому етапі передбачено попарне порівняння альтернатив (A та B) відповідно до правил, наведених у табл. 1. Якщо під час порівняння одна з альтернатив виявиться гіршою, то її виключають з подальшого розгляду. Після здійснення всіх парних порівнянь ті альтернативи, що залишились, і будуть складати ядро.

Покажемо можливість практичного використання розробленого підходу на декількох прикладах. Два перших приклади ілюструють розв'язання прямої задачі оцінювання стійкості ранжування для заданої похибки значень коефіцієнтів важливості. Вихідні дані для цих прикладів запозичимо з [15].

Приклад 1 — це вибір раціонального варіанта деякої системи за шістьма показниками $E_1 - E_6$ (табл. 2) за однакової їхньої важливості ($w_j = 0.167$). Показники $E_1 - E_3$ потребують максимізації, а решта — мінімізації. Зазначимо, що відповідно до [15], згідно з методом трикритерійного ранжування найкращим є варіант № 5.

Результати розрахунків з використанням розробленого підходу для цього прикладу наведено у табл. 3 та 4. Обчислення значень коефіцієнтів важливості для $\Delta = 0.05$ здійснено з кроком 0.002.

Т а б л и ц я 1. Правила, за якими приймають рішення щодо віднесення відповідної альтернативи до ядра

<table>
<tr><th>Умова віддаленості від найгіршої точки</th><th>Умова наближеності до найкращої точки</th><th>Умова віддаленості від найкращої точки за найгіршим показником</th><th>Належність ядру</th></tr>
<tr><td rowspan="9">$y_A > y_B$
A краща</td><td rowspan="3">$S_A > S_B$
A гірша</td><td>$R_A > R_B$ (A гірша)</td><td rowspan="3">A, B</td></tr>
<tr><td>$R_A = R_B$ (A, B однакові)</td></tr>
<tr><td>$R_A < R_B$ (A краща)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$S_A = S_B$
A, B однакові</td><td>$R_A > R_B$ (A гірша)</td><td>A, B</td></tr>
<tr><td>$R_A = R_B$ (A, B однакові)</td><td rowspan="2">A</td></tr>
<tr><td>$R_A < R_B$ (А краща)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$S_A < S_B$
A краща</td><td>$R_A > R_B$ (A гірша)</td><td>A, B</td></tr>
<tr><td>$R_A = R_B$ (A, B однакові)</td><td rowspan="2">A</td></tr>
<tr><td>$R_A < R_B$ (A краща)</td></tr>
<tr><td rowspan="9">$y_A = y_B$
A, B однакові</td><td rowspan="3">$S_A > S_B$
A гірша</td><td>$R_A > R_B$ (A гірша)</td><td rowspan="2">B</td></tr>
<tr><td>$R_A = R_B$ (A, B однакові)</td></tr>
<tr><td>$R_A < R_B$ (A краща)</td><td>A, B</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$S_A = S_B$
A, B однакові</td><td>$R_A > R_B$ (A гірша)</td><td>B</td></tr>
<tr><td>$R_A = R_B$ (A, B однакові)</td><td>A, B</td></tr>
<tr><td>$R_A < R_B$ (A краща)</td><td>A</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$S_A < S_B$
A краща</td><td>$R_A > R_B$ (A гірша)</td><td>A, B</td></tr>
<tr><td>$R_A = R_B$ (A, B однакові)</td><td rowspan="2">A</td></tr>
<tr><td>$R_A < R_B$ (A краща)</td></tr>
<tr><td rowspan="9">$y_A < y_B$
A гірша</td><td rowspan="3">$S_A > S_B$
A гірша</td><td>$R_A > R_B$ (A гірша)</td><td rowspan="2">B</td></tr>
<tr><td>$R_A = R_B$ (A, B однакові)</td></tr>
<tr><td>$R_A < R_B$ (A краща)</td><td>A, B</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$S_A = S_B$
A, B однакові</td><td>$R_A > R_B$ (A гірша)</td><td rowspan="2">B</td></tr>
<tr><td>$R_A = R_B$ (A, B однакові)</td></tr>
<tr><td>$R_A < R_B$ (A краща)</td><td>A, B</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$S_A < S_B$
A краща</td><td>$R_A > R_B$ (A гірша)</td><td rowspan="3">A, B</td></tr>
<tr><td>$R_A = R_B$ (A, B однакові)</td></tr>
<tr><td>$R_A < R_B$ (A краща)</td></tr>
</table>

Результати аналізу даних, наведених у табл. 4, свідчать про те, що для відхилень значень коефіцієнтів важливості в діапазоні $\pm 5\,\%$ отримано шість варіантів ранжування. Інакше кажучи, до цієї похибки результати ранжування є нестійкими.

Водночас в усіх пріоритетних рядах найкращі варіанти (№ 5 та № 3) не змінилися. Це означає, що в разі прийняття гіпотези про те, що значення коефіцієнтів важливості визначені з похибкою, яка не перевищує ±5%, обґрунтованими можна вважати результати лише для двох варіантів, які посіли перше та друге місце відповідно.

Таблиця 2. Вихідні дані та ранги варіантів для прикладу 1 [15]

Варіант системи, i	Вихідні значення показників						Ранги варіантів, отримані методом трикритерійного ранжування
	$E_{i1}\uparrow$	$E_{i2}\uparrow$	$E_{i3}\uparrow$	$E_{i4}\downarrow$	$E_{i5}\downarrow$	$E_{i6}\downarrow$	
1	0.852	0.903	0.724	0.085	0.216	0.102	3
2	0.741	0.935	0.827	0.064	0.177	0.245	6
3	0.815	0.839	0.896	0.106	0.118	0.143	2
4	0.778	0.806	0.689	0.128	0.255	0.163	9
5	0.926	0.742	0.862	0.043	0.098	0.082	1
6	0.741	0.871	0.827	0.085	0.137	0.225	7
7	0.667	0.903	0.793	0.064	0.235	0.123	8
8	0.852	0.839	1.000	0.128	0.275	0.143	5
9	0.667	0.806	0.896	0.106	0.294	0.266	10
10	0.778	0.903	0.965	0.177	0.059	0.184	4

Таблиця 3. Результати розрахунків за етапами 2–4 розробленого підходу (для прикладу 1)

Значення Δ	$(1-\Delta)w_j$	$(1+\Delta)w_j$	Кількість комбінацій значень коефіцієнтів важливості	
			загальна	що відповідають умові (1)
0.05	0.158	0.174	531441	31212

Таблиця 4. Ранги варіантів системи для різних комбінацій значень коефіцієнтів важливості, отриманих за розробленим підходом (для прикладу 1)

Варіант системи, i	Ранги варіантів системи, отримані для різних комбінацій значень коефіцієнтів важливості					
	Варіант ранжування 1	Варіант ранжування 2	Варіант ранжування 3	Варіант ранжування 4	Варіант ранжування 5	Варіант ранжування 6
1	3	3	4	4	3	4
2	6	6	6	6	5	5
3	2	2	2	2	2	2
4	9	9	9	9	9	9
5	1	1	1	1	1	1
6	8	7	8	7	7	7
7	7	8	7	8	8	8
8	5	5	5	5	6	6
9	10	10	10	10	10	10
10	4	4	3	3	4	3

Приклад 2 стосується вибору варіанта деякої системи за трьома показниками $E_1 - E_3$, причому всі вони підлягають мінімізації (табл. 5). Важливість показників становить $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.333$. $w_3 = 0.167$. У [15] показано, що найкращим варіантом згідно з методом трикритерійного ранжування є варіант № 4.

Таблиця 5. Вихідні дані та ранги варіантів для прикладу 2 [15]

Варіант системи, i	Вихідні дані			Ранги варіантів, отримані методом трикритерійного ранжування
	$E_{i1}\downarrow$	$E_{i2}\downarrow$	$E_{i3}\downarrow$	
1	3.00	2.00	0.00	4
2	2.00	0.00	0.33	3
3	1.00	1.00	0.67	2
4	0.00	0.67	1.00	1

Таблиця 6. Результати розрахунків за етапами 2–4 розробленого підходу за різних значень Δ (для прикладу 2)

Значення Δ	$(1-\Delta)w_1$	$(1+\Delta)w_1$	$(1-\Delta)w_2$	$(1+\Delta)w_2$	$(1-\Delta)w_3$	$(1+\Delta)w_3$	Кількість комбінацій значень коефіцієнтів важливості	
							загальна	що відповідають умові (1)
0.05	0.474	0.525	0.316	0.349	0.158	0.174	30056	577
0.10	0.449	0.550	0.299	0.366	0.149	0.183	242760	2377

Таблиця 7. Ранги варіантів системи для різних комбінацій значень коефіцієнтів важливості та різних значень Δ (для прикладу 2)

Варіант системи, i	Ранги варіантів системи для $\Delta = 0.05$		Ранги варіантів системи для $\Delta = 0.10$	
	Варіант ранжування 1	Варіант ранжування 2	Варіант ранжування 1	Варіант ранжування 2
1	4	4	4	4
2	2	3	2	3
3	3	2	3	2
4	1	1	1	1

Результати розрахунків для цього прикладу для різних значень Δ наведено у табл. 6 та 7. Обчислення значень коефіцієнтів важливості здійснено з кроком 0.001.

Як показано у табл. 7, для відхилень значень коефіцієнтів важливості у діапазонах ±5 % та ±10 % є два різні варіанти ранжування. Інакше кажучи, можна зробити висновок, що до цих похибок значень коефіцієнтів важливості результати ранжування є нестійкими. Водночас в обох пріоритетних рядах найкраща (четверта) альтернатива не змінилася. Тому можна стверджувати, що тоді, коли похибка значень коефіцієнтів важливості не перевищує ±10 % результати ранжування за критерієм «незмінний лідер» є стійкими.

Розв'язання оберненої задачі оцінювання стійкості ранжування покажемо на такому прикладі.

Приклад 3. Це визначення величини мінімальної похибки значень коефіцієнтів важливості, за якої ранжування втрачає стійкість. Скористаємося вихідними даними для прикладу 2.

Т а б л и ц я 8. Результати розрахунків за етапами 2–4 розробленого підходу для різних значень Δ (для прикладу 3)

Значення Δ	$(1-\Delta)w_1$	$(1+\Delta)w_1$	$(1-\Delta)w_2$	$(1+\Delta)w_2$	$(1-\Delta)w_3$	$(1+\Delta)w_3$	**Кількість комбінацій значень коефіцієнтів важливості**	
							загальна	що відповідають умові (1)
0.02	0.489	0.510	0.326	0.339	0.163	0.169	2156	97
0.03	0.485	0.514	0.323	0.343	0.161	0.171	6930	228
0.04	0.479	0.520	0.319	0.346	0.159	0.173	17640	417

Т а б л и ц я 9. Ранги варіантів системи для різних комбінацій значень коефіцієнтів важливості та різних значень Δ (для прикладу 3)

Варіант системи, *i*	**Ранги варіантів, отримані методом трикритерійного ранжування (вихідні дані для прикладу 2)**	**Ранги варіантів для $\Delta = 0.02$**	**Ранги варіантів для $\Delta = 0.03$**	**Ранги варіантів для $\Delta = 0.04$**	
				Варіант ранжування 1	Варіант ранжування 2
1	4	4	4	4	4
2	3	3	3	3	2
3	2	2	2	2	3
4	1	1	1	1	1

Розв'яжемо цю задачу шляхом поступового збільшення зазначеної похибки з кроком 0.001 доти, доки порядок ранжування альтернатив не зміниться порівняно з ранжуванням, отриманим з використанням багатокритерійного методу у другому прикладі 2. Результати розрахунків для прикладу 3 наведено у табл. 8 та 9.

Аналіз даних, наведених у табл. 9, свідчить про те, що ранжування втрачає стійкість для похибок значень коефіцієнтів важливості, які знаходяться в інтервалі $0.03 < \Delta \leq 0.04$. За потреби у більш точному оцінюванні похибки, за якої відбувається втрата стійкості, потрібно виконати додаткові розрахунки для значень Δ, які знаходяться в цьому інтервалі.

Виходячи з того, що розглядуваний приклад має ілюстративний характер, вважатимемо, що втрата стійкості відбувається для середини цього інтервалу ($\Delta = 0.035$). Тоді у разі прийняття гіпотези про те, що значення коефіцієнтів важливості визначені з похибкою, яка не перевищує ± 3.5 %, обґрунтованими можна вважати результати лише для варіанта № 4, який посів перше місце у всіх розглядуваних варіантах розрахунків як для третього, так і для другого прикладів.

Розглянемо приклад, який стосується оцінювання стійкості ядра альтернатив.

Приклад 4. Вихідні дані мають такий вигляд. Нехай є сім ($n = 7$) варіантів деякої системи, кожний з яких характеризується п'ятьма показниками ($m = 5$) $E_1 - E_5$ (табл. 10). Значення всіх показників потрібно максимізувати. До того ж, відомі значення коефіцієнтів важливості (табл. 11). Методом трикритерійного формування ядра отримано ядро, яке складається з альтернатив № 3 та № 5.

За цими даними потрібно оцінити стійкість ядра альтернатив до похибок значень коефіцієнтів важливості показників.

Таблиця 10. Вихідні значення показників для прикладу 4

Варіант системи, i	Вихідні значення показників				
	$E_{i1}\uparrow$	$E_{i2}\uparrow$	$E_{i3}\uparrow$	$E_{i4}\uparrow$	$E_{i5}\uparrow$
1	5	3	2	7	2
2	4	3	2	5	1
3	3	4	1	6	3
4	7	1	4	1	7
5	1	6	6	4	5
6	2	7	5	2	6
7	6	5	6	3	4

Таблиця 11. Значення коефіцієнтів важливості показників для прикладу

№ показника, j	Значення коефіцієнтів важливості, w_j
1	0.083
2	0.167
3	0.083
4	0.417

Розрахунки за розробленим підходом для цього прикладу виконано для трьох значень Δ (0.10; 0.15; 0.20). Змінювання значень коефіцієнтів важливості у визначених діапазонах здійснено з кроком 0.01. Результати формування ядер для цих умов наведено в табл. 12.

Результати аналізу даних, наведених у табл. 12, свідчать про те, що тоді, коли похибка значень коефіцієнтів важливості не перевищує $\pm 10\,\%$, ядро є стійким. У тому разі, коли похибка перевищує зазначену величину, ядро є нестійким.

На практиці отримані результати свідчать про те, що тоді, коли похибка не перевищує $\pm 15\,\%$, кількість використаних показників є недостатньою для того, щоб надати обґрунтовану перевагу одній з альтернатив (№ 3 або № 5), які входять до складу ядра.

У тому разі, коли оцінювана похибка становить $\pm 20\,\%$ (або більше), перевагу можна надати альтернативі № 3.

Слід звернути увагу на те, що приклади 1–3 розв'язано з кроком зміни значень показників важливості у межах діапазону їхнього варіювання, який становив 0.001 та 0.002, а приклад 4 — з кроком 0.01. З даних, наведених у табл. 3, 6, 8, 12, видно, що зміна кроку розрахунків суттєво впливає на кількість комбінацій значень коефіцієнтів важливості. На перший погляд здається, що збільшення цього кроку зумовить пропорційне зменшення часу розрахунків. Однак, практичне розв'язання розглянутих прикладів на ПЕОМ Pentium IV з процесором 2.8 ГГц та оперативною пам'яттю 760 Мб показало, що час розрахунків для одного варіанта Δ з кроком 0.001 для прикладів 1–3 становить менше 30 с, а для прикладу 4 — 10 хв. Це пояснюється тим, що процедура парного порівняння, застосована для формування ядра, потребує здійснення значно більшої кількості обчислювальних операцій, ніж ранжування розглядуваних альтернатив.

Виходячи з того, що розглянуті приклади мають ілюстративний характер, для розв'язання прикладу 4 вибрано крок розрахунків 0.01, для якого час отримання результатів скоротився до величини, сумірної з часом розв'язання прикладів 1–3.

Т а б л и ц я 12. Результати розрахунків за етапами 3–6 розробленого підходу

Значення Δ	Кількість комбінацій значень коефіцієнтів важливості		Кількість ядер та їхній склад
	загальна	що відповідають умові (1)	
0.10 (10 %)	2430	210	1 ядро містить альтернативи № 3 та № 5
0.15 (15 %)	5616	399	2 ядра; перше містить альтернативу № 3, друге — альтернативу № 5.
0.20 (20 %)	24192	1228	1 ядро містить альтернативу № 3

ВИСНОВКИ

У статті наведено опис підходу до оцінювання стійкості отриманих багатокритерійними методами (ранжування альтернатив та формування їхнього ядра) розв'язків до похибок значень коефіцієнтів важливості показників. Цей підхід дасть змогу підвищити обґрунтованість рекомендацій, розроблюваних на основі цих методів, за рахунок забезпечення достатньо об'єктивних підстав для висновку про стійкість пріоритетів розглядуваних альтернатив або складу їхнього ядра.

Можливість практичного використання розробленого підходу показано на декількох розрахункових прикладах.

Напрямом подальших досліджень є розроблення підходу до оцінювання стійкості отриманих за багатокритерійними методами розв'язків до похибок значень показників, які характеризують досліджувану складну систему.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Воронин А.Н., Савченко А.С. Многокритериальная оптимизация: системный подход. *Кибернетика и системный анализ*. 2020. Т. 56, № 6. С. 160–174.
2. Mardani A., Jusoh A., Nor K.M.D., Khalifah Z., Zakwan N., Valipour A. Multiple criteria decision-making techniques and their applications — a review of the literature from 2000 to 2014. *Economic Research-Ekonomska Istraživanja*. 2015. Vol. 28, Iss. 1. P. 516–571.
3. Eltarabishi F., Omar O.H., Alsyouf I., Bettayeb M. Multi-criteria decision making methods and their applications — a literature review. *Proc. International Conference on Industrial Engineering and Operations Management* (10–12 March 2020, Dubai, UAE). Dubai, 2020. P. 2654–2663.
4. Воронін А.М., Савченко А.С. Компроміс і консенсус у багатокритерійних задачах. *Кібернетика та системний аналіз*. 2022. Т. 58, № 5. С. 122–128.
5. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Многокритериальная задача оптимизации: устойчивость к возмущениям входных данных векторного критерия. *Кибернетика и системный анализ*. 2020. Т. 56, № 6. С. 107–114.
6. Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І. Стійкість і регуляризація векторних задач оптимізації за можливих збурень критеріїв. *Кібернетика та системний аналіз.* 2022. Т. 58, № 5. С. 57–63.
7. Baležentis A., Baležentis T., Brauers W.K.M. Multimoora-FG: a multi-objective decision making method for linguistic reasoning with an application to personnel selection. *Informatica*. 2012. Vol. 23, N 2. P. 173–190.
8. Tofallis C. Add or multiply? A tutorial on ranking and choosing with multiple criteria. *INFORMS Transactions on Education*. 2014. N 14 (3). P. 109–119.

9. Wang X., Triantaphyllou E. Ranking irregularities when evaluating alternatives by using some ELECTRE methods. *Omega*. 2006. Vol. 36, N 1. P. 45–63.

10. Mareschal B., De Smet Y., Nemery P. Rank reversal in the PROMETHEE II method: Some new results. *Proc. 2008 IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM)* (8–11 December 2008, Singapore). Singapore, 2008. P. 959–963.

11. Потьомкін М.М., Седляр А.А., Дейнега О.В., Кравець О.П. Порівняння методів, використовуваних під час прийняття рішення для отримання значень коефіцієнтів важливості показників, що характеризують складну систему. *Кибернетика и системный анализ*. 2020. Т. 56. № 6. С. 149–159.

12. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. Москва: Радио и связь, 1993. 278 с.

13. Романченко І.С., Потьомкін М.М., Ніколаєнко М.В., Гразіон Д.І. Підхід до оцінювання стійкості ранжування альтернатив, отриманого за методом аналізу ієрархій. *Кібернетика та системний аналіз.* 2021. Т. 57, № 6. С. 53–60.

14. Калиткин Н.Н. Численные методы. Москва: Наука, 1978. 512 с.

15. Свида І.Ю., Потьомкін М.М., Хомчак Р.Б. Метод трикритеріального ранжування та його використання для багатокритеріального порівняння альтернатив. *Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони.* 2017. № 3 (30). С. 88–92.

I.S. Romanchenko, M.M. Potomkin, O.P. Kravets, A.A. Sedliar

THE APPROACH TO ASSESSING THE STABILITY OF SOLUTIONS OBTAINED BY MULTI-CRITERIA METHODS TO THE ERRORS OF THE VALUES OF THE IMPORTANCE COEFFICIENTS OF THE INDICATORS

Abstract. The authors show that the solutions obtained by multi-criteria methods (ranking of alternatives and formation of their core) can be affected by errors of the values of the importance ratio of the indicators that characterize the system under study. The stability analysis of such solutions is shown to be an important component of the conclusions about the possibility of practical use of the recommendations developed on their basis. The stability analysis approach is proposed and used in several examples of calculations. This approach will increase the substantiation of the results of the solution of multi-criteria problems due to obtaining a sufficiently objective basis for the conclusion on their stability.

Keywords: multi-criteria method, importance ratio, error of importance ratio value, ranking of alternatives, solution stability, alternatives core.

Надійшла до редакції 03.01.2023